MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

48. BAND

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
JENA

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY
E. HECKE G. HERGLOTZ O. PERRON
W. SÜSS W. THRELFALL H. WEYL

48. BAND

BERLIN
SPRINGER-VERLAG
1942/1943

Unveränderter Nachdruck 1970
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Fotodruck: Mikrokopie GmbH, 8 München 22, Bruderstraße 9

Inhalt des 48. Bandes.

Seite

Baier, O., Elementarer Beweis der Dreiecksungleichung in der Poincaréschen Halbebene 527

Berichtigung zu Band 47 792

Bödewadt, U. T., Die Kettenregel für höhere Ableitungen 735

Bol, G., Über Eikörper mit Vieleckschatten 227

Bompiani, E., Sul diagramma di Newton relativo ad una singolarità di una curva algebrica piana 1

Carathéodory, C., Gepaarte Mengen, Verbände, Somenringe 4

Collatz, L., Einschließungssatz für die charakteristischen Zahlen von Matrizen 221

Dinghas, A., Isoperimetrische Ungleichungen für konvexe Bereiche mit Ecken 428

Eichler, M., Konstruktion lösender Kerne für singuläre Integralgleichungen erster Art, insbesondere bei Differenzkern 503

Fan, Ky, Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques d'une variable entière et leur application à l'étude de l'itération des transformations continues 685

Fejes, L., Über die dichteste Kugellagerung 676

Fenyö, St., Über die „Polynom-Kerne" der linearen Integralgleichungen . . 772

Görtler, H., und Wieghardt, K., Über eine gewisse Klasse von Strömungen zäher Flüssigkeiten und eine Kennzeichnung der Poiseuille-Strömung 247

Graf, H., und Thomas, H., Zur Frage des Gleichgewichts von Viereckssnetzen aus verknoteten und gespannten Fäden. I. 198

Grüß, G., Über das ϑ im verallgemeinerten Mittelwertsatz der Integralrechnung 712

Hamel, G., Über die ebene Bewegung eines unausdehnbaren Fadens 27

Hasse, H., Der n-Teilungskörper eines abstrakten elliptischen Funktionenkörpers als Klassenkörper, nebst Anwendung auf den Mordell-Weilschen Endlichkeitssatz 48

Haupt, O., Über Lösungen linearer Differentialgleichungen mit Asymptoten 212

Haupt, O., Über das asymptotische Verhalten der Lösungen gewisser linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen 289

Hornich, H., Eine Ungleichung für Vektorlängen 268

Hornich, H., Über gewisse trigonometrische Integrale. I. 785

Kamke, E., Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. IV. 67

Seite

Klein-Barmen, F., Über gewisse Halbverbände und kommutative Semigruppen. Erster Teil 275

Klein-Barmen, F., Über gewisse Halbverbände und kommutative Semigruppen. Zweiter Teil 715

Kneser, H., Zur Stetigkeit der Wurzeln einer algebraischen Gleichung . . . 101

Krull, W., Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. Eine Bemerkung zu den Beiträgen VI und VII 530

Krull, W., Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. VIII. Multiplikativ abgeschlossene Systeme von endlichen Idealen 533

Lösch, F., Über die restringierte Limitierung von Doppelfolgen nach den Verfahren von Cesàro, Hölder und Euler-Knopp 105

Maruhn, K., Zur eindeutigen Lösbarkeit der potentialtheoretischen Randwertaufgaben bei nichtbeschränkten Randwerten 251

Müller, M., Über die Existenz periodischer Lösungen bei gewissen Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung 128

Neder, L., Eine notwendige und hinreichende Bedingung für Doppelreihen . 497

Nöbeling, G., Über den Flächeninhalt dehnungsbeschränkter Flächen . . . 747

Obreschkoff, N., Über das Riemannsche Summierungsverfahren 441

Perron, O., Über eine für die Invariantentheorie wichtige Funktionalgleichung 136

Perron, O., Einige Bemerkungen über rationale Flächen 467

Pisot, C., Ein Kriterium für die algebraischen Zahlen 293

Preisaufgabe der Technischen Hochschule Karlsruhe 532

Quade, W., Ein neues Verfahren der schrittweisen Näherungen zur Lösung von $y' = f(x, y)$ 324

Rédei, L., Zu einem Approximationssatz von Kokma 500

Sauer, R., Streifenmodelle und Stangenmodelle zur Differentialgeometrie der Drehflächen, Schraubenflächen und Regelflächen 455

Schöbe, W., Das Lucassche Ehepaarproblem 781

Schröder, K., Zur Theorie der Randwertaufgaben der Differentialgleichung $\Delta\Delta U = 0$ 553

Seifert, H., Zur asymptotischen Integration von Differentialgleichungen . . 173

Strubecker, K., Differentialgeometrie des isotropen Raumes. III. Flächentheorie 369

Thomas, H., s. Graf, H.

Wieghardt, H., s. Görtler, H.

Sul diagramma di Newton relativo ad una singolarità di una curva algebrica piana.

Al Prof. KONRAD KNOPP
in occasione del suo 60° compleanno, 22/7/1942.

Nota di E. Bompiani (Roma).

Sia C una curva piana algebrica d'ordine n con un punto multiplo d'ordine $r\,(<n)$ in O. Posta ivi l'origine di un sistema di assi cartesiani (x, y) l'equazione di C è del tipo

$$\varphi_r(x, y) + \varphi_{r+1}(x, y) + \cdots + \varphi_n(x, y) = 0$$

essende le φ_i *forme* dei gradi indicati dall'indice. L'equazione $\varphi_r(x, y) = 0$ fornisce le tangenti in O. Fra esse ve ne sia una d'ordine $s \leqq r$, e si assuma come tale la retta $y = 0$, sicchè $\varphi_r(x, y) = y^s \varphi_{r-s}(x, y)$.

E' ben noto l'uso del *diagramma di Newton* nello studio del ramo o dei rami della curva che escono da O con la tangente $y = 0$. Ad ogni termine $a_{pq} x^p y^q$ dell'equazione effettivamente presente ($a_{pq} \neq 0$) si fa corrispondere in un diagramma cartesiano il punto (p, q); l'insieme di questi punti è il diagramma dell'equazione. Si dicono rette *separatrici* le rette contenenti due o più punti del diagramma e che lasciano tutti gli altri punti (che non contengono) del diagramma da parte opposta al punto (0, 0). Se si considera su ciascuna separatrice il tratto compreso fra i due punti estremi del diagramma che essa contiene, l'insieme di questi tratti è una poligonale aperta, convessa rispetto a (0, 0), con gli estremi sugli assi $q = 0$, $p = 0$: questa poligonale e i semiassi positivi p, q, a partire dai punti d'incontro con essa determinano una regione del piano (p, q) in cui cadono tutt'i punti del diagramma.

Una separatrice determina col suo coefficiente angolare il rapporto fra l'ordine e la classe del ramo o dei rami di C cui essa dà luogo. Precisamente, se ad essa appartengono i due punti (p_0, q_0) e (p_1, q_1), e sia per es. $p_0 < p_1$ e $p_0 > q_1$, e se

$$x = t^\nu, \quad y = a t^\mu + b t^{\mu+1} + \cdots (a \neq 0, \ \mu > \nu > 0)$$

è un ramo relativo a quella separatrice, deve aversi

$$\frac{p_1 - p_0}{q_0 - q_1} = \frac{\mu}{\nu}$$

e per ogni altro punto (p, q) del diagramma è

$$\nu p + \mu q \geqq \nu p_0 + \mu q_0 = \nu p_1 + \mu q_1$$

(il segno = valendo per i punti situati su quella separatrice). I numeri ν e $\nu' = \mu - \nu$ sono l'ordine e la classe del ramo.

Può accadere che il tratto di separatrice costituente un lato della poligonale sopra indicata contenga due soli punti a coordinate intere p, q, precisamente quelli che lo determinano. Può anche accadere che detto tratto contenga più di due punti a coordinate intere: due di essi appartengono certamente al diagramma dell'equazione, ma gli altri possono essere o non essere punti del diagramma. Quando un punto a coordinate intere situato sul tratto di separatrice in esame *non* appartiene al diagramma diremo che si ha ivi una *lacuna*. Ora *il numero e la posizione delle lacune sulla separatrice* (o, se si vuole, il numero e la posizione su di essa dei punti del diagramma) *sono caratteri proiettivi del ramo, quindi della singolarità*.

Si consideri infatti una trasformazione proiettiva non degenere che lasci inalterato il punto O e la tangente $y = 0$, di equazioni (in coordinate omogenee x, y, t)

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' \\ y &= y' \qquad\qquad \alpha\varepsilon \neq 0 \\ t &= \nu x' + \delta y' + \varepsilon t'. \end{aligned}$$

Il termine $a_{pq} x^p y^q t^{n-(p+q)}$ dà origine ad un termine $\alpha^p \varepsilon^{n-(p+q)} a_{pq} \times$ $\times x'^p y'^q t'^{n-(p+q)}$ e ad altri termini $a'_{p'q} x'^{p'} y'^{q'} t'^{n-(p'+q')}$ per i quali è $p' + q' \geqq p + q$, $q' > q$. Anzi se il punto (p, q) relativo alla curva data C è su una separatrice anche il punto (p', q') relativo alla curva trasformata C' è sulla separatrice ad essa relativa e per ogni altro punto (p', q') che s'introduce con la trasformazione è

$$\nu p' + \mu q' = \nu p + \mu q + \mu(q' - q) + \nu(p' - p) > \nu p + \mu q + \nu(p' + q' - p - q)$$

cioè

$$\nu p' + \mu q' > \nu p + \mu q.$$

Ne segue che la figura dei punti del diagramma posti sulla separatrice non cambia passando da C a C': e questo si voleva provare.

Rimane ora a dare il significato geometrico delle lacune in relazione alla curva C.

Sia $a_{p_0 q_0} x^{p_0} y^{q_0}$ il termine di grado (complessivo in x, y) più basso che concorre alla determinazione di un tratto di separatrice: sia cioè (p_0, q_0) il punto *più alto* (e più *a sinistra*) del tratto in esame, caratterizzato dai valori μ e ν primi fra loro. Procedendo su di esso *verso il basso* s'incontrano i punti a coordinate intere

$$(p_0, q_0), (p_0 + \mu, p_0 - \nu), (p_0 + 2\mu, q_0 - 2\nu), \ldots, (p_0 + h\mu, q_0 - h\nu);$$

l'ultimo punto, dovendo essere o sull'asse p o al di sopra di esso, deve corrispondere ad un $h \leqq \left[\frac{q_0}{\nu}\right]$ = massimo intero contenuto in $\frac{q_0}{\nu}$.

Per esaminare la *lacuna* di posto k, cioè l'ipotesi che il punto $(p_0 + k\mu,\ q_0 - k\nu)$, *non* appartenga al diagramma di Newton, consideriamo la polare ϱ-esima di O rispetto a C. Da un termine $a_{p,q} x^p y^q t^{n-(p+q)}$ di C si ottiene un termine della polare che differisce da $a_{p,q} x^p y^q t^{n-\varrho-(p+q)}$ soltanto per un fattore numerico; e questo comparisce effettivamente solo se $n - \varrho - (p + q) \geqq 0$, cioè se $\varrho \leqq n - (p + q)$. Perciò non hanno influenza sulla determinazione di detta polare i termini di grado $p + q > n - \varrho$. Se si pone $\mu - \nu = \nu'$ e $\varrho_k = n - (p_0 + q_0) - k\nu'$ non hanno influenza sulla polare ϱ_k-esima i termini di grado $> r - \varrho_k = p_0 + q_0 + k\nu'$ che si potranno quindi a quest'effetto trascurare.

Nei termini da considerare di grado $\leqq p_0 + q_0 + k\nu'$ l'esponente q della y è sempre $> q_0 - k\nu$ ad eccezione del termine col coefficiente $a_{p_0+k\mu,\,q_0-k\nu}$. Perciò se questo è $\neq 0$ l'equazione della polare è divisibile per $y^{q_0-k\nu}$ (e non per una potenza più alta): nel caso opposto è divisibile per $y^{p_0-k\nu+1}$ (almeno). Sicchè

Condizione necessaria e sufficiente affinchè su un tratto di separatrice caratterizzato dal suo punto più alto (p_0, q_0) *e dal suo coefficiente direttivo, cioè dai numeri* ν *e* $\mu = \nu + \nu'$ *primi fra loro, vi sia una lacuna di posto* k *è che la polare d'ordine* $n - \varrho_k = p_0 + q_0 + k\nu'$ *del punto singolare in esame abbia la tangente ai rami determinati da quella separatrice come componente multipla secondo* $q_0 - k\nu + 1$ *(almeno).*

(Eingegangen am 31. Januar 1942.)

Gepaarte Mengen, Verbände, Somenringe.

Herrn Konrad Knopp

zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

C. Carathéodory in München.

---

1. Einleitung. Eine der am häufigsten auftretenden Kennzeichnungen einer Menge $\mathfrak{m}$ von Elementen $a, b, \ldots, x, \ldots$ erhält man, indem man aus der Menge aller Paare (x, y) ihrer Elemente eine willkürliche, aber wohldefinierte Teilmenge solcher Paare aussondert. Eine derartige Menge $\mathfrak{m}$, bei welcher gewisse Paare von Elementen ausgezeichnet sind, wird im folgenden eine „gepaarte Menge" genannt, und die Elemente jedes einzelnen der ausgezeichneten Paare werden zueinander konjugiert genannt.

Nun kann man jeder beliebigen Teilmenge $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{m}$ diejenige Teilmenge $\mathfrak{a}'$ von $\mathfrak{m}$ zuordnen, die aus allen Elementen x besteht, welche gleichzeitig zu allen Elementen von $\mathfrak{a}$ konjugiert sind. Setzt man dann $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}'' = \mathfrak{b}'$, so zeigt sich, daß immer $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}''$ ist und daß diejenigen Teilmengen von $\mathfrak{m}$, für welche $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}''$ ist, eine besondere Rolle spielen; sie sollen die „normalen" Teilmengen von $\mathfrak{m}$ genannt werden. Die wichtigste Eigenschaft der normalen Teilmengen besteht darin, daß sie immer einen Verband $\mathfrak{M}$ bilden, der auf sich selbst involutorisch abgebildet ist.

2. Ist insbesondere eine Menge teilweise geordnet, so erhält man eine natürliche Paarung derselben, indem man die Elemente, welche bei der teilweisen Ordnung „relativ prim" zueinander sind, zu Paaren zusammenfaßt. Dagegen kann man nicht immer einer gegebenen gepaarten Menge $\mathfrak{m}$ eine solche teilweise Ordnung aufprägen, daß die dadurch entstehende natürliche Paarung gerade die gegebene wird. Das ist vielmehr dann und nur dann möglich, wenn der erwähnte Verband $\mathfrak{M}$ ein Somenring ist, dessen komplementäre Elemente die involutorische Selbstabbildung von $\mathfrak{M}$ erzeugen. Diese Erkenntnis bildet eins der Hauptresultate der vorliegenden Arbeit.

3. Wir betrachten jetzt eine Paarung von $\mathfrak{m}$, für welche $\mathfrak{M}$ ein Somenring ist. Es gibt dann mindestens eine, in der Regel aber unendlich viele teilweise Ordnungen von $\mathfrak{m}$, deren relativ prime Elemente die gegebene Paarung erzeugen. Unter diesen gibt es eine ausgezeichnete, welche aus jeder der übrigen durch Adjunktion von gewissen „Bindungen" $a \subseteq b$ entsteht und aus der gegebenen Paarung sehr leicht konstruiert werden kann.

4. Im zweiten Teil der Arbeit fassen wir die Elemente $a, b, \ldots$ einer Menge $\mathfrak{m}$ zu Klassen $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$ zusammen, welche ihrerseits als Elemente einer Menge $\overline{\mathfrak{m}}$ aufgefaßt werden. Ist die Menge $\mathfrak{m}$ gepaart, so ist es unter Umständen möglich, die Klassen $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$ so zu wählen, daß die normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ sämtlich Klassenmengen sind. Dann ist $\overline{\mathfrak{m}}$ ebenso wie $\mathfrak{m}$ gepaart, und der Verband $\mathfrak{M}$ der normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ ist dem Verbande $\overline{\mathfrak{M}}$ der normalen Teilmengen von $\overline{\mathfrak{m}}$ isomorph.

In vielen Fällen kann man den Prozeß der Bildung von Klassen, welche die erwähnte Eigenschaft besitzen, iterieren, indem man von der neuen gepaarten Menge $\overline{\mathfrak{m}}$ ausgeht. Es gibt aber immer schon beim ersten Schritt eine eindeutig bestimmte Wahl der Klassen $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$, so daß der obige Prozeß nicht mehr wiederholt werden kann. Ist dies der Fall, so soll die Paarung von $\overline{\mathfrak{m}}$ eine reduzierte Paarung genannt werden. Man erhält immer dieselbe reduzierte Paarung derselben Menge $\overline{\mathfrak{m}}$, auch wenn man den Prozeß, der zu $\overline{\mathfrak{m}}$ führt, in mehreren Schritten vollzieht.

Wir nehmen nun an, daß die beiden isomorphen Verbände $\mathfrak{M}$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ Somenringe sind. Dann kann man die Paarung von $\mathfrak{m}$, durch welche $\mathfrak{M}$ erzeugt wird, mit Hilfe der relativ primen Elemente von geeigneten teilweisen Ordnungen von $\mathfrak{m}$ herstellen, und dasselbe gilt auch von $\overline{\mathfrak{m}}$. Dann wird mit Hilfe der Homomorphie, welche $\mathfrak{m}$ in $\overline{\mathfrak{m}}$ transformiert, auch die Menge der teilweisen Ordnungen von $\mathfrak{m}$, die soeben erwähnt wurden, auf die Menge der analogen teilweisen Ordnungen von $\overline{\mathfrak{m}}$ ebenfalls homomorph abgebildet, und durch diese Tatsache, verbunden mit dem im § 3 angegebenen Resultat, entstehen Zusammenhänge, welche der Leser am Ende dieser Arbeit zusammengestellt findet.

5. Gepaarte Mengen. In einer gepaarten Menge $\mathfrak{m}$ werden wir die Tatsache, daß die Elemente a und b konjugiert sind, durch das Symbol

$$a \circ b$$

ausdrücken, für welches selbstverständlich gilt:

(5. 1) Aus $a \circ b$ folgt $b \circ a$.

Wir werden zulassen, daß gewisse Elemente von $\mathfrak{m}$ zu sich selbst konjugiert sind; insbesondere soll mindestens ein Element o zu *allen* Elementen von $\mathfrak{m}$ (also auch zu sich selbst) konjugiert sein. Ein solches Element o kann immer der Menge $\mathfrak{m}$ hinzugefügt werden, falls es nicht von vornherein vorhanden sein sollte.

Die Teilmengen von $\mathfrak{m}$ werden wir mit kleinen Frakturbuchstaben $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{x}, \ldots$ bezeichnen. Speziell soll die Gesamtheit der Elemente von $\mathfrak{m}$, welche einem gegebenen Element x konjugiert wird, durch das Symbol

$$\mathfrak{c}(x)$$

dargestellt werden, welches wir die *charakteristische Funktion* der Paarung nennen wollen. Die Symmetrieeigenschaft (5. 1) kann jetzt geschrieben werden:

(5. 2) Aus $y \in \mathfrak{c}(x)$ folgt $x \in \mathfrak{c}(y)$.

Ist dann $\mathfrak{a}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathfrak{m}$, so führen wir die Bezeichnung ein

(5. 3) $$\mathfrak{c}(\mathfrak{a}) = \prod_{x \in \mathfrak{a}} \mathfrak{c}(x),$$

d. h. $\mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ soll der Durchschnitt aller Mengen $\mathfrak{c}(x)$ sein, wenn x die Menge $\mathfrak{a}$ durchläuft. Jede der Mengen $\mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ enthält mindestens ein Element, nämlich das Element o; außerdem gilt die Behauptung:

(5. 4) Aus $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ folgt $\mathfrak{c}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{c}(\mathfrak{b})$.

6. Setzt man

(6. 1) $$\mathfrak{c}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{n},$$

so besteht $\mathfrak{n}$ aus allen Elementen, welche — ebenso wie o — zu allen Elementen von $\mathfrak{m}$ konjugiert sind. Nach (5. 3) hat man dann

(6. 2) $$\mathfrak{c}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m};$$

außerdem folgt aus $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$ und (5. 4)

(6. 3) $$\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{c}(\mathfrak{a}).$$

Wir setzen jetzt

(6. 4) $$\mathfrak{a}' = \mathfrak{c}(\mathfrak{a}), \quad \mathfrak{a}'' = \mathfrak{c}(\mathfrak{a}') = \mathfrak{c}^2(\mathfrak{a}).$$

Ist dann x ein Element von $\mathfrak{a}$ und y ein Element von $\mathfrak{a}'$, so hat man nach (5. 3)

$$y \in \mathfrak{c}(x).$$

Wegen (5. 2) muß also

$$x \in \mathfrak{c}(y)$$

für alle Elemente y von $\mathfrak{a}'$ und für alle Elemente x von $\mathfrak{a}$ gelten, und daraus folgt

(6. 5) $$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{c}(\mathfrak{a}') = \mathfrak{a}''.$$

7. Verbände. Eine Menge $\mathfrak{M}_0$ von Elementen $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$ heißt ein vollständiger Verband, wenn

1. $\mathfrak{M}_0$ teilweise geordnet ist, doch so, daß

(7. 1) aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ folgt $A = B$.

2. jeder beliebigen Teilmenge $\{A_j\}$ von Elementen A_j aus $\mathfrak{M}_0$ zwei Elemente

(7. 2) $$D = \Pi A_j, \quad V = \Sigma \dot{+} A_j$$

zugeordnet werden können, von denen D das größte unter allen Elementen $E \subseteq A_j$ und V das kleinste unter allen Elementen $F \supseteq A_j$ bedeutet[1]).

[1]) Vgl. Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften Bd. I, Algebra (2. Aufl.), I. Teil, 13, Theorie der Verbände von H. Hermes und G. Köthe. S. 4.

Das Element D heißt der *Durchschnitt*, das Element V die Vereinigung aller Elemente A_j aus $\{A_j\}$. Insbesondere muß also jeder vollständige Verband notwendig ein größtes Element M und ein kleinstes Element O besitzen.

Selbstverständlich bilden die Teilmengen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... einer gegebenen Menge $\mathfrak{m}$ immer einen vollständigen Verband $\mathfrak{M}_0$. Im folgenden werden wir das Wort „vollständig" weglassen, weil nur von vollständigen Verbänden die Rede sein wird und keine Verwechselung zu befürchten ist.

8. Wir wollen nun Abbildungsfunktionen

$$X' = F(X) \tag{8.1}$$

betrachten, durch welche jedem Element X eines Verbandes $\mathfrak{M}_0$ ein Element X' desselben Verbandes zugeordnet wird. Diese Abbildungsfunktionen sollen ähnliche Eigenschaften besitzen, wie die charakteristische Funktion $\mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ der Paarung einer Menge. Wir fordern also, daß mit der Bezeichnung

$$X'' = F(X') = F^2(X) \tag{8.2}$$

die Relationen

$$\text{aus } X \subseteq Y \quad \text{folgt} \quad Y' \subseteq X', \tag{8.3}$$

$$X \subseteq X'' \tag{8.4}$$

immer erfüllt sein sollen, welche den Aussagen (5.4) und (6.5) nachgebildet sind.

Wendet man die Relation (8.4) auf

$$X''' = F(X'') = F^2(X')$$

an, so erhält man

$$X' \subseteq X'''.$$

Setzt man aber in (8.3) für Y das Element X'' ein, so findet man

$$X''' \subseteq X'$$

und es ist daher ganz allgemein

$$X' = X'''. \tag{8.5}$$

9. Die Elemente von $\mathfrak{M}_0$, für welche — ebenso, wie für X' — die Gleichung

$$X = F^2(X) = X'' \tag{9.1}$$

besteht, sollen die *normalen Elemente* der Abbildung (8.1) genannt werden. Ist X ein normales Element, so gelten gleichzeitig die Beziehungen

$$X' = F(X) \quad X = F(X'). \tag{9.2}$$

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}$ die Gesamtheit der Elemente $X' = F(X)$, welche Bilder von Elementen aus $\mathfrak{M}_0$ sind. Die Gleichung (8.5) besagt dann, daß jedes Element von $\mathfrak{M}$ normal ist, während aus der zweiten Gleichung (9.2) folgt, daß jedes normale Element in $\mathfrak{M}$ enthalten ist.

Die Menge der normalen Elemente ist mit der Bildmenge $\mathfrak{M}$ identisch.

Aus (9. 2) folgt noch, daß die Menge $\mathfrak{M}$ der normalen Elemente auf sich selbst durch eine involutorische Transformation abgebildet wird.

10. Aus den Beziehungen

$$M \subseteq M'' \subseteq M$$

folgt, daß das „Einselement" M des Verbandes $\mathfrak{M}_0$ ein normales Element sein muß. Dagegen braucht das Nullelement O von $\mathfrak{M}_0$ nicht normal zu sein. Setzt man aber

(10. 1) $$N = F(M), \quad M = F(N),$$

so folgt aus $O \subseteq N$ nach (8. 3)

$$M = F(N) \subseteq F(O) \subseteq M,$$

so daß man auch schreiben muß

(10. 2) $$F(O) = M, \quad F^2(O) = N.$$

Ist X ein beliebiges normales Element, so folgt aus $X' \subseteq M$ und aus $X'' = X$

$$N = F(M) \subseteq F(X') = X.$$

Hieraus schließt man, daß N das kleinste und M das größte normale Element sind.

11. Es seien X und Y zwei beliebige Elemente von $\mathfrak{M}_0$, für welche man hat

$$X \subseteq Y;$$

dann folgen nacheinander aus (8. 3)

$$Y' \subseteq X', \quad X'' \subseteq Y''$$

und es gilt daher die Aussage:

(11. 1) Aus $X \subseteq Y$ folgt $X'' \subseteq Y''$.

Ist nun Y ein normales Element, so hat man $Y'' = Y$ und $X'' \subseteq Y$: *Das Element X'' ist also das kleinste normale Element, welches X umfaßt.*

12. Wir setzen für eine beliebige Menge $\{X_j\}$ von normalen Elementen

(12. 1) $$D = \Pi X_j, \quad V = \Sigma \dot{+} X_j.$$

Aus $D \subseteq X_j$ folgt $D'' \subseteq X_j'' = X_j$ und es ist also $D'' \subseteq D$. Andererseits muß nach (8. 4) auch $D \subseteq D''$ sein, so daß der Satz gilt

Satz 1. *Der Durchschnitt von beliebig vielen normalen Elementen ist normal.*

Dagegen braucht die Vereinigung schon von zwei normalen Elementen nicht normal zu sein. Es sei W ein normales Element, welches alle X_j umfaßt. Aus $X_j \subseteq W$ folgt $V \subseteq W$ und daher auch $V'' \subseteq W'' = W$.

Das Element V'' ist also das kleinste normale Element, welches alle X_j umfaßt. Da offenbar D das größte normale Element ist, welches alle X_j teilt, gilt der

Satz 2. *Die Menge $\mathfrak{M}$ der normalen Elemente bildet einen Verband mit dem Einselement M und dem Nullelement N.*

13. Die Vereinigung der Elemente X_j einer Menge $\{X_j\}$ von normalen Elementen ist eine Operation, welche verschiedene Bedeutungen hat, je nachdem man die X_j als Elemente des Verbandes $\mathfrak{M}_0$ oder als Elemente des Verbandes $\mathfrak{M}$ auffaßt. Deshalb ist es zweckmäßig, für die Elemente von $\mathfrak{M}$ neue Bezeichnungen zu wählen. Wir schreiben

$$X_j = \xi_j \tag{13. 1}$$

und erhalten nach den Resultaten des vorigen Paragraphen

$$\xi_j' = X_j', \quad \Pi\,\xi_j = \Pi X_j, \quad \Sigma\dot{+}\xi_j = (\Sigma\dot{+}X_j)'', \tag{13. 2}$$

$$(\Sigma\dot{+}\xi_j)' = (\Sigma\dot{+}X_j)'. \tag{13. 3}$$

Wir führen nun die Bezeichnungen ein:

$$\delta = \Pi\xi_j, \quad \varepsilon = (\Sigma\dot{+}\xi_j')'. \tag{13. 4}$$

Aus $\xi_j' \subseteq \Sigma\dot{+}\xi_j'$ folgt dann, weil die ξ_j normal sind, $\varepsilon \subseteq \xi_j$ und somit auch

$$\varepsilon \subseteq \delta.$$

Aus $\delta \subseteq \xi_j$ erhält man $\xi_j' \subseteq \delta'$ und $\Sigma\dot{+}\xi_j' \subseteq \delta'$ und daraus $\delta \subseteq \varepsilon$. Es gelten daher die Gleichungen

$$\delta = \varepsilon, \quad \delta' = \varepsilon', \tag{13. 5}$$

welche unter sich und mit jeder der beiden folgenden

$$(\Pi\xi_j)' = \Sigma\dot{+}\xi_j', \tag{13. 6}$$

$$(\Sigma\dot{+}\xi_j)' = \Pi\xi_j' \tag{13. 7}$$

äquivalent sind.

Da der Verband $\mathfrak{M}$ das Einselement $M = \mu$ und das Nullelement $N = \mu' = \nu$ besitzt, gelten ferner die Formeln

$$\begin{cases} \mu\dot{+}\xi = \mu, & \mu\xi = \xi, \\ \nu\dot{+}\xi = \xi, & \nu\xi = \nu, \end{cases} \tag{13. 8}$$

und man hat insbesondere

$$\mu\dot{+}\nu = \mu, \quad \mu\,\nu = \nu. \tag{13. 9}$$

14. Die Teilmengen einer Menge bilden selbstverständlich einen Verband. Unsere Resultate können daher auf die Teilmengen $\mathfrak{x}$ einer gepaarten Menge $\mathfrak{m}$ angewandt werden, wenn man an Stelle der Abbildungsfunktion $F(X)$ die charakteristische Funktion $\mathfrak{c}(\mathfrak{x})$ der Paarung wählt. Es wäre aber falsch zu

glauben, daß die Abbildungsfunktionen $F(X)$, welche den Bedingungen (8.3) und (8.4) genügen, wesentlich allgemeiner seien als die charakteristischen Funktionen einer Paarung.

Wenn man nämlich (8.3) und (8.4) benutzt, so folgt aus $Y \subseteq X'$ die Relation $X \subseteq X'' \subseteq Y'$. Wir können also die Menge $\mathfrak{M}_0$ dadurch paaren, daß wir $X \circ Y$ schreiben, falls $Y \subseteq X'$ ist. Die charakteristische Funktion $\mathfrak{c}(X)$ dieser Paarung erhält man dann durch die Aussage

$$Y \in \mathfrak{c}(X), \quad \text{falls } Y \subseteq X'. \tag{14.1}$$

Ist jetzt $\mathfrak{a}$ irgendeine Menge $\{X_j\}$ von Elementen X_j, so muß man nach (5.3) setzen

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{a}) = \prod_{X_j \in \mathfrak{a}} \mathfrak{c}(X_j). \tag{14.2}$$

Wir schreiben nun

$$V = \dot{\sum} X_j. \tag{14.3}$$

Nach (14.2) folgt dann aus $Y \in \mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ die Relation $Y \in \mathfrak{c}(X_j)$ oder $Y \subseteq X_j'$. Dann ist aber auch $X_j \subseteq Y'$ und somit auch $V \subseteq Y'$ oder $Y \subseteq V'$. Aus $Y \in \mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ folgt also $Y \in \mathfrak{c}(V)$. Umgekehrt sei $Y \in \mathfrak{c}(V)$ oder $Y \subseteq V'$. Da aus $X_j \subseteq V$ folgt $V' \subseteq X_j'$, ist also auch $Y \subseteq X_j'$ oder $Y \in \mathfrak{c}(X_j)$. Letzteres gilt für alle X_j und man hat schließlich $Y \in \mathfrak{c}(\mathfrak{a})$. Es gilt somit die Gleichung

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{c}(V),$$

und wir finden insbesondere, daß alle normalen Teilmengen $\mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{M}_0$ in der Gestalt $\mathfrak{c}(X)$ geschrieben werden können; wegen (14.1) sind die beiden Funktionen $\mathfrak{c}(X)$ und $F(X)$ aufs engste verwandt.

15. Somenringe. Ein Ring $\mathfrak{R}$ von Elementen A, B, ... mit der Summenoperation $A \dot{+} B$, der Produktoperation AB und dem Nullelement O heißt eine *Boolesche Algebra*, wenn die Gleichung

$$XX = X, \tag{15.1}$$

welche die andere

$$X \dot{+} X = O \tag{15.2}$$

nach sich zieht, allgemein gilt. Eine Boolesche Algebra ist notwendig immer ein kommutativer Ring.

Durch die Gleichung

$$A \dot{+} B = A \dot{+} B \dot{+} AB \tag{15.3}$$

wird die „Vereinigung" $A \dot{+} B$ der Elemente A und B definiert; diese Operation ist kommutativ, assoziativ und distributiv.

Der Boolesche Ring $\mathfrak{R}$ wird dadurch teilweise geordnet, daß man

$$A \subseteq B \tag{15.4}$$

schreibt, wenn mindestens eine der beiden Gleichungen

(15. 5) $$AB = A, \quad A \dot{+} B = B$$

(und dann notwendig auch die andere) erfüllt ist.

Eine Boolesche Algebra, bei welcher die Operation

$$\Sigma \dot{+} A_j$$

und dann auch die Operation

$$\Pi A_j$$

auch für unendlich viele Elemente erklärt ist, heißt ein Somenring.

16. Man beweist, daß ein Verband $\mathfrak{M}$ mit den Elementen $\alpha, \beta, \ldots$, von denen μ das größte und ν das kleinste ist, dann und nur dann ein Somenring ist, wenn erstens zwischen den Operationen $\alpha \dot{+} \beta$ und $\alpha\beta$ das distributive Gesetz

(16. 1) $$\gamma(\alpha \dot{+} \beta) = \gamma\alpha \dot{+} \gamma\beta$$

gilt, und wenn zweitens jedem Element α von $\mathfrak{M}$ mindestens ein komplementäres Element α' zugeordnet werden kann, für welches die Gleichungen

(16. 2) $$\alpha \dot{+} \alpha' = \mu, \quad \alpha\alpha' = \nu$$

bestehen.

Wir aber werden ein ganz anders geartetes Kriterium für dieselbe Tatsache zu benutzen haben. Unter der Voraussetzung, daß ein Verband $\mathfrak{M}$ ein Somenring ist, wird das zu α komplementäre Element α' nämlich durch die Gleichung

(16. 3) $$\alpha' = \mu \dot{+} \alpha$$

definiert. Aus der Gleichung

$$\alpha'' = \mu \dot{+} \alpha' = \mu \dot{+} \mu \dot{+} \alpha = \alpha$$

folgt, daß der Übergang von α zu seinem Komplement α' eine involutorische Selbstabbildung von $\mathfrak{M}$ darstellt.

Ferner entnimmt man aus der Gleichung

$$\alpha\beta' = \alpha(\mu \dot{+} \beta) = \alpha \dot{+} \alpha\beta,$$

daß jede der Gleichungen $\alpha\beta = \nu$, $\alpha\beta' = \alpha$ aus der anderen folgt. Da aus $\alpha\beta = \nu$ auch $\beta\alpha' = \beta$ folgt, sehen wir schließlich, daß sogar aus jeder der Gleichungen $\alpha\beta = \nu$, $\alpha\beta' = \alpha$, $\beta\alpha' = \beta$ die beiden anderen folgen.

17. Die zuletzt abgeleiteten Eigenschaften eines Somenringes, der zugleich ein Verband ist, sollen nun umgekehrt werden, indem wir beweisen:

Satz 3. *Es gibt höchstens eine involutorische Selbstabbildung*

(17. 1) $$\xi' = F(\xi), \quad \xi = F(\xi')$$

eines Verbandes $\mathfrak{M}$ mit dem Nullelement ν, für welche die Aussage besteht:

(17. 2) Aus jeder der Gleichungen $\xi\eta = \nu$, $\xi\eta' = \xi$, $\eta\xi' = \eta$ folgen jeweils die beiden anderen.

Und zwar ist eine derartige Abbildung dann und nur dann möglich, wenn der Verband $\mathfrak{M}$ ein Somenring ist. Die Abbildung (17. 1) *stellt dann den Übergang von einem Soma zu seinem Komplement dar.*

Der vorige Paragraph enthält schon den Beweis der einen Hälfte unseres Satzes. Wir brauchen also nur noch zu zeigen, daß ein Verband $\mathfrak{M}$, für welchen (17. 1) und (17. 2) bestehen, ein Somenring ist.

Wir setzen zuerst $\eta = \xi'$; dann ist

$$\eta\xi' = \xi'\xi' = \xi' = \eta$$

und folglich hat man wegen (17. 2) ganz allgemein

(17. 3) $$\xi\xi' = \nu.$$

Wird nun durch die Gleichungen

(17. 4) $$\bar{\xi} = G(\xi), \quad \xi = G(\bar{\xi})$$

eine zweite involutorische Selbstabbildung von $\mathfrak{M}$ bezeichnet, für welche aus jeder der Gleichungen

(17. 5) $$\xi\eta = \nu, \quad \xi\bar{\eta} = \xi, \quad \eta\bar{\xi} = \eta$$

die beiden anderen folgen, so hat man ebenfalls

(17. 6) $$\xi\bar{\xi} = \nu.$$

Nun folgt erstens aus (17. 6) und (17. 2) die Relation $\xi'\bar{\xi} = \bar{\xi}$ und zweitens aus (17. 3) und (17. 5) die Relation $\xi'\bar{\xi} = \xi'$. Es muß also

$$\xi' = \bar{\xi}$$

sein, womit die Eindeutigkeit der Selbstabbildung (17. 1) bewiesen ist.

18. Ersetzt man in (17. 2) das Element η durch ζ', so kann diese Aussage durch folgende ihr äquivalente ersetzt werden:

(18. 1) Aus jeder der Relationen $\xi \subseteq \zeta$, $\zeta' \subseteq \xi'$, $\xi\zeta' = \nu$ folgen die beiden anderen.

Insbesondere sehen wir hieraus, daß die Selbstabbildung (17. 1) den Bedingungen genügt, durch welche wir die normalen Elemente eines Verbandes definiert haben, und daraus folgt, daß auch hier die Gleichungen (13. 6) bis (13. 8) gelten müssen.

Aus $\xi = \alpha\beta$ folgt also $\xi' = (\alpha' \dot{+} \beta')$ und nach (17. 3)

(18. 2) $$\alpha\beta(\alpha' \dot{+} \beta') = \nu.$$

Wegen (18. 1) ist also

(18. 3) $$\alpha(\alpha' \dot{+} \beta') \subseteq \beta'.$$

Ebenso gilt für ein drittes Element γ die Relation

(18. 4) $$\alpha(\alpha' \dot{+} \gamma') \subseteq \gamma'.$$

Durch Vergleichung von (18. 3) mit (18. 4) erhält man jetzt

$$\alpha(\alpha' \dot{+} \beta')(\alpha' \dot{+} \gamma') \subseteq \beta'\gamma',$$

und durch eine neue Anwendung von (18. 1)

$$\alpha(\beta \dot{+} \gamma)(\alpha' \dot{+} \beta')(\alpha' \dot{+} \gamma') = \nu. \tag{18. 5}$$

Nun ist aber

$$(\alpha\beta + \alpha\gamma)' = (\alpha' \dot{+} \beta')(\alpha' \dot{+} \gamma'),$$

so daß man aus (18. 5) erhält.

$$\alpha(\beta \dot{+} \gamma) \subseteq \alpha\beta \dot{+} \alpha\gamma. \tag{18. 6}$$

Andererseits gelten die Beziehungen

$$\alpha\beta \subseteq \alpha(\beta \dot{+} \gamma), \quad \alpha\gamma \subseteq \alpha(\beta \dot{+} \gamma),$$

aus denen man schließt

$$\alpha\beta \dot{+} \alpha\gamma \subseteq \alpha(\beta \dot{+} \gamma), \tag{18. 7}$$

und die Vergleichung von (18. 6) und (18. 7) zeigt, daß das distributive Gesetz

$$\alpha(\beta \dot{+} \gamma) = \alpha\beta \dot{+} \alpha\gamma \tag{18. 8}$$

für unseren Verband $\mathfrak{M}$ allgemein besteht.

19. Um jetzt zu zeigen, daß $\mathfrak{M}$ ein Somenring ist, definieren wir eine neue Operation $\alpha \dot{-} \beta$ durch die Gleichung

$$\alpha \dot{-} \beta = \alpha\beta' \dot{+} \beta\alpha' \tag{19. 1}$$

und bemerken, daß die Beziehungen gelten

$$\alpha \dot{-} \beta = \beta \dot{-} \alpha, \tag{19. 2}$$

$$\alpha \dot{-} \nu = \alpha\mu \dot{+} \nu\alpha' = \alpha, \tag{19. 3}$$

$$\alpha \dot{-} \mu = \alpha\nu \dot{+} \mu\alpha' = \alpha'. \tag{19. 4}$$

Mit Hilfe der Formeln des § 13 erhält man aus (19. 1)

$$(\alpha \dot{-} \beta)' = (\alpha' \dot{+} \beta)(\beta' \dot{+} \alpha)$$

und hieraus mit Benutzung von (18. 8) und (17. 3)

$$(\alpha \dot{-} \beta)' = \alpha\beta \dot{+} \alpha'\beta'. \tag{19. 5}$$

Man hat also

$$\begin{aligned} \alpha \dot{-} (\beta \dot{-} \gamma) &= \alpha(\beta \dot{-} \gamma)' \dot{+} \alpha'(\beta \dot{-} \gamma) \\ &= \alpha(\beta\gamma \dot{+} \beta'\gamma') \dot{+} \alpha'(\beta\gamma' \dot{+} \beta'\gamma) \\ &= \alpha\beta\gamma \dot{+} \alpha\beta'\gamma' \dot{+} \alpha'\beta\gamma' \dot{+} \alpha'\beta'\gamma, \end{aligned}$$

und da der letzte Ausdruck auf der rechten Seite symmetrisch in α, β und γ ist, schließt man daraus

$$\alpha \dot{-} (\beta \dot{-} \gamma) = (\alpha \dot{-} \beta) \dot{-} \gamma. \tag{19. 6}$$

Ganz ähnlich beweist man das distributive Gesetz für $\alpha \dot{+} \beta$ mit Hilfe der Rechnung

(19. 7)
$$\begin{aligned} \alpha\gamma \dot{+} \beta\gamma &= \alpha\gamma\,(\beta\gamma)' \dot{+} \beta\gamma\,(\alpha\gamma)' \\ &= \alpha\gamma\,(\beta' \dot{+} \gamma') \dot{+} \beta\gamma\,(\alpha' \dot{+} \gamma') \\ &= \gamma\,(\alpha\beta' \dot{+} \beta\alpha') \\ &= \gamma\,(\alpha \dot{+} \beta). \end{aligned}$$

Endlich bestehen auch die Gleichungen

(19. 8)
$$\alpha \dot{+} \alpha = \alpha\alpha' \dot{+} \alpha'\alpha = \nu,$$

(19. 9)
$$\alpha \dot{+} \beta \dot{+} \alpha\beta = \alpha \dot{+} \beta,$$

mit deren Hilfe der Beweis des Satzes 3 zu Ende geführt wird.

Als Korollar dieses Satzes erhält man sofort auch den

Satz 4. *Der im* § 12 *definierte involutorische Verband* $\mathfrak{M}$ *der normalen Elemente von* $\mathfrak{M}_0$ *ist dann und nur dann ein Somenring, bei welchem die konjugierten Elemente des Verbandes komplementäre Somen sind, wenn die Aussage besteht*:

(19. 10) Aus $\xi\eta = \nu$ folgt $\xi \subseteq \eta'$ und umgekehrt.

20. Teilweise geordnete Mengen. Ehe wir eine merkwürdige Anwendung der bisherigen Resultate besprechen, müssen wir die teilweise geordneten Mengen näher betrachten.

Eine gepaarte Menge heißt teilweise geordnet, wenn erstens zwischen je zwei konjugierten Elementen a, b von $\mathfrak{m}$ mindestens eine der beiden Reihenfolgen dieser Elemente ausgezeichnet ist, oder was in anderer Bezeichnung auf dasselbe hinauskommt, wenn mindestens eine der „Bindungen"

(20. 1)
$$a \subseteq b, \quad b \subseteq a$$

vorhanden ist, und wenn zweitens noch folgende Aussagen erfüllt sind:

(20. 2) Für alle Elemente x von $\mathfrak{m}$ ist $x \subseteq x$,

(20. 3) aus $x \subseteq y$ und $y \subseteq z$ folgt $x \subseteq z$.

Manche Autoren fügen dieser Definition noch eine der Forderung (7. 1) für Verbände analoge Forderung hinzu. Wir wollen aber hier ausdrücklich zulassen, daß die beiden Bindungen (20. 1) auch zwischen *verschiedenen* Elementen a, b gleichzeitig vorhanden sein dürfen und dann sagen, daß zwischen a und b eine *Doppelbindung* existiert.

Beliebige Mengen von Bindungen werden im folgenden durch große, fette lateinische Buchstaben A, B, ... bezeichnet, so daß wir jede gegebene teilweise Ordnung der Menge $\mathfrak{m}$ auch durch das Symbol $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ beschreiben werden.

21. Wir bezeichnen mit A die (transitive) Menge von Bindungen, welche eine teilweise Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ bestimmen, und mit B irgendeine weitere Menge von Bindungen. Gibt es eine kleinste transitive Menge von Bindungen $\mathsf{C} \supseteq \mathsf{A} \dotplus \mathsf{B}$, so wollen wir sagen, daß die teilweise Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{C})$ aus $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ durch *Adjunktion* der Bindungen B entstanden ist.

Es sei $\{\mathsf{B}_i\}$ eine (nicht notwendig abzählbare) Menge von Bindungsmengen B_i, welche man einzeln zu A adjungieren kann. Ist dann immer mit irgend zwei Mengen B_j und B_k eine dritte Menge B_m in $\{\mathsf{B}_i\}$ vorhanden, welche alle Bindungen von B_j und alle Bindungen von B_k enthält, so kann man auch die Vereinigung $\mathsf{B} = \Sigma \dotplus \mathsf{B}_i$ zu A adjungieren. Bezeichnet man nämlich mit C_i das Resultat der Adjunktion von B_i zu A und setzt $\mathsf{C} = \Sigma \dotplus \mathsf{C}_i$, so ist C die kleinste transitive Menge von Bindungen, welche alle Bindungen von A und alle Bindungen von B enthält.

Andererseits kann man immer jede einzelne Bindung

$$a \subseteq b \tag{21. 1}$$

zu A adjungieren. Die kleinste transitive Menge C von Bindungen, welche außer den Bindungen A auch die Bindung (21. 1) enthält, erhält man, indem man zu A noch alle Bindungen

$$x \subseteq y$$

hinzufügt, für welche die Bindungen $x \subseteq a$ und $b \subseteq y$ in A enthalten sind.

22. Man kann jetzt zeigen, daß man jede beliebige Menge B von Bindungen zu A adjungieren kann. Es sei nämlich B wohlgeordnet. Jedem Element ξ von B ordnen wir diejenige Teilmenge B_ξ von B zu, welche aus allen Elementen von B besteht, die bei der Wohlordnung dem Elemente ξ vorangehen. Wir zeigen erstens, daß man jede der Teilmengen B_ξ zu A adjungieren kann. Ist dies nämlich nicht der Fall, so gibt es eine erste Teilmenge B_{ξ_0}, welche man nicht zu A adjungieren kann. Hierbei kann ξ_0 nicht das erste Element von B sein, und es gibt Elemente η von B, welche dem Elemente ξ_0 vorangehen. Jedes B_η kann man nach Voraussetzung zu A adjungieren und nach dem letzten Paragraphen kann man auch die Vereinigung aller B_η zu A adjungieren. Nun ist aber diese Vereinigung (höchstens mit Ausnahme des letzten Elementes von B_{ξ_0}, falls es ein solches gibt) mit B_{ξ_0} identisch. Wir schließen daraus, daß wir entgegen unserer Voraussetzung auch B_{ξ_0} zu A adjungieren können, und dies sowohl, wenn B_{ξ_0} kein letztes Element besitzt, als auch in dem Fall, daß ein letztes Element von B_{ξ_0} vorhanden ist.

Benutzt man jetzt, daß alle B_ξ zu A adjungiert werden können, so erhält man durch dieselbe Schlußweise das Resultat, daß auch B selbst zu A adjungiert werden kann.

23. Die Paarungen von relativ primen Elementen teilweise geordneter Mengen. Wir werden im folgenden nur solche teilweise geordneten Mengen $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ betrachten, welche mindestens ein kleinstes Element o enthalten. Dann müssen für alle Elemente x aus $\mathfrak{m}$ die Bindungen $o \subseteq x$ in A enthalten sein. Wir bezeichnen ferner mit $\mathfrak{n}$ die Gesamtheit der Elemente y, für welche $y \subseteq o$ in A enthalten ist.

Sind jetzt a und b beliebige Elemente von $\mathfrak{m}$, so ist jedes Element y von $\mathfrak{n}$ ein gemeinsamer Teil von a und b. Sind umgekehrt alle gemeinsamen Teile von a und b in $\mathfrak{n}$ enthalten, so sollen a und b *relativ prim zueinander* genannt werden.

Durch die Bestimmung ihrer relativ primen Elemente wird nun die Menge $\mathfrak{m}$ *gepaart*, wobei insbesondere die Elemente aus $\mathfrak{n}$ die einzigen sind, welche zu allen Elementen aus $\mathfrak{m}$ konjugiert sind. Bei dieser Paarung hat also die Menge $\mathfrak{n}$ dieselbe Bedeutung wie zuvor.

Für die relativ primen Elementenpaare einer teilweise geordneten Menge bestehen nun folgende Aussagen:

(23. 1) Aus $x \circ x$ folgt $x \in \mathfrak{n}$,

(23. 2) aus $y \subseteq x$ und $x \circ a$ folgt $y \circ a$,

durch welche die charakteristische Funktion $\mathfrak{c}(\mathfrak{x})$ der Paarung spezialisiert wird. Da nämlich die Relation $x \in \mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ bedeutet, daß alle Elemente z von $\mathfrak{a}$ zu x konjugiert sind, so folgt aus (23. 2):

(23. 3) Aus $y \subseteq x$ und $x \in \mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ folgt $y \in \mathfrak{c}(\mathfrak{a})$.

Die normalen Teilmengen $\mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{m}$ sind also *vollständig*[2]).

Es seien jetzt $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ normale Teilmengen von $\mathfrak{m}$, und x sei ein Element von $\mathfrak{a}$, welches nicht zu allen Elementen von $\mathfrak{b}$ relativ prim ist. Dann gibt es nach Voraussetzung mindestens ein Element x_1 von $\mathfrak{b}$, welches mit x einen gemeinsamen Teil y besitzt, der nicht in $\mathfrak{n}$ enthalten ist. Da nun $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ vollständige Teilmengen von $\mathfrak{m}$ sind, muß y sowohl in $\mathfrak{a}$, als auch in $\mathfrak{b}$, also auch in $\mathfrak{ab}$ enthalten sein.

Ist also $\mathfrak{ab} = \mathfrak{n}$, so muß jedes Element x von $\mathfrak{a}$ zu allen Elementen von $\mathfrak{b}$ relativ prim sein, d. h. man hat $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{c}(\mathfrak{b})$. Ist umgekehrt $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{c}(\mathfrak{b})$, so muß jedes Element x von $\mathfrak{ab}$ sowohl in $\mathfrak{b}$ als auch in $\mathfrak{c}(\mathfrak{b})$ enthalten sein, so daß man $x \circ x$ hat. Nach (23. 1) ist also $x \in \mathfrak{n}$ und folglich muß $\mathfrak{ab} = \mathfrak{n}$ sein.

Das Kriterium des Satzes 4 des § 19 ist also hier erfüllt, und der Verband $\mathfrak{M}$, welcher von den normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ gebildet ist, muß deshalb ein Somenring sein.

---

[2]) Eine Teilmenge $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{m}$ heißt bekanntlich vollständig, wenn mit $x \in \mathfrak{x}$ und $y \subseteq x$ immer auch $y \in \mathfrak{x}$ ist.

24. Ehe wir die Umkehrung des letzten Resultates aufstellen, beweisen wir noch den

Satz 5. *Bei einer gepaarten Menge* $\mathfrak{m}$ *besteht dann und nur dann für die normalen Teilmengen* $\alpha, \beta, \ldots$ *von* $\mathfrak{m}$ *die Aussage:*

(24. 1) Aus $\alpha\beta = \mathfrak{n}$ folgt jeweils $\alpha \subseteq \mathfrak{c}(\beta)$ und umgekehrt,

wenn für die Elemente $a, b, \ldots$ *von* $\mathfrak{m}$ *die Aussage besteht:*

(24. 2) Aus $\mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b) = \mathfrak{n}$ folgt jeweils $a \circ b$ und umgekehrt.

Wir nehmen erstens an, (24. 1) sei erfüllt. Aus $\mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b) = \mathfrak{n}$ folgt dann

$$\mathfrak{c}^2(a) \subseteq \mathfrak{c}^3(b) = \mathfrak{c}(b),$$

und da $a \in \mathfrak{c}^2(a)$ ist, muß $a \in \mathfrak{c}(b)$ oder $a \circ b$ sein. Umgekehrt folgen aus $a \circ b$ nacheinander

$$a \in \mathfrak{c}(b), \quad \mathfrak{c}^2(a) \subseteq \mathfrak{c}^3(b)$$

und mit Benutzung von (24. 1)

$$\mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b) = \mathfrak{n}.$$

Also ist (24. 2) eine Folge von (24. 1).

Zweitens nehmen wir an, daß (24. 2) gelten soll und daß α, β normale Teilmengen von $\mathfrak{m}$ sind, für welche $\alpha\beta = \mathfrak{n}$ ist. Es sei x ein Element von α und y ein Element von β. Aus

$$\mathfrak{c}^2(x) \subseteq \alpha, \quad \mathfrak{c}^2(y) \subseteq \beta, \quad \alpha\beta = \mathfrak{n}$$

folgt $\mathfrak{c}^2(x)\,\mathfrak{c}^2(y) = \mathfrak{n}$ und nach (24. 2)

$$x \circ y.$$

Daher hat man $x \in \mathfrak{c}(y)$ für alle $y \in \beta$; aus

$$\mathfrak{c}(\beta) = \prod_{y \in \beta} \mathfrak{c}(y)$$

folgt dann $x \in \mathfrak{c}(\beta)$ für alle $x \in \alpha$ und schließlich

$$\alpha \subseteq \mathfrak{c}(\beta).$$

Umgekehrt sei $\alpha \subseteq \mathfrak{c}(\beta)$ und x sei ein Element von $\alpha\beta$. Man hat dann

$$x \in \beta, \quad x \in \alpha \subseteq \mathfrak{c}(\beta) \subseteq \mathfrak{c}(x)$$

und daraus folgt $x \circ x$. Nach (24. 2) muß dann $\mathfrak{c}^2(x) = \mathfrak{n}$ und $x \in \mathfrak{n}$ sein. Es folgt schließlich $\alpha\beta = \mathfrak{n}$ und hiermit ist gezeigt, daß auch (24. 1) eine Folge von (24. 2) ist. Der behauptete Satz ist deshalb richtig.

25. Wir nehmen jetzt an, wir hätten eine Paarung der Menge $\mathfrak{m}$ gefunden, für welche die eine und dann auch die andere der äquivalenten Forderungen (24. 1) und (24. 2) gilt.

Die Menge $\mathfrak{m}$ wird teilweise geordnet, wenn wir Bindungen nach folgender Regel einführen:

(25. 1) Es soll $a \subseteq b$ dann und nur dann gesetzt werden, wenn $\mathfrak{c}^2(a) \subseteq \mathfrak{c}^2(b)$ ist.

Nach dieser Regel ist ein Element x dann und nur dann gemeinsamer Teil von a und b, wenn

$$\mathfrak{c}^2(x) \subseteq \mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b) \tag{25. 2}$$

ist. Da nun x in $\mathfrak{c}^2(x)$ enthalten ist, muß auch

$$x \in \mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b) \tag{25. 3}$$

sein, und umgekehrt folgt (25. 2) aus (25. 3), weil $\mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b)$ eine normale Teilmenge von $\mathfrak{m}$ ist. Die Menge der gemeinsamen Teile von a und b ist also mit $\mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b)$ identisch, und a, b sind dann und nur dann relativ prim, wenn $\mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b) = \mathfrak{n}$ ist, oder, da (24. 2) gelten muß, wenn $a \circ b$ ist.

Die konjugierten Elemente der gegebenen Paarung sind also gleichzeitig auch die relativ primen Elemente der durch (25. 1) definierten teilweisen Ordnung von $\mathfrak{m}$. Nun muß aber auch (24. 1) gelten, und nach dem Satz 4 des § 19 ist der Verband $\mathfrak{M}$ der normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ ein Somenring. Die übrigen Behauptungen des folgenden Satzes werden ganz ähnlich aus unseren Resultaten abgeleitet.

Satz 6. *Eine Paarung einer Menge $\mathfrak{m}$ sei vorgegeben, für welche mindestens eine der drei folgenden Behauptungen zutrifft:*

a) Die konjugierten Elemente der Paarung können als relativ prime Elemente einer geeigneten teilweisen Ordnung von $\mathfrak{m}$ gedeutet werden.

b) Der Verband $\mathfrak{M}$ der normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ bildet einen Somenring.

c) Aus $a \circ b$ folgt $\mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b) = \mathfrak{n}$ und umgekehrt.

Dann bestehen gleichzeitig alle drei Behauptungen.

26. Nach dem letzten Satz erzeugen die relativ primen Elemente einer beliebigen teilweisen Ordnung $\mathfrak{m}$ (A) von $\mathfrak{m}$ eine Paarung dieser Menge, für welche die Aussagen (24. 1) und (24. 2) bestehen. Geht man nun von dieser Paarung aus, und führt man die Bindungen (25. 1) ein, so erhält man eine neue teilweise Ordnung $\mathfrak{m}$ (A^*) von $\mathfrak{m}$, für welche die relativ primen Elemente dieselben sind wie für $\mathfrak{m}$ (A).

Ist nun $a \subseteq b$ eine Bindung von A, so ist jedes Element x, welches bei der teilweisen Ordnung $\mathfrak{m}$ (A) relativ prim zu b ist, auch relativ prim zu a, und diese Tatsache wird durch die Relation $\mathfrak{c}(b) \subseteq \mathfrak{c}(a)$ und daher auch durch die Relation

$$\mathfrak{c}^2(a) \subseteq \mathfrak{c}^2(b)$$

ausgedrückt. Also muß nach (25. 1) die Bindung $a \subseteqq b$ in A^* vorkommen und man hat jedenfalls

(26. 1) $$\mathsf{A} \subseteq \mathsf{A}^*.$$

Schon die einfachsten Beispiele lehren, daß unter Umständen nicht alle Bindungen von A^* in A enthalten zu sein brauchen, und daß folglich verschiedene teilweise Ordnungen von $\mathfrak{m}$ zu derselben Paarung der relativ primen Elemente führen können.

Wird nun durch Adjunktion einer beliebigen Menge B von Bindungen die teilweise Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ in eine teilweise Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A}_1)$ übergeführt, so kann zweierlei vorkommen. Erstens kann die kleinste normale Menge $\mathfrak{n}$ in eine Menge $\mathfrak{n}_1$ übergehen, welche *mehr* Elemente als $\mathfrak{n}$ besitzt. Ist aber zweitens $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}$, so müssen je zwei Elemente x, y, welche relativ prim für die Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A}_1)$ sind, ebenfalls zueinander relativ prim für die Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ sein und die Menge der zueinander relativ primen Elementenpaare wird beim Übergang von $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ zu $\mathfrak{m}(\mathsf{A}_1)$ nicht vermehrt.

Ist also insbesondere

$$\mathsf{A} \subset \mathsf{A}_1 \subset \mathsf{A}^*,$$

so muß $\mathfrak{n} \subseteqq \mathfrak{n}_1 \subseteqq \mathfrak{n}^*$ sein, und wegen $\mathfrak{n}^* = \mathfrak{n}$ ist auch $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}$. Hieraus schließt man, daß die Paarung der relativ primen Elemente für A, A_1 und A^* dieselbe sein muß. Zu den Bindungen der teilweisen Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A}^*)$ kann man dagegen keine einzige neue adjungieren, ohne daß die kleinste normale Menge $\mathfrak{n}$ durch eine umfassendere ersetzt wird, oder, falls $\mathfrak{n}$ unverändert bleibt, ohne daß gewisse Paare von relativ primen Elementen verlorengehen. Unter den teilweisen Ordnungen, deren relativ prime Elemente dieselbe Paarung von $\mathfrak{m}$ erzeugen, gibt es also eine ausgezeichnete, welche dadurch charakterisiert ist, daß sie die umfassendste Menge von Bindungen enthält.

Eine teilweise Ordnung von $\mathfrak{m}$, welche diese letzte Eigenschaft besitzt, soll *gesättigt* genannt werden.

27. Die reduzierten Paarungen einer Menge. Die Elemente $a, b, \ldots, x, \ldots$ einer Menge $\mathfrak{m}$ fassen wir zu Klassen $\bar{a}, \bar{b}, \ldots, \bar{x}, \ldots$ zusammen und erhalten eine Menge $\overline{\mathfrak{m}}$ dieser Klassen, deren Untermengen wir mit $\bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{b}}, \ldots$ bezeichnen. Jede Teilmenge $\bar{\mathfrak{a}}$ von $\overline{\mathfrak{m}}$ kann als eine Teilmenge von $\mathfrak{m}$ aufgefaßt werden. Dafür aber, daß eine Teilmenge $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{m}$ auch als Teilmenge von $\overline{\mathfrak{m}}$ darstellbar sei, muß $\mathfrak{a}$ mit jedem Element einer Klasse auch alle übrigen Elemente derselben Klasse enthalten, d. h. $\mathfrak{a}$ muß eine *Klassenmenge* sein.

Hat man also eine spezielle Menge $\mathfrak{M}$ von Teilmengen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ von $\mathfrak{m}$ irgendwie definiert, so kann man die Frage stellen, ob *überhaupt* die Elemente von $\mathfrak{m}$ so auf Klassen $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$ verteilt werden können, daß jedes der Elemente $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ von $\mathfrak{M}$ eine Klassenmenge wird.

Diese Frage ist sofort zu beantworten, wenn $\mathfrak{M}$ der Verband der normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ bei einer beliebig vorgegebenen Paarung ist. Für zwei Elemente x, y von $\mathfrak{m}$ sei nämlich $\mathfrak{c}(x) \neq \mathfrak{c}(y)$, so daß z. B. ein Element z von $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{c}(x)$, aber nicht in $\mathfrak{c}(y)$ enthalten ist. Aus $z \in \mathfrak{c}(x)$ folgt dann $x \in \mathfrak{c}(z)$; dagegen kann y kein Element von $\mathfrak{c}(z)$ sein, weil dann entgegen der Voraussetzung $z \in \mathfrak{c}(y)$ wäre. Sind dagegen x und y Elemente, für welche $\mathfrak{c}(x) = \mathfrak{c}(y)$ ist, und bedeutet α eine normale Teilmenge von $\mathfrak{m}$, welche x enthält, so hat man

$$\mathfrak{c}(\alpha) \subseteq \mathfrak{c}(x) = \mathfrak{c}(y)$$

und folglich

$$\mathfrak{c}^2(y) \subseteq \mathfrak{c}^2(\alpha) = \alpha.$$

Also muß α auch das Element y enthalten, und es gilt der

Satz 7. *Bei einer Einteilung der Elemente einer gepaarten Menge in Klassen sind dann und nur dann sämtliche normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ auch Klassenmengen, wenn für irgend zwei Repräsentanten x, y einer und derselben Klasse immer $\mathfrak{c}(x) = \mathfrak{c}(y)$ ist.*

Eine solche Einteilung in Klassen ist also nur dann nicht trivial, wenn es überhaupt verschiedene Elemente von $\mathfrak{m}$ gibt, für welche $\mathfrak{c}(x) = \mathfrak{c}(y)$ ist.

28. Es seien x_1, y_1 konjugierte Elemente von $\mathfrak{m}$, so daß man schreiben kann

$$y_1 \in \mathfrak{c}(x_1).$$

Ferner seien x_2, y_2 zwei weitere Elemente von $\mathfrak{m}$, für welche gilt

$$\mathfrak{c}(x_1) = \mathfrak{c}(x_2), \quad \mathfrak{c}(y_1) = \mathfrak{c}(y_2).$$

Dann erhält man nacheinander:

$$y_1 \in \mathfrak{c}(x_2), \quad x_2 \in \mathfrak{c}(y_1) = \mathfrak{c}(y_2).$$

und daher müssen auch die Elemente x_2, y_2 konjugiert sein.

Für zwei Klassen $\bar{x}$, $\bar{y}$ einer Klasseneinteilung von $\mathfrak{m}$, welche der im Satze 7 des vorigen Paragraphen angegebenen Bedingung genügt, gilt also folgendes: entweder ist kein einziger Repräsentant x von $\bar{x}$ konjugiert zu einem Repräsentanten y von $\bar{y}$ oder aber *jeder* Repräsentant von $\bar{x}$ ist zu *jedem* Repräsentanten von $\bar{y}$ konjugiert. Ist letzteres der Fall, so wollen wir schreiben $\bar{x} \circ \bar{y}$ und auf diese Weise wird die Menge $\bar{\mathfrak{m}}$ aller Klassen gepaart.

29. Ist $\mathfrak{a}$ irgendeine Teilmenge von $\mathfrak{m}$, so bezeichne man mit

$$\bar{\mathfrak{a}} = f(\mathfrak{a}) \tag{29. 1}$$

die Menge der Klassen $\bar{x}$, welche mindestens einen in $\mathfrak{a}$ enthaltenen Repräsentanten x besitzen. Mit dieser Bezeichnung erhält man zunächst für die charakteristische Funktion $\bar{\mathfrak{c}}(\bar{x})$ der Paarung von $\bar{\mathfrak{m}}$ die Identität

$$\bar{\mathfrak{c}}(f(x)) = f(\mathfrak{c}(x)). \tag{29. 2}$$

Nun sei $\mathfrak{a}$ irgendeine Teilmenge von $\mathfrak{m}$ und

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{a}) = \prod_{x \in \mathfrak{a}} \mathfrak{c}(x).$$

Da die normalen Teilmengen $\mathfrak{c}(x)$ nach dem Satz 7 lauter Klassenmengen sind, erhält man die Gleichung

$$f(\mathfrak{c}(\mathfrak{a})) = f\Big(\prod_{x \in \mathfrak{a}} \mathfrak{c}(x)\Big) = \prod_{x \in \mathfrak{a}} f(\mathfrak{c}(x)). \tag{29. 3}$$

Mit Benutzung von (29. 2) hat man aber

$$\prod_{x \in \mathfrak{a}} f(\mathfrak{c}(x)) = \prod_{x \in \mathfrak{a}} \bar{\mathfrak{c}}(f(x)) = \prod_{\bar{x} \in \bar{\mathfrak{a}}} \bar{\mathfrak{c}}(\bar{x}) = \bar{\mathfrak{c}}(\bar{\mathfrak{a}}). \tag{29. 4}$$

Die Vergleichung von (29. 3) und (29. 4) liefert jetzt

$$\bar{\mathfrak{c}}(f(\mathfrak{a})) = f(\mathfrak{c}(\mathfrak{a})), \tag{29. 5}$$

und es ist also auch

$$\bar{\mathfrak{c}}^2(\bar{\mathfrak{a}}) = \bar{\mathfrak{c}}\big(f(\mathfrak{c}(\mathfrak{a}))\big) = f(\mathfrak{c}^2(\mathfrak{a})) \tag{29. 6}$$

Ist nun $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}^2(\mathfrak{a})$ eine normale Teilmenge von $\mathfrak{m}$, so hat man folglich

$$\bar{\mathfrak{c}}^2(\bar{\mathfrak{a}}) = f(\mathfrak{a}) = \bar{\mathfrak{a}},$$

d. h. $\bar{\mathfrak{a}}$ ist auch eine normale Teilmenge von $\overline{\mathfrak{m}}$. Ist umgekehrt $\bar{\mathfrak{a}}$ normal, so erhält man zunächst aus (29. 1) und (29. 6)

$$f(\mathfrak{a}) = \bar{\mathfrak{a}} = f(\mathfrak{c}^2(\mathfrak{a})).$$

Nun sei $\mathfrak{b}$ die kleinste Klassenmenge, für welche $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ ist; es ist dann

$$f(\mathfrak{a}) = f(\mathfrak{b}), \quad \mathfrak{c}^2(\mathfrak{a}) = \mathfrak{c}^2(\mathfrak{b})$$

und daher auch

$$f(\mathfrak{b}) = f(\mathfrak{c}^2(\mathfrak{b})).$$

Da aber $\mathfrak{b}$ eine Klassenmenge ist, folgt daraus $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}^2(\mathfrak{b})$, d. h. $\mathfrak{b}$ ist eine normale Teilmenge von $\mathfrak{m}$, für welche $f(\mathfrak{b}) = \bar{\mathfrak{a}}$ ist. Die normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ und von $\overline{\mathfrak{m}}$ sind also *eineindeutig* aufeinander bezogen.

Für Klassenmengen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gelten aber die Gleichungen

$$f(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = f(\mathfrak{a}) f(\mathfrak{b}), \quad f(\mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{b}) = f(\mathfrak{a}) \dot{+} f(\mathfrak{b}),$$

so daß schließlich der Satz besteht:

Satz 8. *Wird eine gepaarte Menge* $\mathfrak{m}$ *homomorph auf eine Menge* $\overline{\mathfrak{m}}$ *abgebildet, so daß für je zwei Repräsentanten* x_1, x_2 *eines Elementes* $\bar{x}$ *von* $\overline{\mathfrak{m}}$ *immer* $\mathfrak{c}(x_1) = \mathfrak{c}(x_2)$ *ist, so wird dadurch auch* $\overline{\mathfrak{m}}$ *gepaart, und zwar so, daß die Verbände* $\mathfrak{M}$ *und* $\overline{\mathfrak{M}}$ *der normalen Elemente von* $\mathfrak{m}$ *bzw.* $\overline{\mathfrak{m}}$ *isomorph auf einander abgebildet werden.*

30. Unter allen Homomorphien, für welche der letzte Satz gilt, gibt es eine ausgezeichnete: es ist diejenige, bei welcher jede Klasse $\bar{x}$ mit dem Repräsentanten x aus überhaupt allen Elementen x_i besteht, für welche

$$\mathfrak{c}(x_i) = \mathfrak{c}(x) \tag{30. 1}$$

ist. Bei dieser Wahl der Klassen $\bar{x}$ (und nur bei dieser) besteht die Aussage:

(30. 2) $$\text{aus } \bar{\mathfrak{c}}(\bar{x}) = \bar{\mathfrak{c}}(\bar{y}) \text{ folgt } \bar{x} = \bar{y}.$$

Ist nämlich $\bar{x} \neq \bar{y}$, so ist für irgendeinen Repräsentanten x von $\bar{x}$ und für irgendeinen Repräsentanten y von $\bar{y}$ immer $\mathfrak{c}(y) \neq \mathfrak{c}(x)$, weil aus $\mathfrak{c}(y) = \mathfrak{c}(x)$ folgen würde, daß auch y ein Repräsentant von $\bar{x}$ ist. Dann kann nach (29. 5) eben nicht $\bar{\mathfrak{c}}(\bar{x}) = \bar{\mathfrak{c}}(\bar{y})$ sein.

Eine Paarung von $\overline{\mathfrak{m}}$, für welche (30. 2) besteht, soll eine *reduzierte* Paarung genannt werden. Ist die Paarung reduziert, so sind auch die Elemente

$$\bar{\xi} = \bar{\mathfrak{c}}^2(\bar{x}), \qquad \bar{\eta} = \bar{\mathfrak{c}}^2(\bar{y})$$

des Verbandes $\overline{\mathfrak{M}}$ nur dann einander gleich, wenn $\bar{x} = \bar{y}$ ist.

Durch die Gleichung $\bar{\xi} = \bar{\mathfrak{c}}^2(\bar{x})$ wird somit die ganze Menge $\overline{\mathfrak{m}}$ *eineindeutig* auf eine Teilmenge $\overline{\mathfrak{M}}_1$ des Verbandes $\overline{\mathfrak{M}}$ abgebildet, d. h. die Menge $\overline{\mathfrak{m}}$ wird in $\overline{\mathfrak{M}}$, oder in den zu $\overline{\mathfrak{M}}$ isomorphen Verband $\mathfrak{M}$, *eingebettet*.

31. Anwendung auf teilweise geordnete Mengen. Ehe wir die letzten Resultate für teilweise geordnete Mengen verwenden, wollen wir einige Bemerkungen allgemeiner Natur einschieben.

Es sei A die Menge der Bindungen, welche eine teilweise Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ von $\mathfrak{m}$ definieren, und D_0 sei die Gesamtheit der in A enthaltenen Doppelbindungen. Dann ist D_0 ebenso wie A notwendig eine transitive Menge von Bindungen. Allgemeiner sei mit D eine transitive Teilmenge der Doppelbindungen D_0 verstanden, welche aber alle Doppelbindungen $x \subseteq x$ enthält. Ordnet man jedem Element a von $\mathfrak{m}$ alle Elemente x zu, für welche die Bindungen $a \subseteq x$ und $x \subseteq a$ in D vorkommen, so werden die Elemente von $\mathfrak{m}$ in Klassen $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$ zusammengefaßt. Die Menge $\overline{\mathfrak{m}}$ aller dieser Klassen wird dann teilweise geordnet, wenn wir $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ schreiben, sobald für zwei Repräsentanten a von $\bar{a}$ und b von $\bar{b}$ (und dann auch für alle übrigen) die Bindung $a \subseteq b$ in A vorkommt. Diese Operation, durch welche die teilweise Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ in die teilweise Ordnung $\overline{\mathfrak{m}}(\overline{\mathsf{A}})$ übergeht, kann als eine *Identifizierung* der Elementenpaare von D aufgefaßt werden.

32. Zwischen den Operationen der Identifizierung, welche soeben betrachtet wurde, und der Adjunktion einer Menge B von Bindungen, welche im § 21 erklärt wurde, besteht nun ein Vertauschungssatz.

Bei der Identifizierung entspricht nämlich der Menge B von Bindungen $a \subseteq b$ eindeutig eine Menge $\overline{\mathsf{B}}$ von Bindungen $\bar{a} \subseteq \bar{b}$.

Durch Adjunktion der Menge B gehe die teilweise Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ in $\mathfrak{m}(\mathsf{C})$ über. Ebenso gehe durch Adjunktion der Bindungen $\overline{\mathsf{B}}$ die teilweise Ordnung $\overline{\mathfrak{m}}(\overline{\mathsf{A}})$ in $\overline{\mathfrak{m}}(\overline{\mathsf{C}})$ über. Durch Identifizierung der Elementenpaare

aus D gehe endlich $\mathfrak{m}$ (C) in $\overline{\mathfrak{m}}$ (C^*) über. Jede Bindung aus $\overline{\mathsf{A}} \dotplus \overline{\mathsf{B}}$ ist in C^* enthalten, und daraus folgt

$$\overline{\mathsf{C}} \subseteq \mathsf{C}^*. \tag{32. 1}$$

Es wird nun behauptet, daß darüber hinaus

$$\overline{\mathsf{C}} = \mathsf{C}^* \tag{32. 2}$$

ist.

Die Gleichung (32. 2) ist tatsächlich richtig, wenn die Menge B aus einer einzigen Bindung $a \subseteq b$ besteht. Es sei nämlich $\bar{x} \subseteq \bar{y}$ eine Bindung von C^*, welche nicht in $\overline{\mathsf{A}}$ enthalten ist. Sind dann x, y zwei Repräsentanten von $\bar{x}$ bzw. $\bar{y}$, so ist die Bindung $x \subseteq y$ wohl in C, aber nicht in A enthalten. Dann müssen aber die Bindungen $x \subseteq a$, $b \subseteq y$ in A und die Bindungen $\bar{x} \subseteq \bar{a}$, $\bar{b} \subseteq \bar{y}$ in $\overline{\mathsf{A}}$ enthalten sein. Daraus folgt, daß $\bar{x} \subseteq \bar{y}$ auch in $\overline{\mathsf{C}}$ enthalten ist, und hiermit ist in diesem speziellen Fall (32. 2) bewiesen.

Zweitens betrachten wir eine Menge $\{\mathsf{B}_i\}$ von Bindungen, welche dieselben Eigenschaften haben soll, wie die gleichnamige Menge des § 21. Unter der Annahme, daß der Vertauschungssatz für alle B_i gilt, muß er auch für ihre Vereinigung $\mathsf{B} = \Sigma \dotplus \mathsf{B}_i$ bestehen. Dies folgt direkt aus der Tatsache, daß man hier

$$\overline{\mathsf{C}} = \Sigma \dotplus \overline{\mathsf{C}}_i, \quad \mathsf{C}^* = \Sigma \dotplus \mathsf{C}_i^*$$

schreiben kann, und daß nach Voraussetzung $\overline{\mathsf{C}}_i = \mathsf{C}_i^*$ ist.

Der Beweis des Vertauschungssatzes für beliebige Mengen B wird dann nach der Schlußweise des § 22 zu Ende geführt.

33. Durch eine beliebige eindeutige Abbildung sollen die Elemente $a, b, \ldots$ einer Menge $\mathfrak{m}$ auf die Elemente $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$ einer Menge $\overline{\mathfrak{m}}$ abgebildet werden. Denkt man sich zwischen je zwei Elementen von $\mathfrak{m}$, welche dasselbe Bild $\bar{a}$ besitzen, Doppelbindungen aufgestellt, so ist der Prozeß der Identifizierung der Elementenpaare von D der Abbildung äquivalent, von der wir ausgegangen sind.

Wir betrachten nun irgendeine teilweise Ordnung $\mathfrak{m}$ (A) von $\mathfrak{m}$, adjungieren die Doppelbindungen D zu den Bindungen A und identifizieren in der auf diese Weise erhaltenen teilweisen Ordnung $\mathfrak{m}$ (C) die Elementenpaare von D. Als Resultat erhalten wir eine teilweise Ordnung $\overline{\mathfrak{m}}$ ($\overline{\mathsf{C}}$) von $\overline{\mathfrak{m}}$.

Nach dem Vertauschungssatz des letzten Paragraphen kann man nun dieselbe teilweise Ordnung $\overline{\mathfrak{m}}$ ($\overline{\mathsf{C}}$) erhalten, indem man von den Bindungen $\overline{\mathsf{A}}$ ausgeht, welche in $\overline{\mathfrak{m}}$ den Bindungen A von $\mathfrak{m}$ entsprechen, und die kleinste transitive Menge von Bindungen der Elemente von $\overline{\mathfrak{m}}$ bestimmt, welche alle Bindungen von $\overline{\mathsf{A}}$ enthält.

34. Von einer beliebigen teilweisen Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ der Menge $\mathfrak{m}$ ausgehend, bilden wir nach dem § 26 die gesättigte teilweise Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A}^*)$. Die Bindungen von A^* werden nach der Regel (25. 1) hergestellt; Doppelbindungen von A^* bestehen danach zwischen je zwei Elementen, für welche $\mathfrak{c}^2(a) = \mathfrak{c}^2(b)$ und folglich auch $\mathfrak{c}^3(a) = \mathfrak{c}^3(b)$ oder $\mathfrak{c}(a) = \mathfrak{c}(b)$ gilt.

Genau dieselben Doppelbindungen werden nach dem § 30 *benötigt, um durch Identifizierung die Paarung der relativ primen Elemente von* $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ *zu reduzieren.*

Nach dem vorigen Paragraphen kann man diese Reduktion der Paarung folgendermaßen konstruieren: man betrachte die Menge $\overline{\mathfrak{m}}$, welche aus $\mathfrak{m}$ durch Identifizierung der Elementenpaare der Doppelbindungen D^*, welche in A^* enthalten sind, entsteht. Hierauf führe man sämtliche Bindungen $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ ein, für welche die Bindung $a \subseteq b$ zwischen mindestens einem Repräsentanten a von $\bar{a}$ und mindestens einem Repräsentanten b von $\bar{b}$ in A vorhanden ist. Die kleinste transitive Menge $\overline{\mathsf{A}}$ von Bindungen, welche sämtliche so konstruierte Bindungen $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ enthält, bestimmt die gesuchte teilweise Ordnung $\overline{\mathfrak{m}}(\overline{\mathsf{A}})$ von $\overline{\mathfrak{m}}$. Man beachte, daß $\overline{\mathfrak{m}}(\overline{\mathsf{A}})$ immer gesättigt ist, wenn $\mathsf{A} = \mathsf{A}^*$ ist.

35. Was folgt nun aus der Tatsache, daß $\bar{\mathfrak{c}}(\bar{x})$ die charakteristische Funktion einer reduzierten Paarung ist? Sind $\bar{x}$ und $\bar{y}$ zwei verschiedene Elemente von $\overline{\mathfrak{m}}$, so müssen die normalen Mengen $\bar{\mathfrak{c}}(\bar{x})$ und $\bar{\mathfrak{c}}(\bar{y})$ voneinander verschieden sein. Mindestens ein Element $\bar{u}$ muß also vorhanden sein, welches z. B. in $\bar{\mathfrak{c}}(\bar{x})$, aber nicht in $\bar{\mathfrak{c}}(\bar{y})$ enthalten ist. Dann ist $\bar{u}$ relativ prim zu $\bar{x}$, aber nicht relativ prim zu $\bar{y}$, und es gibt einen Teil $\bar{z}$ von $\bar{u}$ und $\bar{y}$, welcher nicht in $\bar{\mathfrak{n}}$ enthalten ist, und welcher selbstverständlich — ebenso wie $\bar{u}$ — relativ prim zu $\bar{x}$ ist. Da dieser Sachverhalt auch umkehrbar ist, läßt sich sagen:

Dann und nur dann ist $\bar{\mathfrak{c}}(\bar{x})$ *die charakteristische Funktion einer reduzierten Paarung, wenn man jedem Paar von verschiedenen Elementen* $\bar{x}, \bar{y}$ *aus* $\overline{\mathfrak{m}}$ *ein nicht in* $\bar{\mathfrak{n}}$ *enthaltenes Element* $\bar{z}$ *zuordnen kann, welches Teil des einen der beiden Elemente* $\bar{x}, \bar{y}$ *ist und relativ prim zum anderen ist.*

Teilweise Ordnungen einer Menge $\overline{\mathfrak{m}}$, welche diese Eigenschaften besitzen, hat zuerst Herr A. Bischof in seiner sehr bemerkenswerten Dissertation[3]) betrachtet und ihre große Bedeutung nach vielen Seiten beleuchtet. Unsere Resultate geben nun ein Mittel, sämtliche teilweise geordnete Mengen herzustellen, welche den zusätzlichen Forderungen genügen, die Bischof

[3]) Artur Bischof, Beiträge zur Carathéodoryschen Algebraisierung des Integralbegriffs. Schriften des Math. Inst. und des Instituts f. angew. Math. d. Univ. Berlin, Bd. 5, Heft 4, 1941.

benutzt hat. Man braucht nur, wie wir soeben sahen, von einer beliebigen teilweisen Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ von $\mathfrak{m}$ ausgehend, die Elemente von $\mathfrak{m}$ in geeigneter Weise zu Klassen zusammenzufassen.

36. Beispiele. Wir betrachten eine gepaarte Menge $\mathfrak{m}$ von fünf Elementen 0, 1, 2, 3 und 4. Hierbei soll 0 zu allen übrigen Elementen konjugiert sein, und es sollen außerdem die Relationen

$$1 \circ 2, \quad 2 \circ 3, \quad 3 \circ 4 \tag{36.1}$$

bestehen. Dann hat man

$$\begin{cases} \mathfrak{c}(0) = \mathfrak{m} = \mu, \quad \mathfrak{c}(\mathfrak{m}) = \{0\} = \nu, \\ \mathfrak{c}(1) = \{0, 2\}, \quad \mathfrak{c}(2) = \{0, 1, 3\}, \quad \mathfrak{c}(3) = \{0, 2, 4\}, \quad \mathfrak{c}(4) = \{0, 3\}. \end{cases} \tag{36.2}$$

Der Verband $\mathfrak{M}$ der normalen Elemente besteht hier aus den sechs Elementen

$$\begin{cases} \mu, \quad \nu, \quad \alpha = \{0, 2\}, \quad \beta = \{0, 3\}, \\ \alpha' = \mathfrak{c}(\alpha) = \{0, 1, 3\}, \quad \beta' = \mathfrak{c}(\beta) = \{0, 2, 4\} \end{cases} \tag{36.3}$$

und hat die Gestalt der nebenstehenden Figur.

Fig. 1.

Dieser Verband ist kein Boolescher Ring, denn man hat $\alpha' \beta' = \nu$, und nach dem Satz 4 des § 19 müßte $\alpha' \subseteq \beta$ sein, was nicht der Fall ist.

Dagegen ist die Paarung eine reduzierte. Die Menge $\mathfrak{m}$ wird eineindeutig auf einen Teil von $\mathfrak{M}$ abgebildet, wenn man setzt

$$\nu \sim 0, \quad \alpha' \sim 1, \quad \alpha \sim 2, \quad \beta \sim 3, \quad \beta' \sim 4. \tag{36.4}$$

37. Die Betrachtung der Elementenpaare von $\mathfrak{m}$, welche bei der Zuordnung (36. 4) relativ primen Elementen des Verbandes $\mathfrak{M}$ entsprechen, liefert eine neue Paarung von $\mathfrak{m}$, welche durch die Relationen

$$1 \circ 2, \quad 1 \circ 4, \quad 2 \circ 3, \quad 3 \circ 4 \tag{37.1}$$

definiert ist, und demnach dadurch erhalten wird, daß man den früheren Relationen (36. 1) noch $1 \circ 4$ hinzufügt. Bezeichnet man mit $\mathfrak{c}^*(x)$ die charakteristische Funktion dieser neuen Paarung, so erhält man

$$\mathfrak{c}^*(1) = \mathfrak{c}^*(3) = \{0, 2, 4\}, \quad \mathfrak{c}^*(2) = \mathfrak{c}^*(4) = \{0, 1, 3\}.$$

Der neue Verband $\mathfrak{M}^*$ ist ein Boolescher Ring, der aus den vier Elementen

$$\mu, \quad \nu, \quad \gamma = \{0, 2, 4\}, \quad \gamma' = \{0, 1, 3\}$$

besteht. Hier ist aber die neue Paarung von $\mathfrak{m}$ nicht mehr reduziert.

38. In einem dritten Beispiel sollen die Elemente x, y, ... von $\mathfrak{m}$ die *offenen* Punktmengen eines beliebigen Euklidischen Raumes sein, und zwei Elemente sollen konjugiert sein, wenn ihr (mengentheoretischer) Durchschnitt leer ist.

Hier wollen wir folgende (von den früheren verschiedene) Bezeichnungen benutzen: die Komplementärmenge einer beliebigen Punktmenge X des Raumes wird mit X', der offene Kern von X bzw. X' wird mit X_α, X'_α, und die abgeschlossene Hülle dieser Punktmengen mit X_β, X'_β bezeichnet. Endlich soll $\mathfrak{g}(X)$ die Menge aller offenen Teilmengen von X bedeuten, so daß man auch schreiben kann

$$\mathfrak{g}(X) = \mathfrak{g}(X_\alpha).$$

Für die charakteristische Funktion der angegebenen Paarung hat man dann

$$\mathfrak{c}(x) = \mathfrak{g}(x') = \mathfrak{g}(x'_\alpha).$$

Es sei jetzt $\mathfrak{a}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathfrak{m}$; mit v bezeichnen wir die Vereinigung aller offenen Punktmengen, welche als Elemente von $\mathfrak{a}$ auftreten. Die offenen Punktmengen, welche zu allen Punktmengen aus $\mathfrak{a}$ fremd sind, und die offenen Punktmengen, welche zu v fremd sind, sind nun dieselben. Daraus folgt

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{c}(v) = \mathfrak{g}(v') = \mathfrak{g}(v'_\alpha).$$

Infolgedessen kann man schreiben

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{g}(y)) = \mathfrak{c}(y) = \mathfrak{g}(y').$$

Mit $y = x'_\alpha$ hat man aber $y' = x_\beta$, und folglich

$$\mathfrak{c}^2(x) = \mathfrak{c}(\mathfrak{g}(x'_\alpha)) = \mathfrak{g}(x_\beta),$$
$$\mathfrak{c}^2(\mathfrak{a}) = \mathfrak{c}^2(v) = \mathfrak{g}(v_\beta).$$

Alle normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ können also in der Gestalt $\mathfrak{g}(v_\beta)$ geschrieben werden.

Sind nun v und w offene Punktmengen, so folgt aus $vw = 0$ zwar nicht $v_\beta w_\beta = 0$, trotzdem aber ist immer $\mathfrak{g}(v_\beta)\,\mathfrak{g}(w_\beta) = 0$. Wegen $v \in \mathfrak{g}(v_\beta)$, $w \in \mathfrak{g}(w_\beta)$ ist umgekehrt immer $vw = 0$ eine Folge von $\mathfrak{g}(v_\beta)\,\mathfrak{g}(w_\beta) = 0$. Nach dem Satz 6 des § 25 muß also immer der Verband $\mathfrak{M}$ der normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ ein Somenring sein. Letzteres folgt auch sofort nach demselben Satze aus der Tatsache, daß man die Elemente von $\mathfrak{m}$ teilweise ordnen kann.

Die zur gegebenen Paarung von $\mathfrak{m}$ korrespondierende reduzierte Paarung erhält man, indem man alle offenen Punktmengen, welche dieselbe abgeschlossene Hülle besitzen, zu einer Klasse zusammenfaßt.

Der Somenring $\mathfrak{M}$, welchen wir soeben erhalten haben, hat sehr eigentümliche Eigenschaften. Unter anderem liefert er das einfachste Beispiel eines vollkommenen Somenringes, dessen Elemente man nicht isomorph auf die Teilmengen einer festen Menge abbilden kann.

(Eingegangen am 6. Januar 1942.)

Über die ebene Bewegung eines unausdehnbaren Fadens.

Herrn Konrad Knopp
zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

Georg Hamel in Berlin.

Wir betrachten zunächst einen unausdehnbaren Idealfaden, der also keinerlei Steifigkeit aufweist und studieren seine ebenen Bewegungen. Er möge schwer sein, seine Dichte je Längeneinheit ϱ konstant; im dritten Teil werden wir allgemeine äußere Kräfte $X(t)\,ds$, $Y(t)\,ds$ längs des Fadens verteilt annehmen. Die Bewegungsgleichungen finden sich in allen Lehrbüchern; wir nehmen im allgemeinen die Existenz und Stetigkeit der gebrauchten Ableitungen an. Aber in der Durchführung bei gegebenen Anfangs- und Randbedingungen gibt es noch merkwürdige, ja geradezu paradoxe Erscheinungen, worauf Pailloux[1]) und Kucharski[2]) hingewiesen haben. Im Teil I behandeln wir ein von Pailloux auf S. 10 bis 15 der genannten Arbeit erwähntes Paradoxon; im Teil II behandeln wir dieselbe Aufgabe unter Berücksichtigung von Seilsteifigkeit; im Teil III formulieren wir einen Existenzsatz — wieder für den Idealfaden — bei Annahme vollkommener Stetigkeit, geben eine strenge Sonderlösung und skizzieren einen Weg zur Auffindung der allgemeinen Lösung. Zum Schluß ein allgemeiner Satz, der zeigt, daß eine bestimmte Beschränkung der Randbedingungen bei voller Stetigkeit eintreten muß.

I. Teil.

Ein Faden, der unausdehnbar sei und keinerlei Steifigkeit besitze, habe zu Anfang ($t = 0$) horizontale Lage; er sei schwer (Dichte je Längeneinheit $\varrho = \text{const}$) und werde losgelassen, doch sei das eine Ende (bei $s = 0$, s Bogenlänge, l gesamte Länge) festgehalten im Punkte $x = 0$, $y = 0$. Die Anfangsgeschwindigkeit sei 0. Das Problem ist schwierig, es kann mit Annahme vollständiger Stetigkeit und ohne Steifigkeit nicht gelöst werden, worauf schon Pailloux[3]) aufmerksam gemacht hat.

[1]) H. Pailloux, Contribution à l'étude des systèmes déformables. Ann. de Toulouse, 4 série, t. I, 1937.

[2]) W. Kucharski, Zur Kinetik dehnungsloser Seile mit Knickstellen. Ing.-Archiv XII (1941), S. 109.

[3]) Pailloux, l. c. S. 10–15.

Denn setzt man mit der Fadenspannung S das Problem in rechtwinkligen Koordinaten an (die y-Achse zeige nach oben, die x-Achse nach rechts), so erhält man, wie bekannt, die Differentialgleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} \varrho \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial s}(S\cos\vartheta) = \dfrac{\partial S}{\partial s}\cos\vartheta - S\sin\vartheta\dfrac{\partial\vartheta}{\partial s}, \\ \varrho \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\varrho g + \dfrac{\partial}{\partial s}(S\sin\vartheta) = -\varrho g + \dfrac{\partial S}{\partial s}\sin\vartheta + S\cos\vartheta\dfrac{\partial\vartheta}{\partial s}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} = \cos\vartheta, \quad \dfrac{\partial y}{\partial s} = \sin\vartheta. \end{cases}$$

Der Faden sei zu Anfang ungespannt. Dann ist zu Anfang $S = 0$, $\vartheta = 0$, $\dfrac{\partial\vartheta}{\partial s} = 0$, $\dfrac{\partial S}{\partial s} = 0$ und also zu Anfang

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -g,$$

folglich, da die Anfangsgeschwindigkeiten Null sind, bis auf Glieder höherer als der zweiten Ordnung in t

$$x = s, \quad y = -\tfrac{1}{2} g t^2,$$

was mit $x = 0$, $y = 0$ für $s = 0$ unverträglich ist. Man überlegt nun leicht, daß ein *Knick* eintreten wird. Der weitaus größte Teil des Fadens muß zunächst dem freien Fallgesetz gemäß

$$y = -\tfrac{1}{2} g t^2 \quad \text{für} \quad s \geqq s_0$$

gehorchen, denn es gibt bei anfangs horizontaler Lage keine Kraft, auch keine Seilspannung, welche der Schwere entgegenwirken könnte. Nur am Ende, d. h. für $s < s_0$, wird eine Abweichung stattfinden; der feste Punkt 0 wird das Seil am Ende festhalten, es wird deshalb einen fortlaufenden Knick an der Stelle $s_0(t)$ bekommen.

Wir können nun das Problem wenigstens für *kleine* t, d. h. für einen Anfangszustand lösen, und zwar in folgender Weise:

Wir nehmen an, daß in erster Näherung

$$s_0 = a t^{\varkappa}$$

mit $0 < \varkappa$ angenommen werden kann; a positive Konstante. Für $s \geqq s_0$ bleibe das Seil horizontal, es sei dort $y = -\tfrac{1}{2} g t^2$.

Auch in dem kleinen Stück $s \leqq s_0$ sehen wir zu Anfang ϑ als klein an.

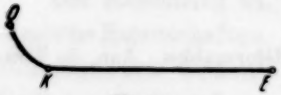

Fig. 1.

In dem Stück KE (Knick bis Ende) gelte streng $\vartheta = 0$. Dann haben wir dort die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial S}{\partial s} = \varrho \ddot{x}$$

und da $\bar{x}$ von s unabhängig sein muß (wegen der Unausdehnbarkeit), gilt für $s \geqq s_0$

$$S = \varrho \ddot{\bar{x}} (s - l), \tag{2}$$

da $S = 0$ für $s = l$ sein muß.

Andererseits ist nach der bekannten Formel an einer Knickstelle[4])

$$S^{(0)} = \varrho \dot{s}_0^2 \quad \text{in } K, \tag{3}$$

so daß

$$\dot{s}_0^2 = x (s_0 - l) \tag{4}$$

gelten muß. Ist nun

$$s_0 = a t^{\varkappa}, \quad \dot{s}_0 = \varkappa a t^{\varkappa - 1}, \quad \varkappa > 0,$$

so gilt bei Vernachlässigung von s_0 gegen l (es soll t klein sein) nach (3)

$$\varrho \varkappa^2 a^2 t^{2\varkappa - 2} = S^{(0)}$$

und also nach (2)

$$\varkappa^2 a^2 t^{2\varkappa - 2} = - l \ddot{\bar{x}}. \tag{5}$$

Wir müssen, damit $\bar{x}$ zu Anfang Null sei, $\varkappa > 1$ voraussetzen. Dann folgt

$$\ddot{\bar{x}} = - \frac{\varkappa^2 a^2}{l} t^{2\varkappa - 2},$$

$$\dot{\bar{x}} = - \frac{\varkappa^2 a^2}{l} \frac{t^{2\varkappa - 1}}{2\varkappa - 1}, \quad \bar{x} = - \frac{\varkappa a^2}{2 l (2\varkappa - 1)} t^{2\varkappa} + s. \tag{6}$$

Damit sind die Gleichungen für $s \geqq s_0$ erfüllt.

Nun betrachten wir den Teil $s \leqq s_0$.

Hier können wir in erster Näherung $\bar{x}$ als klein voraussetzen, und da auch $\sin \vartheta$ klein, $\cos \vartheta \approx 1$ gilt, bekommen wir aus der ersten Gleichung (1) als erste Näherung

$$S = \text{const}, \quad \text{d. h. } S = S^{(0)} = \varrho \dot{s}_0^2 = \varrho a^2 \varkappa^2 t^{2\varkappa - 2}$$

(unabhängig von s). Mit analoger Vernachlässigung gibt die zweite Gleichung (1)

$$\varrho \ddot{y} = S^{(0)} \frac{\partial \vartheta}{\partial s} - \varrho g$$

oder

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \varkappa^2 t^{2\varkappa - 2} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - g \quad \left(\vartheta \approx \frac{\partial y}{\partial s} \text{ angenommen}\right).$$

Setzen wir in dieser Differentialgleichung $y = - \frac{1}{2} g t^2 + Y(t, s)$, so bekommen wir

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \varkappa^2 t^{2\varkappa - 2} \frac{\partial^2 Y}{\partial s^2}.$$

---

[4]) Pailloux, C. R. Paris 1939, S. 325–327. Sur le mouvement d'un fil où glisse un petit anneau. Kucharski, l. c., Gleichung (12). Gleichung (3) ist keine andere als die Gleichung der Charakteristiken der ersten der Gleichungen (2) in Teil III.

Diese Gleichung aber muß nach Ähnlichkeitsbetrachtungen Lösungen der Form

$$t^\alpha f(z) \text{ mit } z = \frac{s}{a\,t^\varkappa}$$

haben. Die Rechnung bestätigt die Behauptung und gibt für f die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\varkappa^2 f''(1-z^2) + \varkappa(2\alpha - \varkappa - 1)\,zf' - \alpha(\alpha-1)f = 0.$$

Da $z = \frac{s}{a\,t^\varkappa}$, ferner $s \leqq s_0 = a\,t^\varkappa$ ist, kommen für z nur Werte $0 \leqq z \leqq 1$ in Frage.

Mithin gibt es Lösungen der Form

$$y = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + \sum_\alpha t^\alpha f_\alpha\left(\frac{s}{a\,t^\varkappa}\right). \tag{7}$$

Verlangt man für $s = s_0$ Anschluß an $y = -\frac{1}{2}\,g t^2$, so muß

$$\sum_\alpha t^\alpha f_\alpha(1) = 0$$

sein. Andererseits soll $y = 0$ für $s = 0$ sein, also $-\frac{1}{2}\,g t^2 + \Sigma\, t^\alpha f_\alpha(0) = 0$. Das läßt sich für $\alpha = 2$ und $f_2(0) = \frac{1}{2}\,g$ befriedigen.

Für $\alpha = 2$ aber lautet die gewöhnliche Differentialgleichung für f (wir unterdrücken den Index 2)

$$\varkappa^2 f''(1-z^2) + \varkappa(3-\varkappa)\,zf' - 2f = 0. \tag{8}$$

Durch die Substitution $u = \frac{1-z}{2}$, $z = 1 - 2u$ geht die Gleichung über in

$$u(1-u)\frac{d^2f}{du^2} - \frac{3-\varkappa}{2\varkappa}(1-2u)\frac{df}{du} - \frac{2}{\varkappa^2}\,f = 0.$$

Dies ist eine Gausssche Differentialgleichung, d. h. sie ist von der Form

$$u(1-u)\frac{d^2f}{du^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)\,u]\frac{df}{du} - \alpha\beta f = 0$$

mit

$$\gamma = -\frac{3-\varkappa}{2\varkappa} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2\varkappa}, \quad \alpha+\beta = -\frac{3}{\varkappa}, \quad \alpha\beta = \frac{2}{\varkappa^2},$$

$$\text{also } \alpha = -\frac{1}{\varkappa}, \quad \beta = -\frac{2}{\varkappa}.$$

Sie hat die beiden Integrale

$$F(\alpha,\beta,\gamma;u) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\,\gamma}\,u + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)}\,u^2 + \ldots$$

und

$$u^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma;\ u).$$

Da aber wegen des stetigen Anschlusses in der Knickstelle $z = 1$, $f(1) = 0$ sein muß, müssen wir eine Lösung nehmen, die für $z = 1$, d. h. $u = 0$ selber Null wird. Nun ist $1 - \gamma = \frac{1}{2} + \frac{3}{2\varkappa} > 0$, also kommt nur

$$f(z) = C\left(\frac{1-z}{2}\right)^{1-\gamma} F\left(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1,\ 2 - \gamma;\ \frac{1-z}{2}\right)$$

in Frage. Da aber noch für $z = 0$ auch y gleich Null sein soll, so muß $f(0) = \frac{1}{2} g$ sein, und das liefert

$$C = \frac{\frac{1}{2} g\, 2^{1-\gamma}}{F\left(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma;\ \frac{1}{2}\right)},$$

somit

$$f(z) = \frac{1}{2} g (1-z)^{1-\gamma} \frac{F\left(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma;\ \frac{1-z}{2}\right)}{F\left(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma;\ \frac{1}{2}\right)},$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 \left[1 - (1-z)^{1-\gamma} \frac{F\left(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma;\ \frac{1-z}{2}\right)}{F\left(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma;\ \frac{1}{2}\right)}\right] \text{ mit } z = \frac{s}{a\, t^{\varkappa}}.$$

Weiter ergibt sich

$$\sin\vartheta = \frac{\partial y}{\partial s} = t^2 f'(z) \frac{1}{a\, t^{\varkappa}} = \frac{1}{a} t^{2-\varkappa} f'(z)$$

und daraus

$$\frac{\partial x}{\partial s} \approx 1 - \frac{1}{2} \sin^2\vartheta = 1 - \frac{1}{2a^2} t^{4-2\varkappa} (f'(z))^2,$$

somit

$$x \approx s - \frac{1}{2a^2} t^{4-2\varkappa} \int_0^s f'(z)^2\, ds = s - \frac{1}{2a} t^{4-\varkappa} \int_0^z f'(z)^2\, dz.$$

Das Integral existiert bis zu $z = 1$ hin, da sich $f(z)$ in der Nähe von $z = 1$ wie $(1-z)^{1-\gamma}$, f'^2 wie $(1-z)^{-2\gamma}$ verhält. Es ist aber $-2\gamma = -1 + \frac{3}{\varkappa} > -1$. Aus der Formel für x folgt an der Knickstelle

$$x_0 \approx s_0 - \frac{1}{2a} t^{4-\varkappa} \int_0^1 f'(z)^2\, dz.$$

Wegen des stetigen Anschlusses muß aber wegen (6)

$$-\frac{1}{2a} t^{4-\varkappa} \int_0^1 f'(z)^2\, dz = -\frac{\varkappa a^2}{2l(2\varkappa-1)} t^{2\varkappa}$$

sein. Daraus folgt

erstens $4 - \varkappa = 2\varkappa$, d. h. $\varkappa = \frac{4}{3}$,

zweitens berechnet sich a aus

$$a^3 = \frac{2\varkappa - 1}{\varkappa}\, l \int_0^1 f'(z)^2\, dz.$$

Dabei ist wegen

$$\varkappa = \frac{4}{3},\quad 1-\gamma = \frac{1}{2} + \frac{3}{2\varkappa} = \frac{13}{8},\quad \alpha+1-\gamma = -\frac{1}{\varkappa} + \frac{13}{8} = \frac{7}{8},\quad \beta+1-\gamma = \frac{1}{8},$$

$$f(z) = \frac{1}{2}\, g\,(1-z)^{\frac{13}{8}}\, \frac{F\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}, \frac{21}{8}; \frac{1-z}{2}\right)}{F\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}, \frac{21}{8}; \frac{1}{2}\right)},$$

$$y = -\frac{1}{2}\, g\, t^2 \left[1 - (1-z)^{\frac{13}{8}}\, \frac{F\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}, \frac{21}{8}; \frac{1-z}{2}\right)}{F\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}, \frac{21}{8}; \frac{1}{2}\right)}\right].$$

Der Nenner ist sicher nicht Null, da alle Argumente positive Werte haben. Dabei ist $z = \frac{s}{a\, t^{\frac{4}{3}}} \leqq 1$; *die Knickstelle pflanzt sich nach dem Gesetz* $s_0 = a\, t^{\frac{4}{3}}$ *fort.* Es ist noch

$$x = s - \frac{1}{2a}\, t^{\frac{8}{3}} \int_0^z f'(z)^2\, dz, \quad \sin\vartheta = \frac{1}{a}\, t^{\frac{2}{3}} f'(z) \text{ für } s \leqq s_0,$$

und das gilt alles in erster Näherung für kleine t.

An der Knickstelle ist $f'(z)$ klein wie $(1-z)^{\frac{5}{8}}$, *also geht die Tangente noch stetig in das horizontale Stück* KE *über*; erst die Krümmung erleidet eine Unstetigkeit. *Die Beschleunigung* $\ddot{y}$ *wird dort unendlich und zwar positiv: der Faden wird an der Knickstelle nach oben gerissen.*

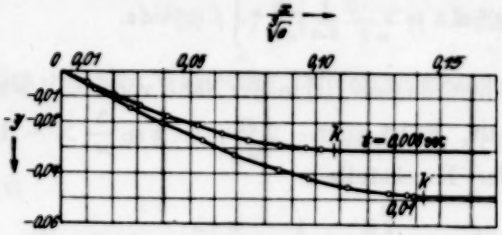

Fig. 2.

Damit ist die Lösung gefunden. Die genauen Bilder von Fig. 2 hat Frl. Ingeborg Kraft berechnet und gezeichnet.

Daß zuerst im Teil $0 \leqq s \leqq s_0$ das Glied mit $\ddot{x}$ vernachlässigt wurde, rechtfertigt sich hinterher. Aus

$$\varrho\, \ddot{x} = \frac{\partial S}{\partial s} \qquad (\cos\vartheta \approx 1, \quad \sin\vartheta \approx 0)$$

folgt

$$S = S^{(0)} + \int_{s_0}^{s} \varrho\, \ddot{x}\, ds.$$

$S^{(0)}$ ist klein wie $t^{2\varkappa-2} = t^{\frac{2}{3}}$, $\ddot{x}$ klein wie $t^{2-\varkappa} = t^{\frac{2}{3}}$. Also ist das vernachlässigte Glied kleiner als $\text{const}\, t^{\frac{2}{3}} \cdot s \leqq \text{const} \cdot t^{\frac{2}{3}} \cdot t^{\frac{4}{3}} = \text{const}\, t^2 \ll S^{(0)}$.

II. Teil.

Nun soll dasselbe Problem unter *Einbeziehung von energieverzehrender Seilsteifigkeit* behandelt und gezeigt werden, daß unter bestimmten Umständen der Faden wie ein starrer Körper herunterfallen kann. Elastische Kräfte bleiben außer Betracht.

In meinem Lehrbuch der elementaren Mechanik (§ 36) habe ich die Theorie der Seilsteifigkeit so aufgestellt, daß für das Biegungsmoment B gelte

$$|B| \leqq r \cdot S$$

da, wo keine Verbiegung stattfindet, dagegen $B = \pm rS$ da, wo Verbiegung stattfindet. Das Zeichen muß so gewählt werden, daß Energieverlust eintritt, d. h.

$$\text{sign}\, B = \text{sign}\, \frac{dk}{dt},$$

wo k die Krümmung bedeutet. r ist eine Erfahrungskonstante von der Dimension einer Länge. Die Theorie ist unvollkommen und muß durch eine verbesserte ersetzt werden, etwa derart, daß eine Beziehung der allgemeinen Art $F(B, H, S) \leqq 0$ bzw. $= 0$ erfüllt ist, wo H die Schubkraft bedeutet. Man sollte in erster Linie einmal

$$B^2 + a^2 H^2 \leqq B_0^2 + r^2 S^2$$

experimentell studieren, wo a, B_0, r Erfahrungskonstanten sind. Es zeigt sich, daß die zu Anfang ausgesprochene Behauptung nur gelten kann, wenn $B_0 \neq 0$ ist. *Der Einfachheit halber studieren wir hier die Annahme*

$$|B| \leqq B_0 > 0;$$

und $B = \pm B_0$ mit $\text{sign}\, B = \text{sign}\, \frac{dk}{dt}$.

Fig. 3.

Unter Einführung von B, H, S gelten beim ebenen Problem die Gleichungen [5])

$$\frac{\partial B}{\partial s} + H = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial s} - kH + \varkappa_s = \varrho w_s,$$

$$\frac{\partial H}{\partial s} + kS + \varkappa_n = \varrho w_n,$$

[5]) Siehe die „Elementare Mechanik" § 36, Nr. 184.

wo $\varkappa_s$, $\varkappa_\nu$ die Kraftkomponenten in Richtung s und ν (Normale) sind, w_s, w_ν die entsprechenden Beschleunigungen. Unter der Annahme des Falles in starrer Form ist $k = 0$ (außer in 0) und es gilt für $s > 0$

Fig. 4.

$$\frac{\partial S}{\partial s} + \varrho g \cos\varphi = -\varrho s \omega^2 \qquad (\omega = \dot{\varphi}),$$

$$\frac{\partial H}{\partial s} - \varrho g \sin\varphi = \varrho s \dot{\omega}.$$

Am Ende $s = l$ gilt $S = 0$, $H = 0$, $B = 0$. Also bekommen wir

$$S = -\varrho g \cos\varphi (s - l) - \tfrac{1}{2}\varrho\omega^2(s^2 - l^2) = \varrho(l - s)[g\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\omega^2(l + s)],$$

$$H = \tfrac{1}{2}\varrho\dot{\omega}(s^2 - l^2) + \varrho g \sin\varphi (s - l) = -\varrho(l - s)[\tfrac{1}{2}\dot{\omega}(l + s) + g\sin\varphi],$$

folglich

$$\frac{\partial B}{\partial s} = -H = \tfrac{1}{2}\varrho\dot{\omega}(l^2 - s^2) + \varrho g \sin\varphi (l - s),$$

$$B = \tfrac{1}{2}\varrho\dot{\omega}(l^2 s - l^3 - \tfrac{1}{3}s^3 + \tfrac{1}{3}l^3) + \varrho g \sin\varphi (ls - l^2 - \tfrac{1}{2}s^2 + \tfrac{1}{2}l^2)$$

$$= -\varrho (l - s)^2 \left[\frac{1}{6}\dot{\omega}(2l + s) + \sin\varphi \frac{g}{2}\right].$$

In 0 ist

$$B^{(0)} = -\varrho l^2 \left[\frac{1}{6}\dot{\omega}\, 2l + \sin\varphi \frac{g}{2}\right].$$

Hier soll Biegung stattfinden, also $B^{(0)} = \pm B_0$ sein. Da aber

$$\frac{dk}{dt} < 0, \quad \text{gilt} \quad B^{(0)} = -B_0$$

oder

$$\varrho l^2 \left[\frac{1}{6}\dot{\omega}\, 2l + \sin\varphi \frac{g}{2}\right] = B_0,$$

$$\dot{\omega} = -\frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\varphi + \frac{3}{\varrho}\frac{B_0}{l^3}.$$

Dies ist die Differentialgleichung der Bewegung.

Sie kann unter Benutzung der Anfangsbedingung $\omega = 0$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ einmal integriert werden und liefert

$$\omega^2 = \frac{3g}{l}\cos\varphi - \frac{6}{\varrho}\frac{B_0}{l^3}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

Damit überhaupt die Bewegung beginnt und der Faden wegen übergroßer Steifigkeit nicht stehenbleibt, muß für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\omega} < 0$ ausfallen, also $B_0 < \frac{\varrho g l^2}{2}$ sein. Soll der Faden unten ankommen und nicht zwischendurch steckenbleiben, so muß für $\varphi = 0$, $\omega^2 \geqq 0$ ausfallen, d. h.

$$\frac{6}{\varrho}\frac{B_0}{l^3}\frac{\pi}{2} \leqq \frac{3g}{l}$$

oder

$$B_0 \leqq \frac{1}{\pi}\, \varrho\, g\, l^2$$

sein.

Nun muß noch die Ungleichheit $|B| \leqq B_0$ für $0 < s \leqq l$ kontrolliert werden. Es gibt zwei Fälle

(a) $$B = -\varrho\,(l-s)^2\left[\frac{1}{6}\,\dot{\omega}\,(2\,l+s) + \frac{g}{2}\sin\varphi\right] \leqq 0.$$

Dann muß $-B \leqq B_0$ sein. Das gibt mit

$$\dot{\omega} = -\frac{3}{2}\,\frac{g}{l}\sin\varphi + \frac{3\,B_0}{\varrho\,l^3}$$

einerseits

$$-\varrho\,(l-s)^2\left[-\frac{1}{4}\,\frac{g}{l}\sin\varphi\,(2\,l+s) + \frac{1}{2}\,\frac{B_0}{\varrho\,l^3}\,(2\,l+s) + \frac{g}{2}\sin\varphi\right] \leqq 0,$$

andererseits

$$\varrho\,(l-s)^2\left[-\frac{1}{4}\,\frac{g}{l}\sin\varphi\,(2\,l+s) + \frac{1}{2}\,\frac{B_0}{\varrho\,l^3}\,(2\,l+s) + \frac{g}{2}\sin\varphi\right] \leqq B_0.$$

Die erste Bedingung gibt wegen $\varrho\,(l-s)^2 \geqq 0$

$$-\frac{1}{4}\,\frac{g}{l}\,s\sin\varphi + \frac{1}{2}\,\frac{B_0}{\varrho\,l^3}\,(2\,l+s) \geqq 0$$

oder

(A) $$\sin\varphi \leqq \frac{2\,B_0}{\varrho\,g\,l^2}\,\frac{2\,l+s}{s}.$$

Die zweite Bedingung gibt

$$-\frac{1}{4}\,\frac{g}{l}\,s\,(l-s)^2\,\varrho\sin\varphi + B_0\left[\frac{(l-s)^2\,(2\,l+s)}{2\,l^3} - 1\right] \leqq 0$$

oder

$$-\frac{1}{4}\,\frac{g}{l}\,s\,\varrho\,(l-s)^2\sin\varphi + B_0\,\frac{s\,(s^2-3\,l^2)}{2\,l^3} \leqq 0;$$

und das ist immer erfüllt.

(b) $$B \geqq 0,$$

d. h. nach derselben Rechnung

(B) $$\sin\varphi \geqq \frac{2\,B_0}{\varrho\,g\,l^2}\,\frac{2\,l+s}{s}.$$

Dann verlangt $B \leqq B_0$

$$-\varrho\,(l-s)^2\left[-\frac{1}{4}\,\frac{g}{l}\sin\varphi\,(2\,l+s) + \frac{1}{2}\,\frac{B_0}{\varrho\,l^3}\,(2\,l+s) + \frac{g}{2}\sin\varphi\right] \leqq B_0$$

oder

$$\frac{1}{4}\,\frac{g\,\varrho}{l}\,s\sin\varphi\,(l-s)^2 - B_0\left[\frac{1}{2}\,\frac{(2\,l+s)\,(l-s)^2}{l^3} + 1\right] \leqq 0$$

oder

(C) $$\sin\varphi \leqq \frac{2\,B_0}{\varrho\,g\,l^3}\,\frac{4\,l^3 - 3\,l^2\,s + s^3}{s\,(l-s)^2}.$$

Sind (B) und (C) überhaupt verträglich? Es muß dann

$$4\,l^3 - 3\,l^2\,s + s^3 > (2\,l + s)\,(l - s)^2 = 2\,l^3 - 3\,l^2\,s + s^3$$

sein, was stets der Fall ist. Zeichnen wir die Kurven

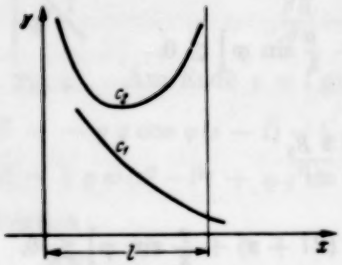

Fig. 5.

$$C_1: \quad y = \frac{2\,B_0}{\varrho\,g\,l^3}\,\frac{2\,l + s}{s}$$

und

$$C_2: \quad y = \frac{2\,B_0}{\varrho\,g\,l^3}\cdot\frac{4\,l^3 - 3\,l^2\,s + s^3}{s\,(l-s)^2},$$

so liegt C_1 stets unter C_2. Liegt $\sin\varphi$ unter C_1, so ist nach (a) keine Bedingung erforderlich, liegt aber $\sin\varphi$ über C_1, so muß es unter C_2 liegen. Da sowieso C_1 unter C_2 liegt und $\sin\varphi \leqq 1$ ist, ist notwendig und hinreichend, daß der tiefste Punkt von C_2 über oder bei 1 liegt, d. h. hinreichend und notwendig ist

$$\operatorname{Min}\frac{2\,B_0}{\varrho\,g\,l^3}\,\frac{4\,l^3 - 3\,l^2\,s + s^3}{s\,(l-s)^2} \geqq 1 \quad \text{in} \quad 0 < s < l.$$

Das gibt die Gleichung für die Stelle des Minimums

$$(-3\,l^2 + 3\,s^2)\,s\,(l-s)^2 - (4\,l^3 - 3\,l^2\,s + s^3)\,(l-s)\,(l-s-2\,s) = 0$$

oder

$$s^3 - 3\,s^2\,l + 6\,l^2\,s - 2\,l^3 = 0.$$

Dafür kann man schreiben

$$(l-s)^3 + 3\,l^2\,(l-s) - 2\,l^3 = 0.$$

Für die Unbekannte $y = -\frac{s}{l} + 1$ liegt die kubische Gleichung

$$y^3 + 3\,y - 2 = 0$$

mit der Diskriminante $R = 1 + 1 = 2$ vor. Folglich ist nach der Cardanischen Formel

$$y = \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} = 0.5961\ldots,$$

folglich

$$s = l\,(1 - y) = l \cdot 0.4039.$$

Mithin lautet die Bedingung

$$\frac{2\,B_0}{\varrho\,g\,l^2}\cdot\frac{4 - 3\cdot 0{,}4039 + 0{,}4039^3}{0{,}4039\cdot 0{,}5961^2} \geqq 1;$$

oder

$$B_0 \geqq \varrho\, g\, l^2 \cdot 0{,}02431.$$

Wenn also

$$\frac{B_0}{\varrho g l^3} > 0{,}02431, \quad \textit{aber} \quad \frac{B_0}{\varrho g l^3} \leqq \frac{1}{\pi} = 0{,}31831$$

ist, ist starres Herabfallen des Fadens bis zur vertikalen Lage möglich.

Bemerkenswert ist vielleicht noch Folgendes. Wenn B zu klein ist, ist die Bedingung $|B| \leqq B_0$ zuerst für mittlere Werte von s verletzt, nämlich in der Umgebung von $s = l \cdot 0{,}4039$. Außerdem liegt dann der Fall (b) vor, wo $B > 0$ ist, also im Falle der Verletzung von $B \leqq B_0$, $\frac{dk}{dt} > 0$. Also wird sich der Faden im Falle der Verletzung von $|B| \leqq B_0$ in der Mitte nach oben biegen, an den Enden geradlinig fallen, sich also dem Bewegungszustand ohne Steifigkeit annähern. Doch ist dies zunächst nur ein Plausibilitätsergebnis, das noch näher untersucht werden muß.

Die allgemeinere Annahme $B^2 + a^2 H^2 \leqq B_0^2 + r^2 S^2$ kann geradeso untersucht werden, erfordert nur größeren Rechenaufwand.

III. Teil.

In diesem Teil wollen wir erstens die Bewegungsgleichungen des Idealfadens aus Teil I so umformen, daß nur noch S und ϑ als Unabhängige vorkommen, dann von diesen Gleichungen eine genaue Teillösung angeben und endlich ein Näherungsverfahren besprechen, das wahrscheinlich zu einem genauen Verfahren ausgebaut werden kann, wozu wir noch einige Beiträge liefern wollen.

1. *Wir verallgemeinern zuerst die Bewegungsgleichungen* durch Einführen irgendwelcher äußerer Kräfte $X(t)\,ds$, $Y(t)\,ds$, die längs des Fadens von außen einwirken mögen. Dann lauten die Bewegungsgleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} \varrho \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \dfrac{\partial S}{\partial s}\cos\vartheta - S\sin\vartheta\,\dfrac{\partial\vartheta}{\partial s} + X(t), \\ \varrho \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial S}{\partial s}\sin\vartheta + S\cos\vartheta\,\dfrac{\partial\vartheta}{\partial s} + Y(t). \end{cases}$$

Um mittels $\frac{\partial x}{\partial s} = \cos\vartheta$, $\frac{\partial y}{\partial s} = \sin\vartheta$ den Winkel ϑ als Abhängige einzuführen, differenzieren wir nach s — die Existenz der Ableitungen wird vorausgesetzt — und erhalten

$$\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\cos\vartheta = \frac{\partial^2 S}{\partial s^2}\cos\vartheta - 2\frac{\partial S}{\partial s}\sin\vartheta\,\frac{\partial\vartheta}{\partial s} - S\cos\vartheta\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\right)^2 - S\sin\vartheta\,\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2},$$

$$\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\sin\vartheta = \frac{\partial^2 S}{\partial s^2}\sin\vartheta + 2\frac{\partial S}{\partial s}\cos\vartheta\,\frac{\partial\vartheta}{\partial s} - S\sin\vartheta\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\right)^2 + S\cos\vartheta\,\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2}.$$

Führt man die Differentiationen links aus, so vereinigen sich die Gleichungen leicht zu den beiden von $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ freien Differentialgleichungen

$$(2)^{6}) \qquad \begin{cases} \varrho\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} = 2\frac{\partial S}{\partial s}\frac{\partial\vartheta}{\partial s} + S\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2}, \\ \varrho\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)^2 = -\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} + S\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\right)^2. \end{cases}$$

Dabei läuft s von 0 bis l (Fadenlänge), t von 0 bis $+\infty$. Wahrscheinlich besteht folgender Existenzsatz:

Bei hinreichender Beschränkung der gegebenen Größen gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung, für die zur Zeit $t = 0$ gegeben sind: ϑ und $\frac{\partial\vartheta}{\partial t}$; für $s = 0$ und $s = l$ aber ϑ und S.

2. *Eine genaue Sonderlösung* kann man angeben. Es sei $S = \text{const.}$ $\frac{S}{\varrho}$ setzen wir gleich c^2. Dann bleiben die Gleichungen $\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2}$ und $\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)^2 = c^2\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\right)^2$. Beide haben die gemeinsamen Lösungen $\vartheta = f(s - ct)$ und $\vartheta = g(s + ct)$; aber nur eine von beiden. Betrachten wir den ersten Fall weiter. Es ist dann

$$(3) \qquad \begin{cases} x(s,t) = \int_0^s \cos\left[f(s - ct)\right]\partial s + x_0(t), \\ y(s,t) = \int_0^s \sin\left[f(s - ct)\right]\partial s + y_0(t). \end{cases}$$

Differentiation ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= c\int_0^s \sin\left[f(s - ct)\right] f'(s - ct)\,\partial s + \dot{x}_0(t) \\ &= c\left[\cos f(-ct) - \cos f(s - ct)\right] + \dot{x}_0(t), \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -c\int_0^s \cos\left[f(s - ct)\right]\cdot f'(s - ct)\,\partial s + \dot{y}_0(t) \\ &= c\left[\sin f(-ct) - \sin f(s - ct)\right] + \dot{y}_0(t). \end{aligned}$$

Nochmalige Differentiation ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= c^2\left[\sin f(-ct)\cdot f'(-ct) - \sin f(s - ct)\cdot f'(s - ct)\right] + \ddot{x}_0(t), \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -c^2\left[\cos f(-ct) f'(-ct) - \cos f(s - ct)\cdot f'(s - ct)\right] + \ddot{y}_0(t). \end{aligned}$$

---

6) Die zweite Gleichung ist mit Gleichung (4) (S. 3) in der Arbeit von PAILLOUX identisch. Die Gleichungen stehen aber schon bei ROUTH, Bd. 2, Kap. XIII; s. auch mein Lehrbuch, § 58, Nr. 349.

Setzt man alles in (1) ein, so erhält man

$$(4)\qquad \begin{cases} c^2 \sin f(-ct)\, f'(-ct) + \ddot{x}_0(t) = \dfrac{1}{\varrho} X(t), \\ -c^2 \cos f(-ct)\cdot f'(-ct) + \ddot{y}_0(t) = \dfrac{1}{\varrho} Y(t). \end{cases}$$

Soll etwa, wie bei dem Fall des ersten Teils, der Anfangspunkt $s = 0$ festgehalten werden, so sind $x_0 \equiv 0$, $y_0 \equiv 0$, und man muß zur Erhaltung der Bewegung Kräfte annehmen:

$$X(t) = \quad S \sin f(-ct)\cdot f'(-ct),$$
$$Y(t) = -S \cos f(-ct)\cdot f'(-ct).$$

Daraus folgt eine Bedingungsgleichung für X, Y; nämlich einerseits muß

$$f'^2(-ct) = \frac{1}{S^2}(X^2 + Y^2),$$

andererseits $\operatorname{tg} f(-ct) = -\dfrac{X}{Y}$ sein, also $f(-ct) = -\operatorname{arctg}\dfrac{X}{Y}$;

$$-c f'(-ct) = \frac{Y\dot{X} - X\dot{Y}}{X^2 + Y^2}.$$

Vergleich gibt

$$\pm \frac{c}{S}\sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{Y\dot{X} - X\dot{Y}}{X^2 + Y^2}$$

oder

$$(5)\qquad \mp \sqrt{S\varrho}\,(X^2 + Y^2)^{\frac{3}{4}} = -Y\dot{X} + X\dot{Y}.$$

Das läßt sich so veranschaulichen: *Betrachtet man die Kurve $x = \int X\,dt$, $y = \int Y\,dt$, also den Antrieb, so muß diese Kurve konstante Krümmung haben, d. h. ein Kreis sein. Der Radius des Kreises ist $\mp \frac{1}{\sqrt{S\varrho}}$, woraus sich S bestimmt.*

Als *zweites Beispiel* nehmen wir $X \equiv 0$, $Y \equiv -\varrho g$. Wir können dann auch noch $y_0 \equiv 0$ annehmen und müssen dann f aus

$$-c^2 \cos f(-ct)\, f'(-ct) = -g$$

bestimmen. $-ct = z$ gesetzt, gibt

$$\cos f(z)\cdot f'(z) = \frac{g}{c^2},$$

also $\sin f(z) = \frac{g}{c^2} z + a$ oder $f(z) = \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{g}{c^2} z + a\right)$. Man kann unbeschadet der Allgemeinheit $a = 0$ setzen. Somit wird

$$x = \int_0^s \cos \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{g}{c^2}(s - ct)\right) \partial s + x_0(t),$$

$$y = \int_0^s \sin \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{g}{c^2}(s - ct)\right) \partial s$$

oder

$$x = \int_0^s \sqrt{1 - \frac{g^2}{c^4}(s - ct)^2}\, \partial s + x_0(t),$$

$$y = \int_0^s \frac{g}{c^2}(s - ct)\, \partial s$$

oder

$$\text{(6)} \quad \begin{cases} x = \frac{c^2}{2g}\left\{\arcsin\left(\frac{gs}{c^2} - \frac{gt}{c}\right) + \left(\frac{gs}{c^2} - \frac{gt}{c}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{gs}{c^2} - \frac{gt}{c}\right)^2}\right\} + \\ \qquad + \frac{c^2}{2g}\left\{\arcsin\frac{gt}{c} + \frac{gt}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{gt}{c}\right)^2}\right\} + x_0(t), \\ y = \frac{g}{2c^2}(s^2 - 2cts). \end{cases}$$

Die Wurzeln nehmen wir positiv, für den arc sin den Hauptwert. Man kann aber $x_0(t)$ nun nicht mehr Null setzen, sondern muß nach (4)

$$\ddot{x}_0(t) = -c^2 \sin f(-ct)\, f'(-ct) = -c^2 \sin f(z)\, f'(z)$$
$$= -c^2 \frac{g^2}{c^2}\frac{z}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{c^4}z^2}} = \frac{g^2}{c}\frac{t}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{c^2}t^2}}$$

annehmen. Mithin ist

$$\dot{x}_0 = \frac{g^2}{c}\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{c^2}t^2}} = -c\sqrt{1 - \frac{g^2}{c^2}t^2} + a,$$

$$x_0 = -c\int \sqrt{1 - \frac{g^2}{c^2}t^2}\, dt + at + b$$
$$= -\frac{c^2}{2g}\left\{\arcsin\frac{gt}{c} + \frac{gt}{c}\sqrt{1 - \frac{g^2t^2}{c^2}}\right\} + at + b.$$

Setzt man das in Formel (6) ein, so bekommt man für die Seilkurve

$$\text{(7)} \quad \begin{cases} x = \frac{c^2}{2g}\left\{\arcsin\left(\frac{gs}{c^2} - \frac{gt}{c}\right) + \left(\frac{gs}{c^2} - \frac{gt}{c}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{gs}{c^2} - \frac{gt}{c}\right)^2}\right\} + at + b, \\ y = \frac{g}{2c^2}(s^2 - 2cts). \end{cases}$$

Um diese Bewegung unter Einfluß der Schwere, bei der ferner der Anfangspunkt $s = 0$ auf der Höhe $y = 0$ gehalten wird, aufrechtzuerhalten, muß man dem Anfangspunkt die Beschleunigung

$$\ddot{x}_0 = \frac{g^2}{c}\frac{t}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{c^2}t^2}}$$

erteilen.

Diese Bewegung ist deshalb von vornherein auf das Zeitintervall $0 \leqq t < \frac{c}{g}$ beschränkt. Ferner muß der Realität von x wegen

$$|s - ct| \leqq \frac{c^2}{g} \quad \text{für} \quad 0 \leqq s \leqq l, \quad 0 \leqq t < \frac{c}{g}$$

sein, was noch $l \leqq \frac{c^2}{g}$, also $S \geqq \varrho g l$, d. h. die konstante Fadenspannung größer als das Gewicht des Fadens verlangt.

Zur *Diskussion* kann man die zweite der Gleichungen (7) so schreiben:

$$y = \frac{g}{2c^2}((s - ct)^2 - c^2 t^2) = \frac{g}{2c^2}(s - ct)^2 - \frac{1}{2} g t^2,$$

womit man $s - ct = \mp \sqrt{\frac{2c^2}{g}\left(y + \frac{1}{2} g t^2\right)}$ erhält. Und da die Glieder $at + b$ belanglos sind, da sie nur eine gleichförmige Horizontalbewegung bedeuten, bekommt man x, das ja sonst nur eine Funktion von $s - ct$ ist, in der Form

$$x = F(y + \tfrac{1}{2} g t^2) + at + b;$$

d. h. man hat in einem mit der Beschleunigung g fallenden Raum ξ, η $(= y + \frac{1}{2} g t^2)$, der sich mit der beliebigen, konstanten Geschwindigkeit a horizontal bewegt, eine starre Kurve

$$\xi = F(\eta) = \mp \frac{c^2}{2g}\left\{\arcsin \frac{g}{c^2}\sqrt{\frac{2c^2}{g}\eta} + \frac{g}{c^2}\sqrt{\frac{2c^2}{g}\eta}\sqrt{1 - \frac{g^2}{c^4}\frac{2c^2}{g}\eta}\right\}$$

oder

$$\xi = \mp \frac{c^2}{2g}\left\{\arcsin \sqrt{\frac{2\eta g}{c^2}} + \sqrt{\frac{2\eta g}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{2g\eta}{c^2}}\right\}.$$

Setzt man $\frac{2g\eta}{c^2} = \sin^2\varphi$, also $\eta = \frac{c^2}{2g}\sin^2\varphi = \frac{c^2}{4g}(1 - \cos 2\varphi)$; also $s - ct = \mp \sin\varphi \cdot \frac{c^2}{g}$ und präzisiert man das Zeichen von φ so, daß $s - ct = \frac{c^2}{g}\sin\varphi$, so wird $\xi = \frac{c^2}{4g}(2\varphi + \sin 2\varphi)$ und man erkennt, daß man es mit einer gewöhnlichen, spitzen Zykloide zu tun hat.

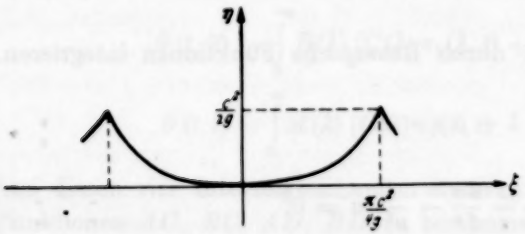

Fig. 6.

Diese Kurve fällt also; man muß aber beachten, daß der Anfangspunkt $s = 0$ gemäß $-ct = \frac{c^2}{g}\sin\varphi$ auf ihr wandert. Für den Endpunkt $s = l$ gilt $l - ct = \frac{c^2}{g}\sin\varphi$, also $\sin\varphi = \frac{g}{c^2}(l - ct)$. Dies ist möglich wegen $l \leqq \frac{c^2}{g}$ und $t < \frac{c}{g}$. Für den äußersten Wert $t = \frac{c}{g}$ müßte $\sin\varphi = \frac{g}{c^2}\left(l - \frac{c^2}{g}\right) = \frac{g}{c^2}l - 1$ sein, was ebenfalls statthaft ist.

3. *Ein Näherungsverfahren.* Wenn die Gleichung der Nr. 2,

$$\varrho\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)^2 - S\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\right)^2 = 0,$$

nicht genau erfüllt, die linke Seite aber klein ist, sei es, daß $\frac{\partial\vartheta}{\partial s}$, also die Krümmung, und $\frac{\partial\vartheta}{\partial t}$, also die Winkelgeschwindigkeit der Fadentangente klein sind, oder aber, daß die beiden Glieder sich nahezu das Gleichgewicht halten, so wird man sie für eine rohe Näherung vernachlässigen können und erhält statt der zweiten Gleichung (2) $\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} = 0$, also $S = S_1(t) + a(t)\,s$ mit $a(t) = \frac{S_2(t) - S_1(t)}{l}$, wenn $S_1(t)$ und $S_2(t)$ die beiden positiv vorausgesetzten Randwerte von S sind. Sie seien gegeben. S ist dann stets positiv. Damit wird aus der ersten Gleichung (2)

$$\varrho\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} = 2\,a(t)\frac{\partial\vartheta}{\partial s} + (S_1 + a\,s)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2}, \tag{8}$$

eine lineare, homogene Gleichung für ϑ. *Wir wollen noch annehmen, daß* S_2 *und* S_1 *proportional zueinander seien,* dann sind auch a und S_1 proportional und wir können mit $a(t) = \mu\,S_1(t)$ schreiben

$$\frac{\varrho}{S_1(t)}\cdot\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} = 2\,\mu\frac{\partial\vartheta}{\partial s} + (1 + \mu\,s)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2}.$$

Der alte Ansatz $\vartheta = u(s)\,v(t)$ gibt die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2v}{dt^2} - \lambda\frac{S_1(t)}{\varrho}v = 0 \tag{9 a}$$

und

$$-\lambda u + 2\mu\frac{du}{ds} + (1+\mu s)\frac{d^2u}{ds^2} = 0 \tag{9 b}$$

mit einer Konstanten λ.

Da $S > 0$, ist auch stets $1 + \mu\,s > 0$ für $0 \leqq s \leqq l$, auch (9 b) ist überall regulär.

Übrigens kann man (9 b) durch Besselsche Funktionen integrieren. Setzt man zunächst

$$1 + \mu\,s = z,$$

so wird aus (9 b)

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{du}{dz} - \frac{\lambda}{\mu^2 z}u = 0.$$

Durch die Transformation $z = -\frac{1}{4}\frac{\mu^2}{\lambda}\cdot x^2$, $y = x\cdot u$ erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)y = 0,$$

deren Lösung bekanntlich $A_1 J_1(x) + B_1 Y_1(x)$ ist. (J_1 die Besselsche, Y_1 die Neumannsche Funktion vom Parameterwert 1.) Also hat (9 b) die allgemeine Lösung

$$u = \frac{1}{\sqrt{z}}\left\{A J_1\left(\sqrt{\frac{-4\lambda}{\mu^2}}z\right) + B Y_1\left(\sqrt{\frac{-4\lambda}{\mu^2}}z\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\mu s}}\left\{A J_1\left(\sqrt{\frac{-4\lambda}{\mu^2}(1+\mu s)}\right) + B Y_1\left(\sqrt{\frac{-4\lambda}{\mu^2}(1+\mu s)}\right)\right\}.$$

Man wird $\lambda > 0$ nehmen. Dann gibt es zwei voneinander unabhängige Lösungen $u_1(s)$ und $u_2(s)$, von denen die erste für $s = 0$, die zweite für $s = l$ verschwindet, während die andere 1 ist. Dies erkennt man sowohl direkt aus den Eigenschaften der Besselschen Funktionen als auch daraus, daß man die Gleichung (9 b) durch die Transformation

$$u = \frac{1}{z} w$$

auf die Form

$$\frac{d^2 w}{d z^2} - \frac{\lambda}{\mu^2 z} w = 0$$

bringen kann, woraus die Behauptung unmittelbar folgt, weil stets $\frac{d^2 w}{d z^2} > 0$ ist.

(9 a) hat ein Fundamentalsystem $v_1(t)$ und $v_2(t)$ so, daß $\begin{cases} v_1(0) = 1, \dot{v}_1(0) = 0 \\ v_2(0) = 0, \dot{v}_2(0) = 1 \end{cases}$ ist. Setzt man jetzt das Integral an

$$\vartheta = \int_0^\infty u v d\lambda = \int_0^\infty [A(\lambda) u_1(\lambda, s) + B(\lambda) u_2(\lambda, s)]\,[C(\lambda) v_1(\lambda, t) + D(\lambda) v_2(\lambda, t)]\, d\lambda,$$

so ist

$$\vartheta(0, s) = \int_0^\infty [A(\lambda) u_1(\lambda, s) + B(\lambda) u_2(\lambda, s)]\, C(\lambda)\, d\lambda,$$

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)_{t=0} = \int_0^\infty [A(\lambda) u_1(\lambda, s) + B(\lambda) u_2(\lambda, s)] \cdot D(\lambda)\, d\lambda,$$

$$\vartheta(t, 0) = \int_0^\infty B(\lambda)\,[C(\lambda) v_1(\lambda, t) + D(\lambda) v_2(\lambda, t)]\, d\lambda,$$

$$\vartheta(t, l) = \int_0^\infty A(\lambda)\,[C(\lambda) v_1(\lambda, t) + D(\lambda) v_2(\lambda, t)]\, d\lambda.$$

Aus diesen vier Integralgleichungen erster Art wären die vier unbekannten Funktionen AC, BC, AD, BD zu bestimmen. Diese Aufgabe werde nicht weiter erörtert.

Ist aber ein freies Ende da, also $S_2(t) \equiv 0$, so wird $\mu = -\frac{1}{l}$

$$u = \frac{1}{\sqrt{l-s}}\{A \cdot J_1(\sqrt{-4\lambda(l-s)}) + B Y_1(\sqrt{-4\lambda(l-s)})\}.$$

Von dieser Lösung ist der erste Teil brauchbar, da J_1 den Faktor $\sqrt{-2\lambda(l-s)}$ trägt, der zweite aber nicht, da er für $s = l$ unendlich wird; also ist jetzt

$$\vartheta = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{l-s}} J_1\left(\sqrt{-4\lambda(l-s)}\right)\left(C(\lambda)\, v_1(\lambda, t) + D(\lambda)\, v_2(\lambda, t)\, d\lambda\right.$$

anzusetzen. Man kann jetzt zur Bestimmung von $C(\lambda)$ und $D(\lambda)$ wohl noch zwei Bedingungen ansetzen, aber nicht mehr vier. Etwa

$$\vartheta(0, s) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{l-s}} J_1\left(\sqrt{-4\lambda(l-s)}\right) C(\lambda)\, d\lambda,$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t}(0, s) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{l-s}} J_1\left(\sqrt{-4\lambda(l-s)}\right) D(\lambda)\, d\lambda.$$

Ist das andere Ende ($s = 0$) festgehalten, so ist das dortige S, also $S_1(t)$ als Reaktionsgröße unbekannt. Es ist die Frage, wie weit sie aus einer anderen Randbedingung, etwa über $\vartheta(t, 0)$ oder $\dot{\vartheta}(t, 0)$ bestimmt werden kann. Dazu siehe Nr. 5 am Schluß.

4. *Ein verallgemeinertes und schrittweise verbessertes Näherungsverfahren.* Eine Gleichung von der Form (8), nämlich die ursprüngliche Gleichung (2; 1)

$$\varrho \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial S}{\partial s} \frac{\partial \vartheta}{\partial s} + S \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2}$$

wird man, wenn $S > 0$ als gegeben aufgefaßt wird, nach Cauchy und Riemann mit folgenden Randbedingungen integrieren können. Auf OA sei $\vartheta(0, t)$ gegeben, auf CB sei $\vartheta(l, t)$ gegeben, ferner auf OC die Werte von $\vartheta(s, 0)$ und $\left(\frac{\partial \vartheta(s, t)}{\partial t}\right)_{t=0}$. Stetiger Anschluß in O und C vorausgesetzt. AP und BP seien je eine Charakteristik, d. h. eine zur Differentialgleichung $\varrho\, ds^2 = S\, dt^2$ zugehörige Integralkurve[7]). Die nötige Verallgemeinerung des Cauchyschen Satzes ist in der Literatur vorhanden[8]), die Verallgemeinerung der Riemannschen Methode ist leicht auszuführen. Wir wollen den behaupteten Satz als

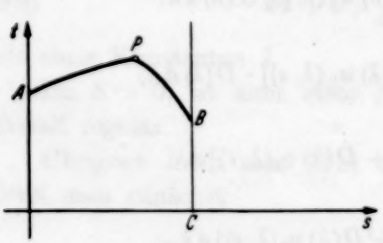

Fig. 7.

[7]) Vgl. Fußnote [4]).

[8]) Siehe etwa Mason, Math. Ann. **65** (1908), S. 570; A. Myller, ebenda **68** (1910), S. 75ff.; Rellich, ebenda **103**. Ältere Arbeiten von Picard, Goursat und Hadamard sind hier genannt.

richtig ansehen, unbeschadet dessen, daß eine sorgfältige Durcharbeitung erwünscht wäre. Daß die Gleichung (2, 2)

$$\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} - S\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)^2 = -\varrho\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)^2$$

wegen $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)^2 \geqq 0$ stets bei gegeben gedachtem ϑ unter Einführung der Randbedingungen $S = S_1(t)$ für $s = 0$, $S = S_2(t)$ für $s = l$ erfüllt werden kann, ist klar. *Auch ist leicht zu beweisen, daß, wenn* $S_1 > 0$, $S_2 > 0$, *auch stets* $S \geqq 0$ *ist* in $0 \leqq s \leqq l$. Denn würde S im Intervall negativ, so müßte ein Minimum mit negativem S vorhanden sein, also $\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} > 0$, was aber der Gleichung widerspricht; es müßten denn gleichzeitig an der Minimalstelle $\frac{\partial \vartheta}{\partial s}$ und $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$ gleich Null sein. Diese scheinbare Ausnahme kann aber auch leicht erledigt werden.

Nun schlagen wir folgendes Verfahren der schrittweisen Verbesserung ein. Wir lösen erst:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} = 0 \quad \text{zu} \quad S = S_1 + \frac{S_2 - S_1}{l}\, s$$

und dann Gleichung (8), aus der wir einen ersten Näherungswert $\vartheta_1(s, t)$ bestimmen. Mit diesem gehen wir in die Gleichung (2, 2)

$$\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} - S\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial s}\right)^2 = -\varrho\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial t}\right)^2;$$

und berechnen ein verbessertes S, so fahren wir fort. Der Konvergenzbeweis muß noch erbracht werden.

5. *Ein allgemeiner Satz über die möglichen Randbedingungen bei allgemeiner Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Setzt man diese voraus und gibt die Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit beliebig, hält das eine Ende fest, läßt das andere los, so entsteht ein Widerspruch, wenn nicht die Anfangsrichtung im festgehaltenen Punkt eine ganz bestimmte ist*[9]). Es sei zu Anfang $x = x_0(s)$, $y = y_0(s)$; $\dot{x} = u_0(s)$, $\dot{y} = v_0(s)$, wobei natürlich wegen $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = 1$ gewisse Bedingungen für diese vier Funktionen erfüllt sein müssen, nämlich

$$\text{(10)} \qquad \left(\frac{d x_0}{d s}\right)^2 + \left(\frac{d y_0}{d s}\right)^2 = 1 \quad \text{und} \quad \frac{d x_0}{d s}\frac{d u_0}{d s} + \frac{d y_0}{d s}\frac{d v_0}{d s} = 0.$$

Wenn nun der angehängte Index 0 allgemein die Werte für $t = 0$ bedeutet, so folgt aus den Bewegungsgleichungen (1) bei $X(t) \equiv 0$, $Y(t) = -\varrho g$ bis auf Glieder dritter Ordnung in t

$$x(s, t) = x_0(s) + u_0(s)t + \frac{1}{2\varrho}t^2\left\{\frac{\partial S}{\partial s}\cos\vartheta - S\sin\vartheta\,\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right\}_0,$$

$$y(s, t) = y_0(s) + v_0(s)t + \frac{1}{2\varrho}t^2\left\{-\varrho g + \frac{\partial S}{\partial s}\sin\vartheta + S\cos\vartheta\,\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right\}_0$$

[9]) Dazu siehe PAILLOUX, l. c.

und daraus

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{d x_0}{d s} + \frac{d u_0}{d s} t + \frac{1}{2\varrho} t^2 \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial s^2} \cos\vartheta - 2 \frac{\partial S}{\partial s} \sin\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial s} - \right.$$
$$\left. - S \cos\vartheta \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)^2 - S \sin\vartheta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} \right\}_0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{d y_0}{d s} + \frac{d v_0}{d s} t + \frac{1}{2\varrho} t^2 \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial s^2} \sin\vartheta + 2 \frac{\partial S}{\partial s} \cos\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial s} - \right.$$
$$\left. - S \sin\vartheta \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)^2 + S \cos\vartheta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} \right\}_0.$$

Daraus ergibt sich weiter außer (10) wegen $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = 1$ wieder bei Berücksichtigung von Gliedern zweiter Ordnung in t

$$0 = t^2 \left\{ \left(\frac{d u_0}{d s}\right)^2 + \left(\frac{d v_0}{d s}\right)^2 + \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} - S \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)^2 \right)_0 \right\};$$

benutzt ist dabei

$$\frac{d x_0}{d s} = \cos\vartheta_0, \quad \frac{d y_0}{d s} = \sin\vartheta_0.$$

Folglich muß S_0 die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 S_0}{d s^2} - S_0 k_0^2 = -\varrho \left[\left(\frac{d u_0}{d s}\right)^2 + \left(\frac{d v_0}{d s}\right)^2 \right] = -\varrho \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)_0^2$$

erfüllen[10]). Diese Gleichung hat bei gegebenem k_0^2 und $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)_0^2$ eine Lösung der Form

$$S = A(s) + C_1 B(s) + C_2 C(s),$$

wo $A(s)$ eine Partikularlösung ist, $B(s)$ und $C(s)$ der homogenen Gleichung genügen:

$$\frac{d^2 B}{d s^2} - k_0^2 B = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{d^2 C}{d s^2} - k_0^2 C = 0.$$

Man kann noch $B(0) = 0$, $\frac{d B}{d s}(0) = 1$; $C(l) = 0$, $\frac{d C}{d s}(l) = 1$ vorschreiben, und es ist nicht C proportional zu B, weil $k_0^2 \geqq 0$ ist. Da nun $S = 0$ für $s = l$ sein soll (freies Ende), so folgt

$$C_1 B(l) = -A(l) \quad \text{und} \quad S = A(s) - \frac{A(l)}{B(l)} B(s) + C_2 C(s).$$

Soll nun $x(0, t) \equiv 0$, $y_0(0, t) \equiv 0$ sein, so müßte außer $x_0(0) = 0$, $y_0(0) = 0$, $u_0(0) = 0$, $v_0(0) = 0$ noch

$$\left(\frac{\partial S}{\partial s} \cos\vartheta - S \sin\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \right)_{\substack{s=0 \\ t=0}} = 0,$$

$$\left(-\varrho g + \frac{\partial S}{\partial s} \sin\vartheta + S \cos\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \right)_{\substack{t=0 \\ s=0}} = 0$$

[10]) Das ist natürlich (2, 2).

erfüllt sein. D. h. aber

$$\left(\frac{\partial S}{\partial s}\right)_{0,0} = \varrho g \sin \vartheta_{0,0},$$

$$(S k)_{0,0} = \varrho g \cos \vartheta_{0,0}.$$

Der Doppelindex 0, 0 bedeutet: $t = 0$, $s = 0$.

Setzt man obigen Wert von S ein, so erhält man

$$A'(0) - \frac{A(l)}{B(l)} + C_2 C'(0) = \varrho g \sin \vartheta_{0,0},$$

$$k_{0,0}(A(0) + C_2 C(0)) = \varrho g \cos \vartheta_{0,0}.$$

$C(0)$ ist sicher nicht Null, da sonst $C(s)$ und $B(s)$ proportional sein müßten, also kann man aus der zweiten Gleichung C_2 eliminieren und in die erste einsetzen (falls nicht $k_{0,0} = 0$ ist) und erhält so eine Bedingung für $\vartheta_{0,0}$, wie behauptet wurde. Denn alle sonst vorkommenden Größen sind wohl bestimmt. Sollte aber $k_{0,0} = 0$ sein, so folgte dasselbe und zwar $\cos \vartheta_{0,0} = 0$. Gibt man beispielsweise $u_0 \equiv 0$, $v_0 \equiv 0$, $k =$ konst, so ist $S = C_2 \mathfrak{Sin}\, k(l-s)$ und die Gleichungen für C_2 und $\vartheta_{0,0}$ heißen

$$-C_2 k \mathfrak{Cof}\, kl = \varrho g \sin \vartheta_{0,0},$$

$$C_2 k \mathfrak{Sin}\, kl = \varrho g \cos \vartheta_{0,0},$$

also

$$\operatorname{tg} \vartheta_{0,0} = -\mathfrak{Ctg} \cdot kl.$$

Wenn etwa k sehr klein ist, der Faden zu Anfang nahezu gestreckt ist, wird $\operatorname{tg} \vartheta_{0,0}$ sehr groß negativ, also $\vartheta_{0,0}$ nahezu $-\frac{\pi}{2}$, d. h. der Faden muß zu Anfang nahezu senkrecht herabhängen.

(Eingegangen am 24. Dezember 1941.)

Der n-Teilungskörper eines abstrakten elliptischen Funktionenkörpers als Klassenkörper, nebst Anwendung auf den Mordell-Weilschen Endlichkeitssatz.

Herrn Konrad Knopp

zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

Helmut Hasse aus Göttingen, z. Z. in Berlin.

Inhalt.

Einleitung 48
§ 1. Der μ-Teilungskörper 51
§ 2. Die Kummer-Erzeugung und das Kummer-Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper 55
§ 3. Das Klassenkörper-Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper . . . 58
§ 4. Der Mordell-Weilsche Endlichkeitssatz 61

Einleitung.

Wir betrachten einen algebraischen Funktionenkörper K einer Unbestimmten vom Geschlecht $g = 1$ über einem vollkommenen Konstantenkörper Ω.

In einigen meiner früheren Arbeiten[1]), sowie in zwei Arbeiten von Deuring[2]), die sich zur Hauptsache mit dem Beweis der Riemannschen Vermutung im Falle eines endlichen Ω befassen, spielt der μ-Teilungskörper $K/K\mu$ von K/Ω, wo μ ein beliebiger Multiplikator von K/Ω ist, eine wichtige Rolle. Allerdings handelt es sich dort genauer um den μ-Teilungskörper $\bar{K}/\bar{K}\mu$ der algebraisch-abgeschlossenen Konstantenerweiterung $\bar{K}/\bar{\Omega}$ von K/Ω[3]); die ganze Theorie wird nämlich in diesen Arbeiten, ehe die Anwendung auf endliches Ω erfolgt, zunächst für algebraisch-abgeschlossenes Ω entwickelt.

[1]) H. Hasse, Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper I, II, III. J. reine angew. Math. **175** (1936); im folgenden zitiert mit H I, II, III.

[2]) M. Deuring, Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper I, II. J. reine angew. Math. **177** (1937); **183** (1940); im folgenden zitiert mit D I, II.

[3]) Ich verwende ohne nochmalige Erklärung eine Reihe von Begriffsbildungen und Ausdrucksweisen, wie ich sie in einer im Druck befindlichen Arbeit entwickelt habe: H. Hasse, Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionenkörper. Jahresber. Deutsche Math.-Ver. **52** (1942); im folgenden zitiert mit A.

Im Falle, daß der Grad $N(\mu)$ des μ-Teilungskörpers $\bar{K}/\bar{K}\mu$ nicht durch die Charakteristik von Ω teilbar ist, erweist sich $\bar{K}/\bar{K}\mu$, wie wir unten noch einmal näher ausführen werden, als unverzweigt und abelsch, mit der Gruppe der Translationen um die μ-Teilungsklassen als Galois-Gruppe, und mit dem folgenden einfachen Zerlegungsgesetz: Jeder Primdivisor $\bar{\mathfrak{p}}\mu$ von $\bar{K}\mu/\bar{\Omega}$ zerfällt in $N(\mu)$ verschiedene Primdivisoren $\mathfrak{q}$ von $\bar{K}/\bar{\Omega}$, nämlich in die $N(\mu)$ Lösungen von $\mu\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}$.

Es ist nun von Interesse zu fragen, welches Zerlegungsgesetz im μ-Teilungskörper $K/K\mu$ von K/Ω selbst gilt, wenn nur Ω von vornherein so umfassend vorausgesetzt wird, daß $K/K\mu$ galoissch und damit abelsch ist; die letztere Voraussetzung kann durch eine endlich-algebraische Konstantenerweiterung verwirklicht werden. Zu dieser Frage stellen wir folgende allgemeine Bemerkung voran.

In der Theorie der endlich-algebraischen Zahlkörper sind die Restklassenkörper der Primdivisoren endliche Körper und als solche durch alleinige Angabe ihres Grades gekennzeichnet. Daher genügt in dieser Theorie zur Beschreibung eines Zerlegungsgesetzes für einen galoisschen Relativkörper (von den endlich vielen verzweigten Primdivisoren abgesehen) die Angabe des gemeinsamen Relativgrades der Primfaktoren für jeden Primdivisor des Grundkörpers. In der Theorie der algebraischen Funktionenkörper über einem Körper Ω sind die Restklassenkörper der Primdivisoren endlich-algebraische Erweiterungen von Ω, also nicht mehr durch alleinige Angabe ihres Grades gekennzeichnet. Daher genügt hier zur Beschreibung eines Zerlegungsgesetzes nicht mehr die bloße Angabe des Relativgrades der Primfaktoren; es müssen vielmehr ihre Restklassenkörper selbst als Relativkörper über Ω angegeben werden. Für einen galoisschen (abelschen) Relativkörper sind diese Restklassenkörper selbst galoissch (abelsch) über Ω und hängen nur von dem Primdivisor des Grundkörpers ab (Theorie der Zerlegungsgruppe).

Wir begnügen uns im folgenden mit dem Studium der Zerlegung der Primdivisoren ersten Grades $\mathfrak{p}\mu$ von $K\mu/\Omega$. Die $\mathfrak{p}\mu$ zusammensetzenden Primdivisoren $\mathfrak{q}$ von K/Ω ergeben sich, indem man die Lösungen $\bar{\mathfrak{q}}$ von $\mu\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$ in $\bar{K}/\bar{\Omega}$ zu vollständigen Systemen in bezug auf Ω konjugierter zusammenfaßt. Es handelt sich dann um die Angabe des nur von $\mathfrak{p}$ abhängigen Restklassenkörpers

$$\Omega_{\mathfrak{p}} = \Omega(\mathfrak{q}) = \Omega(\bar{\mathfrak{q}}),$$

der durch Adjunktion der Reste der Elemente aus K für irgendein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges $\mathfrak{q}$ (oder — was wesentlich dasselbe — für irgendein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges $\bar{\mathfrak{q}}$) zu Ω entsteht. Ein Zerlegungsgesetz für die Primdivisoren ersten Grades $\mathfrak{p}\mu$ von $K\mu/\Omega$ muß diese Restklassenkörper $\Omega_{\mathfrak{p}}$ durch Eigenschaften von $\mathfrak{p}$ kennzeichnen.

Wir werden nun im folgenden ein solches Zerlegungsgesetz für den Fall eines natürlichen Multiplikators $\mu = n$ herleiten, und zwar wird sich zeigen, daß in diesem Falle ein umkehrbar eindeutiger und isomorpher Zusammenhang zwischen der Kummer-Erzeugung des Restklassenkörpers $\Omega_\mathfrak{p}$ und der n-Klasse des Primdivisors $\mathfrak{p}$ besteht. Dabei werden zwei Primdivisoren ersten Grades $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ von K/Ω dann und nur dann zur gleichen n-Klasse gerechnet, wenn die von $\frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{p}}$ repräsentierte rationale Nullklasse die n-te Potenz einer rationalen Nullklasse von K/Ω ist. Das Zerlegungsgesetz ist demnach vom Typus der aus der Klassenkörpertheorie der algebraischen Zahlkörper bekannten Zerlegungsgesetze, und es hat in seiner Isomorphieaussage überdies eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Artinschen Reziprozitätsgesetz der Klassenkörpertheorie. Wir kommen unten darauf noch näher zurück.

Dieses Zerlegungsgesetz hat sich in einem von mir geleiteten Göttinger Seminar[4]) unter Mitarbeit von Frl. H. v. Caemmerer ergeben, und zwar bei unseren Bemühungen, den bekannten Endlichkeitssatz von Weil[5]) reinalgebraisch zu beweisen. Bei diesem Endlichkeitssatz handelt es sich um einen algebraischen Funktionenkörper K/Ω einer Unbestimmten von beliebigem Geschlecht g über einem endlich-algebraischen Zahlkörper Ω als Konstantenkörper. Der Satz besagt, daß die rationale Nullklassengruppe D von K/Ω (die in bekannter Weise als Additionsgruppe der rationalen g-gliedrigen Punktgruppen von K/Ω darstellbar ist) endlichen Rang hat. Der Weilsche Beweis dieses Satzes stützt sich auf die analytische Theorie der n-Teilung der zu K/Ω gehörigen Abelschen Funktionen, und zwar kommt er mit der speziellen Teilungszahl $n = 2$ aus. Es wird dort in analytischer Form ein Zusammenhang zwischen einer ad hoc konstruierten Klasseneinteilung der rationalen Punktgruppen und der durch Thetafunktionen dargestellten Kummer-Erzeugung des Zweiteilungskörpers entwickelt, der für $g = 1$ in den Spezialfall $n = 2$ des in dieser Arbeit behandelten Zerlegungsgesetzes übergeht. Für $g = 1$ geht der Weilsche Endlichkeitssatz bereits auf Mordell[6]) zurück, dessen Beweis[7]) sich auf die klassischen Zweiteilungsformeln der elliptischen Funktionen stützt und wesentlich frei von Analysis ist.

Wenn ich hier aus dem Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper einen neuen Beweis des Mordell-Weilschen Endlichkeitssatzes für $g = 1$ herleite,

---

[4]) Eine Ausarbeitung dieses Seminars vom S. S. 1938 befindet sich in der Bücherei des Mathematischen Instituts Göttingen.

[5]) A. Weil, L'arithmétique sur les courbes algébriques. Acta math. **52** (1928).

[6]) L. J. Mordell, On the rational solutions of the indeterminate equations of the third and fourth degree. Proc. Cambridge Phil. Soc. **21** (1922), part 3.

[7]) Siehe auch die Weilsche Fassung dieses Beweises: A. Weil, Sur un théorème de Mordell. Bull. Scienc. Math. **54** (1930).

so geschieht das aus den folgenden drei Gründen: Erstens arbeitet der ursprüngliche MORDELLsche Beweis und auch die WEILsche Fassung mit den speziellen Formeln der Zweiteilung der elliptischen Funktionen. Er mag deshalb zwar kürzer sein, ist aber sicher weniger durchsichtig als mein Beweis. Zweitens erscheint es mir befriedigend, den WEILschen Endlichkeitssatz, der ja eine ganz allgemeine Strukturaussage ist, auch im Zuge der allgemeinen Strukturtheorie der algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten zu beweisen und ihn so in dieser Theorie an wohlbestimmter Stelle fest zu verankern. Drittens sehe ich in der Befreiung von den speziellen Formeln der Zweiteilung und in der Einordnung in die allgemeine Strukturtheorie für $g = 1$ eine wesentliche Vorarbeit für einen rein-algebraischen Beweis des WEILschen Endlichkeitssatzes auch für $g > 1$.

Einen solchen allgemeinen Beweis zu geben, und dabei auch die bisher nur ganz wenigen restlos klare WEILsche Distributionslehre für algebraische Funktionenkörper mehrerer Unbestimmten in derjenigen Klarheit, Prägnanz und strukturellen Durchsichtigkeit zu entwickeln, durch die sich die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionenkörper auszeichnet, erscheint mir als eine sehr lohnende und dankenswerte Aufgabe. Neben dieser Aufgabe, für die das hier bewiesene Zerlegungsgesetz auf den n-Teilungskörper des ABELschen Funktionenkörpers eines algebraischen Funktionenkörpers K/Ω vom Geschlecht $g > 1$ zu verallgemeinern ist, wäre es ferner interessant, in diesem Zerlegungsgesetz noch die hier gemachten Beschränkungen auf Primdivisoren ersten Grades und auf natürliche Multiplikatoren aufzuheben, was wohl beides nicht schwer ist.

§ 1.

Der μ-Teilungskörper[8]).

1. Es sei μ ein (eigentlicher) Meromorphismus von K/Ω (H II, § 2), also ein Isomorphismus von K/Ω auf einen Teilkörper $K\mu/\Omega$, der als hinterer Operator geschrieben wird. Der Relativkörper $K/K\mu$ heißt der μ-Teilungskörper von K/Ω. Sein Relativgrad $N(\mu) = [K : K\mu]$ (Norm von μ) ändert sich nicht bei Übergang zu einer Konstantenerweiterung von K/Ω. Dem Meromorphismus μ entspricht umkehrbar eindeutig eine (nicht-konstante) Korrespondenz von K/Ω auf sich (D I, §§ 2, 5), die als vorderer Operator

[8]) Die in diesem Paragraphen zusammengestellten Tatsachen finden sich im wesentlichen bereits in H II, § 2, D I, §§ 2, 5 und D II, § 4. Jedoch ist dort die Theorie des μ-Teilungskörpers nicht Selbstzweck, und außerdem lassen sich die in H II gegebenen Beweise zum großen Teil durch die Methodik von D I, II beträchtlich vereinfachen. Daher gebe ich hier eine kurze übersichtliche Zusammenstellung der wesentlichen Tatsachen über den μ-Teilungskörper.

geschrieben wird. Sie stellt sich im Bereich der algebraischen Punkte $\bar{\mathfrak{q}}$ von K/Ω (A, §1, 3) durch die Formel dar:

$$\mu\,\bar{\mathfrak{q}} = N_{\bar{K}/\bar{K}\mu}(\bar{\mathfrak{q}})\,\mu^{-1}. \tag{1}$$

Durch Anwendung dieser Korrespondenz auf die algebraische Nullklassengruppe $\bar{D}$ von K/Ω (A, §4, 1) entsteht der μ zugeordnete Multiplikator von K/Ω auf sich (D I, § 4), den wir hier unmißverständlich ebenfalls mit μ bezeichnen. Er stellt sich als ein Endomorphismus (Homomorphismus in sich) der Klassengruppe $\bar{D}$ dar. Mit $\mu\bar{D}$ bzw. $\bar{D}_\mu$ seien, wie in A, §8, 3, die Gruppen der durch Ausübung von μ auf Klassen aus $\bar{D}$ entstehenden bzw. 1 werdenden Klassen bezeichnet. Es gilt:

Zu jedem algebraischen Punkt $\bar{\mathfrak{p}}$ von K/Ω gibt es einen algebraischen Punkt $\bar{\mathfrak{q}}$ von K/Ω mit $\mu\,\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}$, und wenn $N(\mu)$ nicht durch Char. Ω teilbar ist, gibt es zu jedem $\bar{\mathfrak{p}}$ genau $N(\mu)$ verschiedene solche $\bar{\mathfrak{q}}$.

Es ist also $\mu\bar{D} = \bar{D}$, d. h. μ stellt sich als Automorphismus von $\bar{D}$ dar; und wenn $N(\mu)$ nicht durch Char. Ω teilbar ist, hat $\bar{D}_\mu$ die Ordnung $N(\mu)$.

Beweis[9]). Die Beziehung $\mu\,\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}$ ist nach (1) gleichbedeutend damit, daß $\bar{\mathfrak{q}}$ einer derjenigen algebraischen Punkte von K/Ω ist, die in dem algebraischen Punkt $\bar{\mathfrak{p}}\,\mu$ von $K\,\mu/\Omega$ enthalten sind. Hiernach besitzt $\mu\,\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}$ für jedes $\bar{\mathfrak{p}}$ eine Lösung $\bar{\mathfrak{q}}$. Durch Division mit einer festen Beziehung $\mu\,\bar{\mathfrak{q}}_0 = \bar{\mathfrak{p}}_0$ folgt daraus $\mu\bar{D} = \bar{D}$. Die Zerlegung des Primdivisors $\bar{\mathfrak{p}}\,\mu$ von $\bar{K}\,\mu/\bar{\Omega}$ in Primdivisoren $\bar{\mathfrak{q}}$ von $\bar{K}/\bar{\Omega}$ hat ferner nach dem Gesagten die Form

$$\bar{\mathfrak{p}}\,\mu = \prod_{\mu\,\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}} \bar{\mathfrak{q}}^{e_{\bar{\mathfrak{q}}}} \quad \text{mit} \quad \sum_{\mu\,\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}} e_{\bar{\mathfrak{q}}} = N(\mu),$$

wo die Verzweigungsordnungen $e_{\bar{\mathfrak{q}}}$ zunächst nicht bekannt sind. Die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren in dieser Zerlegung ist gleich der Lösungsanzahl von $\mu\,\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}$. Durch Division mit $\mu\,\bar{\mathfrak{q}}_0 = \bar{\mathfrak{p}}$, wo $\bar{\mathfrak{q}}_0$ eine feste Lösung ist, folgt, daß diese Anzahl gleich der Ordnung von $\bar{D}_\mu$ und daher von $\bar{\mathfrak{p}}$ unabhängig ist. Ist also $N(\mu)$ nicht durch Char. Ω teilbar, so daß $\bar{K}/\bar{K}\,\mu$ separabel ist und daher mindestens ein $\bar{\mathfrak{p}}\,\mu$ unverzweigt bleibt, so sind notwendig alle $\bar{\mathfrak{p}}\,\mu$ unverzweigt, d. h. alle $e_{\bar{\mathfrak{q}}} = 1$, und $\bar{D}_\mu$ hat die Ordnung $\sum_{\mu\,\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}} 1 = N(\mu)$, wie behauptet. Der Beweis ergibt überdies:

---

[9]) Siehe schon H II, § 2 und für beliebiges Geschlecht A, § 8, 3. Der hier gegebene Beweis ersetzt die Anwendung der Relativgeschlechtsformel in H II, § 2 durch eine direktere Schlußweise, wie es für die Verallgemeinerung in A, §8, 3 erforderlich war. Für den hier beiseite gelassenen Fall, daß $N(\mu)$ durch Char. Ω teilbar ist, siehe H II, § 2.

Ist $N(\mu)$ nicht durch Char. Ω teilbar, so ist $\bar{K}/\bar{K}\mu$ unverzweigt, und das Zerlegungsgesetz für $\bar{K}/\bar{K}\mu$ lautet:

$$\bar{\mathfrak{p}}\,\mu = \prod_{\mu\bar{\mathfrak{q}}=\bar{\mathfrak{p}}} \bar{\mathfrak{q}}.$$

2. Es sei A eine rationale Nullklasse von K/Ω (A, § 4, 1). Ferner sei n eine natürliche Zahl und $\mathfrak{o}$ ein rationaler Punkt von K/Ω; die Existenz eines solchen kann auf Grund einer endlich-algebraischen Konstantenerweiterung vorausgesetzt werden. Schließlich bedeute $\mathfrak{x}$ einen transzendenten Punkt von K/Ω (A, § 5, 2). Durch die Äquivalenzen

$$\tau_A\,\mathfrak{x} \sim \mathfrak{x}\,A, \quad \frac{n_0\,\mathfrak{x}}{\mathfrak{o}} \sim \left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{o}}\right)^n$$

werden dann Meromorphismen τ_A, n_0 von K/Ω definiert (A, § 6), indem durch $\mathfrak{x} \to \tau_A\,\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x} \to n_0\,\mathfrak{x}$ Meromorphismen des zu K/Ω isomorphen Körpers $\mathsf{K} = \Omega(\mathfrak{x})$ gegeben sind. τ_A heißt die Translation um die Klasse A und n_0 die n-Multiplikation mit dem Bezugspunkt $\mathfrak{o}$. Aus dem Additionstheorem (D I, § 2) ergeben sich[10]) für die zugeordneten Korrespondenzen von K/Ω im Bereich der algebraischen Punkte $\bar{\mathfrak{q}}$ von K/Ω die zur Definition von τ_A, n_0 analogen Formeln:

$$\tau_A\,\bar{\mathfrak{q}} \sim \bar{\mathfrak{q}}\,A, \quad \frac{n_0\,\bar{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{o}} \sim \left(\frac{\bar{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{o}}\right)^n.$$

Die diesen Korrespondenzen zugeordneten Multiplikatoren stellen sich demgemäß durch die Formeln dar:

$$\tau_A\,\bar{C} = \bar{C}, \quad n_0\,\bar{C} = \bar{C}^n,$$

wo $\bar{C}$ die algebraischen Nullklassen von K/Ω durchläuft. Die Translationen τ_A lassen also als Multiplikatoren die algebraischen Nullklassen von K/Ω invariant; die n-Multiplikation n_0 ist als Multiplikator unabhängig vom Bezugspunkt $\mathfrak{o}$ und bedeutet einfach die Potenzierung mit n in der Gruppe $\bar{D}$. Die Translationen τ_A sind Automorphismen von K/Ω, es ist also $N(\tau_A) = 1$. und nach (1) gilt für sie:

$$\tau_A\,\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{q}}\,\tau_A^{-1}.$$

Sie lassen hiernach nicht nur als Multiplikatoren, sondern auch als Automorphismen die Klassen aus $\bar{D}$ invariant. Für die n-Multiplikation n_0 gilt $N(n_0) = n^2$[11]). Der zugehörige Teilkörper Kn_0 hängt nicht vom Bezugspunkt $\mathfrak{o}$ ab, kann also einfach als Kn bezeichnet werden. K/Kn ist dann der n-Teilungskörper von K/Ω.

---

[10]) Man nehme die hier auftretenden Körper K, K als Körper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}$ im Sinne von D I, § 2 und $\mathfrak{x}$, $\tau_A\,\mathfrak{x}$, $n_0\,\mathfrak{x}$, ... als korrespondenzerzeugende Divisoren $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{R} = \mathfrak{K}\mathfrak{K}$ im dortigen Sinne.

[11]) Diese wichtige Formel ergibt sich am einfachsten gemäß D II, § 4. Mein früher aus H I und H III, § 1 kombinierter rechnerischer Beweis ist durch diese einfache begriffliche Schlußweise als überholt anzusehen.

3. Ist wieder μ irgendein Meromorphismus von K/Ω, so heißen die Klassen $\overline{J}$ aus der Gruppe $\overline{D}_\mu$, also die Lösungen von $\mu\overline{J} = 1$ in der Gruppe $\overline{D}$, die μ-Teilungsklassen von K/Ω. Durch eine endlich-algebraische Konstantenerweiterung kann erreicht werden, daß sie rational sind; wir bezeichnen sie dann mit J, ihre Gruppe mit D_μ. Im Anschluß an die oben ausgesprochenen Sätze gilt:

Ist $N(\mu)$ nicht durch Char. Ω teilbar, und sind die μ-Teilungsklassen von K/Ω rational, so ist der μ-Teilungskörper $K/K\mu$ abelsch, mit der zu D_μ isomorphen Gruppe $\mathfrak{T}_\mu$ der Translationen τ_J um die μ-Teilungsklassen J als Galoisgruppe.

Beweis [12]). Da alle Lösungen $\bar{\mathfrak{q}}$ von $\mu\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}$ aus einer festen $\bar{\mathfrak{q}}_0$ in der Form

$$\bar{\mathfrak{q}} \sim \bar{\mathfrak{q}}_0 J, \quad \text{also} \quad \bar{\mathfrak{q}} = \tau_J \bar{\mathfrak{q}}_0 = \bar{\mathfrak{q}}_0 \tau_J^{-1}$$

entstehen, wo J die μ-Teilungsklassen durchläuft, kann das Zerlegungsgesetz für $\overline{K}/\overline{K}\mu$ in der Form

$$\bar{\mathfrak{p}}\mu = \prod_J \tau_J \bar{\mathfrak{q}}_0 = \prod_J \bar{\mathfrak{q}}_0 \tau_J^{-1}$$

geschrieben werden. Hiernach lassen die Translationsautomorphismen τ_J alle algebraischen Punkte $\bar{\mathfrak{p}}\mu$ und daher alle Divisoren $\mathfrak{a}\mu$ von $K\mu/\Omega$ invariant. Sie können dann für die Elemente $z\mu$ aus $K\mu$ nur die Multiplikation mit Faktoren $\neq 0$ aus Ω bewirken. Durch Betrachtung von $z\mu + 1$ folgt, daß diese Faktoren durchweg $= 1$ sind. Daher sind die τ_J Automorphismen von $K/K\mu$. Da ihre Anzahl mit dem Grad $N(\mu)$ von $K/K\mu$ übereinstimmt, ergibt sich die Behauptung.

4. Für die Elemente z aus K hat man einerseits

$$z\mu \equiv (z\mu)\,(\bar{\mathfrak{q}}) \bmod \bar{\mathfrak{q}}, \quad \text{also auch} \quad \bmod N_{\overline{K}/\overline{K}\mu}(\bar{\mathfrak{q}})$$

und daher nach (1)

$$z \equiv (z\mu)\,(\bar{\mathfrak{q}}) \bmod \mu\bar{\mathfrak{q}},$$

während andererseits natürlich

$$z \equiv z(\mu\bar{\mathfrak{q}}) \bmod \mu\bar{\mathfrak{q}}$$

ist. Durch Vergleich ergibt sich die *Restformel* (H II, § 2):

$$(2) \qquad (z\mu)\,(\bar{\mathfrak{q}}) = z(\mu\bar{\mathfrak{q}}).$$

Dabei können die Reste auch ∞ sein; (2) ergibt sich unter Einschluß dieses Falles, indem man neben z auch $\frac{1}{z}$ betrachtet, oder also von einem homogenen Elementsystem $z_0 : z_1 = 1 : z$ ausgeht (A, § 3, 1). In (2) steckt demnach als Teilaussage: Dann und nur dann ist $z\mu$ ganz für $\bar{\mathfrak{q}}$, wenn z ganz für $\mu\bar{\mathfrak{q}}$ ist.

---

[12]) Für beliebiges Geschlecht siehe wieder A, § 8, 5.

Wendet man die Restformel (2) auf das Berechnungsschema der Distributionen [A, § 9, (1)—(4)] an, so ergibt sich die analoge Restformel:

$$(3) \qquad (\mathfrak{a}\mu)\,(\bar{\mathfrak{q}}) \doteq \mathfrak{a}\,(\mu\bar{\mathfrak{q}})$$

für ganze Divisoren $\mathfrak{a}$ von K/Ω. Dabei gilt sogar $=$ statt nur $\doteq$, wenn die beiden Distributionen mittels einer homogenen M-Basis $x_0, \ldots, x_n$ von K/Ω (A, § 3, 2) und der ihr meromorph zugeordneten $M\mu$-Basis $x_0\mu, \ldots, x_n\mu$ von $K\mu/\Omega$ gebildet werden. Beim Beweis beachte man, daß nach dem zuvor Gesagten einer für $\mu\bar{\mathfrak{q}}$ primitiven Normierung von $x_0, \ldots, x_n$ eine für $\bar{\mathfrak{q}}$ primitive Normierung von $x_0\mu, \ldots, x_n\mu$ entspricht.

§ 2.

Die Kummer-Erzeugung und das Kummer-Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper.

Es sei n eine natürliche Zahl. Wir betrachten den n-Teilungskörper K/Kn von K/Ω. Dabei machen wir durchweg folgende drei Voraussetzungen, ohne sie immer zu wiederholen:

a) *Es gibt einen rationalen Punkt* $\mathfrak{o}$ *von* K/Ω.

b) *Die n-Teilungsklassen von K/Ω sind rational.*

c) *n ist nicht durch Char. Ω teilbar.*

a) und b) können durch eine endlich-algebraische Konstantenerweiterung verwirklicht werden, c) wird der Einfachheit halber vorausgesetzt. a) ist schon für die Definition des n-Teilungskörpers gemäß § 1 erforderlich, b) und c) sichern die in § 1 ausgesprochenen Tatsachen für ihn.

1. Kurz zusammengefaßt hat man unter den Voraussetzungen a), b), c) folgenden Tatbestand:

Die n-Teilungsklassen J, also die Lösungen von $J^n = 1$, bilden eine abelsche Gruppe D_n von der Ordnung n^2 und vom Typus (n, n); letzteres ergibt sich gruppentheoretisch, indem man neben n die Teiler von n betrachtet. Der n-Teilungskörper K/Kn ist unverzweigt und abelsch, mit der zu D_n isomorphen Gruppe $\mathfrak{T}_n$ der Translationen τ_J um die n-Teilungsklassen J als Galoisgruppe. Das Zerlegungsgesetz für die algebraisch-abgeschlossene Konstantenerweiterung $\overline{K}/\overline{K}n$ (oder also das Zerlegungsgesetz der algebraischen Punkte für K/Kn) lautet:

$$\bar{\mathfrak{p}}^{n_\mathfrak{o}} = \prod_{n_\mathfrak{o}\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}} \bar{\mathfrak{q}}, \quad \text{wobei} \quad \frac{\mathfrak{o}^{n_\mathfrak{o}\bar{\mathfrak{q}}}}{\mathfrak{o}} \sim \left(\frac{\bar{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{o}}\right)^n.$$

Man beachte, daß zur Formulierung dieses Zerlegungsgesetzes ein rationaler Bezugspunkt $\mathfrak{o}$ und damit einer der zum Multiplikator n gehörigen Meromorphismen, nämlich $n_\mathfrak{o}$, ausgezeichnet werden muß, obwohl der Relativkörper K/Kn selbst unabhängig von $\mathfrak{o}$ ist. Entsprechendes gilt auch für die Formulierung der weiteren Ergebnisse.

2. Wie in der Theorie der Kummer-Erzeugungen üblich, schreiben wir für Elemente z, z' aus K:

$$z \underset{n}{=} z' \text{ in } K, \text{ wenn } z' = zc^n \text{ mit } c \neq 0 \text{ aus } K,$$

und reden in diesem Sinne von den n-Klassen aus K. Unter den Voraussetzungen a), b) folgern wir zunächst:

Kummer-Erzeugung des n-Teilungskörpers. *Ω enthält die n-ten Einheitswurzeln. Dementsprechend besitzt K/Kn eine Kummer-Erzeugung. Diese lautet:*

$$K = Kn(\sqrt[n]{z_J\, n_\mathfrak{o}}).$$

Dabei ist das Elementsystem $z_J\, n_\mathfrak{o}$ aus Kn folgendermaßen erklärt: Es gibt in K ein Elementsystem

$$w_J \cong \frac{\mathfrak{i}\, n_\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}\, n_\mathfrak{o}},$$

wo $\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}$ das auf $\mathfrak{o}$ bezogene Repräsentantensystem der n-Teilungsklassen J durchläuft. Damit ist

$$z_J\, n_\mathfrak{o} = w_J^n.$$

Das zugeordnete Elementsystem z_J aus K ist also durch

$$z_J \cong \left(\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}\right)^n$$

mit bestimmter Normierung der Faktoren aus Ω gegeben.

Beweis. Wegen $J^n = 1$ ist zunächst klar, daß es zu jeder n-Teilungsklasse J ein Element z_J aus K mit

$$z_J \cong \left(\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}\right)^n, \quad \text{also} \quad z_J\, n_\mathfrak{o} \cong \left(\frac{\mathfrak{i}\, n_\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}\, n_\mathfrak{o}}\right)^n$$

gibt. Nach dem Zerlegungsgesetz für $\bar{K}/\bar{K}n$ ist nun

$$\mathfrak{i}\, n_\mathfrak{o} = \prod_J \tau_J\, \bar{\mathfrak{i}}_0, \quad \mathfrak{o}\, n_\mathfrak{o} = \prod_J \tau_J\, \bar{\mathfrak{o}}_0,$$

wo $\bar{\mathfrak{i}}_0$, $\bar{\mathfrak{o}}_0$ feste (nicht notwendig rationale) Lösungen von

$$n_\mathfrak{o}\, \bar{\mathfrak{i}}_0 = \mathfrak{i}, \quad n_\mathfrak{o}\, \bar{\mathfrak{o}}_0 = \mathfrak{o}$$

sind. Wegen der Invarianz der Nullklassen bei Translationen folgt daraus die Äquivalenz in $\bar{K}$:

$$\frac{\mathfrak{i}\, n_\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}\, n_\mathfrak{o}} = \prod_J \tau_J \left(\frac{\bar{\mathfrak{i}}_0}{\bar{\mathfrak{o}}_0}\right) \sim \left(\frac{\bar{\mathfrak{i}}_0}{\bar{\mathfrak{o}}_0}\right)^{n^2}.$$

Nach der Definition von $n_\mathfrak{o}$ gilt ferner in $\bar{K}$:

$$\left(\frac{\bar{\mathfrak{i}}_0}{\bar{\mathfrak{o}}_0}\right)^n \sim n_\mathfrak{o}\left(\frac{\bar{\mathfrak{i}}_0}{\bar{\mathfrak{o}}_0}\right) = \frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}, \quad \text{also} \quad \left(\frac{\bar{\mathfrak{i}}_0}{\bar{\mathfrak{o}}_0}\right)^{n^2} \sim \left(\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}\right)^n \sim 1.$$

Die damit in $\bar{K}$ festgestellte Beziehung

$$\frac{\mathfrak{i}\, n_\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}\, n_\mathfrak{o}} \sim 1$$

gilt wegen der Invarianz der Divisorenäquivalenz auch in K; denn $\mathfrak{i}^{n_0}$, $\mathfrak{o}^{n_0}$ sind ganze Divisoren von K/Ω. Hiernach gibt es zu jeder n-Teilungsklasse J ein Element w_J aus K mit

$$w_J \cong \frac{\mathfrak{i}^{n_0}}{\mathfrak{o}^{n_0}}.$$

Die obengenannten Elemente z_J lassen sich dann durch Faktoren aus Ω so normieren, daß

$$z_J^{n_0} = w_J^n$$

gilt. Eine zulässige Änderung der w_J um Faktoren $\neq 0$ aus Ω ergibt für die z_J eine Änderung um Faktoren $\neq 0$ aus Ω^n, so daß die n-Klassen der normierten z_J in K eindeutig festliegen. Der Multiplikation der J:

$$J_1 J_2 = J$$

entspricht die Multiplikation der $\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}$ bis auf Faktoren $\neq 0$ aus K, also die Multiplikation der w_J bis auf Faktoren $\neq 0$ aus K^n, und daher die Multiplikation der z_J bis auf Faktoren $\neq 0$ aus K^n, d. h. die n-Klassenmultiplikation der z_J in K:

$$z_{J_1} z_{J_2} \underset{n}{=} z_J \text{ in } K.$$

Da $z_J \underset{n}{=} 1$ in K nur für $J = 1$ gilt, repräsentieren also die z_J eine n-Klassengruppe in K, die zur Gruppe D_n der n-Teilungsklassen J und damit zur Galoisgruppe $\mathfrak{T}_n$ von K/K^n isomorph ist. Hat insbesondere J die genaue Ordnung n, so ist $w_J^n = z_J^{n_0}$ die früheste in K^n gelegene Potenz von w_J. Da K/K^n galoissch ist, sind also die n-ten Einheitswurzeln in K^n und daher in Ω enthalten. Aus der festgestellten Isomorphie folgt dann nach der Theorie der Kummer-Erzeugungen die Behauptung.

Die vollen n-Klassen der z_J in K ergeben übrigens gerade diejenigen Elemente aus K, die n-te Potenzen von Divisoren (nullten Grades) von K/Ω sind, jedes solche Element in einer bestimmten Normierung durch einen Faktor $\neq 0$ aus Ω.

3. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primdivisor ersten Grades von K/Ω, so gibt es in der n-Klasse von z_J in K zu $\mathfrak{p}$ prime Vertreter z_J' (für $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}, \mathfrak{i}$ genügt schon $z_J' = z_J$); denn man kann w_J durch einen Faktor aus K^n prim zu $\mathfrak{p}^{n_0}$ machen. Für alle solchen Vertreter gehören die Reste $z_J'(\mathfrak{p})$ einer und derselben n-Klasse in Ω an. Wir verstehen im folgenden bei Betrachtung eines $\mathfrak{p}$ unter z_J einen zu $\mathfrak{p}$ prim normierten Vertreter der n-Klasse des bisherigen normierten $z_J \cong \left(\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}\right)^n$, und unter w_J dann eine Lösung von $z_J^{n_0} = w_J^n$. Diese Normierung kann auch gleichzeitig für mehrere $\mathfrak{p}$ vorgenommen werden. Wir beweisen nunmehr:

Kummer-Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper. *Der Restklassenkörper $\Omega_\mathfrak{p}/\Omega$ der Primdivisoren von K/Ω, die in einem Primdivisor ersten Grades $\mathfrak{p}\mathfrak{n}_0$ von $K\mathfrak{n}/\Omega$ aufgehen, wird in Kummer-Erzeugung gegeben durch*

$$\Omega_\mathfrak{p} = \Omega\left(\sqrt[n]{z_J(\mathfrak{p})}\right).$$

Beweis. Bei der getroffenen Normierung sind die $w_J = \sqrt[n]{z_J\,\mathfrak{n}_0}$ ganz für $\mathfrak{p}\mathfrak{n}_0$, und ihre Diskriminante $|S_{K|K\mathfrak{n}}(w_J\,w_{J'})|$ ist prim zu $\mathfrak{p}\mathfrak{n}_0$. Letzteres sieht man so:

$$S_{K|K\mathfrak{n}}(w_J\,w_{J'}) = \begin{Bmatrix} n^2\,w_J\,w_{J'} & \text{für } JJ' = 1 \\ 0 & \text{für } JJ' \neq 1 \end{Bmatrix},$$

also

$$|S_{K|K\mathfrak{n}}(w_J\,w_{J'})| = (n^2)^{n^2}\left(\prod_J w_J\right)^2;$$

die w_J sind prim zu $\mathfrak{p}\mathfrak{n}_0$ normiert, und $\mathfrak{n}$ enthält — anders als für algebraische Zahlkörper — keinen Primdivisor, da es eine wegen der Voraussetzung c) von Null verschiedene Konstante ist. Demnach bilden die w_J eine $\mathfrak{p}\mathfrak{n}_0$-Ganzheitsbasis für $K/K\mathfrak{n}$. Ist also $\mathfrak{q}$ ein Primdivisor von K/Ω, der in $\mathfrak{p}\mathfrak{n}_0$ aufgeht, so erzeugen die $w_J(\mathfrak{q})$ den Restklassenkörper $\Omega(\mathfrak{q}) = \Omega_\mathfrak{p}$ über dem Restklassenkörper $\Omega(\mathfrak{p}\mathfrak{n}_0) = \Omega$:

$$\Omega_\mathfrak{p} = \Omega\left(w_J(\mathfrak{q})\right).$$

Ist nun $\bar{\mathfrak{q}}$ ein in $\mathfrak{q}$ steckender algebraischer Punkt von K/Ω, so ist nach dem Zerlegungsgesetz der algebraischen Punkte $\mathfrak{n}_0\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$, also nach der Restformel § 1, (2)

$$w_J(\mathfrak{q})^n = w_J(\bar{\mathfrak{q}})^n = (z_J\,\mathfrak{n}_0)\,(\bar{\mathfrak{q}}) = z_J(\mathfrak{n}_0\bar{\mathfrak{q}}) = z_J(\mathfrak{p}).$$

Damit ergibt sich die Behauptung.

§ 3.

Das Klassenkörper-Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper.

Es mögen nach wie vor die zu Beginn von § 2 gemachten Voraussetzungen a), b), c) gelten.

1. Wir betrachten die n-Klasseneinteilung der rationalen Punkte $\mathfrak{p}$ von K/Ω:

$$\mathfrak{p}' \underset{n}{\sim} \mathfrak{p}, \text{ wenn } \mathfrak{p}' \sim \mathfrak{p}C^n \text{ mit einer rationalen Klasse } C \text{ von } K/\Omega.$$

Die n-Klassen der $\mathfrak{p}$ sind die Nebengruppen ersten Grades zur Untergruppe D^n der rationalen Nullklassengruppe D von K/Ω; erst ihre Quotienten bilden die Faktorgruppe D/D^n. Im Hinblick auf die Definition des Meromorphismus n_0, nach der

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{n}_0\bar{\mathfrak{q}} \quad \text{gleichbedeutend mit} \quad \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}} \sim \left(\frac{\bar{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{o}}\right)^n$$

ist, denken wir uns die Faktorgruppe D/D^n durch die n-Klassen der Quotienten $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}$ repräsentiert. Ist $\bar{\mathfrak{q}}, \bar{\mathfrak{q}}'$ ein Lösungspaar von $\mathfrak{p} = n_0 \bar{\mathfrak{q}}$, $\mathfrak{p}' = n_0 \bar{\mathfrak{q}}'$, so bedeutet $\mathfrak{p}' \underset{n}{\sim} \mathfrak{p}$, daß $\bar{\mathfrak{q}}' \sim \bar{\mathfrak{q}} C J$ mit einer rationalen Klasse C und einer n-Teilungsklasse J von K/Ω ist; wegen der vorausgesetzten Rationalität der J folgt daraus $\Omega(\bar{\mathfrak{q}}') = \Omega(\bar{\mathfrak{q}})$, d. h. $\Omega_{\mathfrak{p}'} = \Omega_{\mathfrak{p}}$. Ferner ist dann und nur dann $\mathfrak{p} = n_0 \mathfrak{q}$ mit rationalem $\mathfrak{q}$, wenn $\mathfrak{p} \underset{n}{\sim} \mathfrak{o}$ ist. Damit haben wir schon folgende beiden Teilaussagen eines Klassenkörper-Zerlegungsgesetzes für K/Kn:

Der Restklassenkörper $\Omega_{\mathfrak{p}}$ hängt nur von der n-Klasse von $\mathfrak{p}$ ab.

Dann und nur dann ist $\mathfrak{p} n_0$ voll-zerlegt, wenn $\mathfrak{p} \underset{n}{\sim} \mathfrak{o}$ ist.

Die letztere Aussage kann nach dem Kummer-Zerlegungsgesetz aus § 2 auch so ausgesprochen werden:

(1) $z_J(\mathfrak{p}) \underset{n}{=} 1$ *in Ω (für alle J) ist gleichbedeutend mit* $\mathfrak{p} \underset{n}{\sim} \mathfrak{o}$.

2. Wir beweisen jetzt darüber hinaus:

Klassenkörper-Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper. *Das n-Klassensystem der Kummer-Erzeugenden $z_J(\mathfrak{p})$ in Ω des Restklassenkörpers $\Omega_{\mathfrak{p}}/\Omega$ der Primdivisoren von K/Ω, die in einem Primdivisor ersten Grades $\mathfrak{p} n_0$ von Kn/Ω aufgehen, entspricht umkehrbar eindeutig der n-Klasse von $\mathfrak{p}$:*

(2) $z_J(\mathfrak{p}') \underset{n}{=} z_J(\mathfrak{p})$ *in Ω (für alle J) ist gleichbedeutend mit* $\mathfrak{p}' \underset{n}{\sim} \mathfrak{p}$.

Diese eineindeutige Zuordnung wird gegeben durch das Formelsystem:

(3) $$z_J \tau_P \underset{n}{=} z_J(\mathfrak{p}) \cdot z_J \text{ in } K,$$

wo P die Klasse von $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}$ bezeichnet, und sie ist ein Isomorphismus zwischen der Faktorgruppe D/D^n, repräsentiert durch die n-Klassen PD^n der $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}$, und der Multiplikationsgruppe Z_n der n-Klassensysteme der $z_J(\mathfrak{p})$ in Ω.

Beweis. Da z_J die n-te Potenz eines Divisors nullten Grades von K/Ω ist, und da die Translation τ_P die Nullklassen von K/Ω invariant läßt, hat man

$$z_J \tau_P \cong z_J \cdot c_{J,P}^n$$

mit Faktoren $c_{J,P} \neq 0$ aus K, also

$$z_J \tau_P = \gamma_{J,P} \cdot z_J \cdot c_{J,P}^n \underset{n}{=} \gamma_{J,P} \cdot z_J \text{ in } K$$

mit Faktoren $\gamma_{J,P} \neq 0$ aus Ω. Diese Faktoren bestimmen sich durch Restbildung mod. $\mathfrak{o}$. Links ist nach der Restformel § 1, (2)

$$(z_J \tau_P)(\mathfrak{o}) = z_J(\tau_P \mathfrak{o}) = z_J(\mathfrak{p}).$$

Rechts ist nach (1)

$$z_J(\mathfrak{o}) \underset{n}{=} 1 \text{ in } \Omega.$$

Man beachte hierbei, daß z_J gleichzeitig zu $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{o}$ prim normiert werden kann. Damit ergibt sich

$$\gamma_{J,P} \underset{n}{=} z_J(\mathfrak{p}) \text{ in } \Omega,$$

also (3). Demnach ist $\tau_P \to z_J(\mathfrak{p})$ ein Homomorphismus der Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ der τ_P auf die Multiplikationsgruppe Z_n der n-Klassensysteme der $z_J(\mathfrak{p})$ in Ω. Durch Vorfügung des Isomorphismus $P \to \tau_P$ von D auf $\mathfrak{T}$ entsteht ein Homomorphismus $P \to z_J(\mathfrak{p})$ von D auf Z_n. Nach (1) ist dieser ein Isomorphismus von D/D^n auf Z_n. Damit ist die behauptete Isomorphieaussage und insbesondere auch die Eineindeutigkeitsaussage (2) bewiesen.

3. Es ist interessant zu bemerken, daß in Weils analytischem Beweis seines Endlichkeitssatzes das Formelsystem (3) für ($n = 2$) aus dem Satz über die Vertauschung von Argument und Parameter (hier $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{o}$) in den Elementarintegralen dritter Gattung gefolgert wird. Unsere einfache Schlußweise ist also als die Algebraisierung dieses Satzes anzusehen. Allgemeiner als (3) gilt übrigens nach dem Beweis das Formelsystem:

$$(3') \qquad z_J \tau_{\frac{P}{P'}} \underset{n}{=} \frac{z_J(\mathfrak{p})}{z_J(\mathfrak{p}')} \cdot z_J \text{ in } K,$$

in dem der feste Punkt $\mathfrak{o}$ mit $z_J(\mathfrak{o}) \underset{n}{=} 1$ in Ω durch einen beliebigen rationalen Punkt $\mathfrak{p}'$ von K/Ω ersetzt ist und $\frac{P}{P'}$ die Klasse von $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}'}$ ist.

Wir bemerken ferner, daß das gewonnene Klassenkörper-Zerlegungsgesetz in seiner Isomorphieaussage den Typus des Artinschen Reziprozitätsgesetzes aus der algebraischen Zahlentheorie hat. An Stelle des dortigen Frobenius-Automorphismus tritt hier das Kummer-Erzeugendensystem $z_J(\mathfrak{p})$ von $\Omega_{\mathfrak{p}}/\Omega$, das aus dem festen Kummer-Erzeugendensystem $z_J \mathfrak{n}_0$ von $K/K\mathfrak{n}$ durch Restbildung nach dem zu zerlegenden Primdivisor $\mathfrak{p}\mathfrak{n}_0$ entsteht. Die durch (3) mit dem System $z_J(\mathfrak{p})$ verknüpfte Translation τ_P kann allerdings nicht als das formale Analogon des Frobenius-Automorphismus angesehen werden, weil sie zwar ein Automorphismus von K/Ω, aber im allgemeinen kein Automorphismus des betrachteten Relativkörpers $K/K\mathfrak{n}$ ist. Um dies genaue formale Analogon des Frobenius-Automorphismus zu erhalten, hätte man vielmehr die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{p}\mathfrak{n}_0$, als Untergruppe der Galoisgruppe $\mathfrak{T}_n$ von $K/K\mathfrak{n}$, durch die Translationen τ_J darzustellen und dann, vermöge des verschränkten Produktes mit dem Faktorensystem 1 von $K/K\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{T}_n$, von den $z_J \mathfrak{n}_0$ zu den τ_J überzugehen. Dies wäre noch im einzelnen auszuführen, etwa unter Benutzung der Ergebnisse von Teichmüller[13]).

---

[13]) O. Teichmüller, Verschränkte Produkte mit Normalringen, Multiplikation zyklischer Normalringe. Deutsche Math. 1 (1936).

Da der Satz von der Vertauschung von Argument und Parameter in den Elementarintegralen dritter Gattung ein ganz allgemeines Theorem der analytischen Theorie der algebraischen Funktionen ist, möchte ich auf Grund der vorstehenden beiden Bemerkungen glauben, daß seine rein-algebraische Formulierung und Ausdeutung zu einem ganz allgemeinen Reziprozitätsgesetz Artinscher Art für abelsche Erweiterungen algebraischer Funktionenkörper führen wird, von dem das hier mitgeteilte Ergebnis nur ein einfacher Spezialfall ist (Geschlecht 1, unverzweigte Erweiterung). Ein weiterer Spezialfall, der ebenfalls in diese Richtung weist, liegt in der bereits in allen Einzelheiten bekannten Klassenkörpertheorie der abelschen Erweiterungen von K/Ω bei endlichem Ω vor.

§ 4.

Der Mordell-Weilsche Endlichkeitssatz.

Es sei jetzt Ω ein endlich-algebraischer Zahlkörper. Der zu beweisende Satz lautet:

Die rationale Nullklassengruppe D von K/Ω hat endlichen Rang.

1. Aus dem in § 3 bewiesenen Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper folgern wir mittels der in A, § 9 gegebenen Darstellung der Distributionslehre zunächst die folgende schwächere Endlichkeitsaussage:

Besitzt K/Ω einen rationalen Punkt und sind die n-Teilungsklassen von K/Ω rational, so ist die Faktorgruppe D/D^n endlich.

Beweis. Nach dem Klassenkörper-Zerlegungsgesetz für K/K_n ist D/D^n isomorph zur Multiplikationsgruppe der n-Klassensysteme der $z_J(\mathfrak{p})$ in Ω, wo $\mathfrak{p}$ die rationalen Punkte von K/Ω durchläuft. Es genügt demnach zu zeigen, daß die $z_J(\mathfrak{p})$ nur endlich viele n-Klassen in Ω durchlaufen. Dabei können wir die ursprüngliche Normierung:

$$z_J \cong \left(\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}\right)^n$$

aus § 2 zugrunde legen, weil es auf die endlich vielen $\mathfrak{p} = \mathfrak{i}$ (zu denen auch $\mathfrak{o}$ gehört) nicht ankommt. Für $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{i}$ folgt aus dem Hauptsatz der Distributionslehre (A, § 9, 7):

$$z_J(\mathfrak{p}) = \left(\frac{\mathfrak{i}(\mathfrak{p})}{\mathfrak{o}(\mathfrak{p})}\right)^n.$$

Dabei seien die Distributionen $\mathfrak{i}(\mathfrak{p})$ [zu denen auch $\mathfrak{o}(\mathfrak{p})$ gehört] auf Grund der Endlichkeit der Divisorenklassenanzahl von Ω zahlnormiert. Dann bedeutet dieses System von Distributionsgleichungen ein System von Zahlgleichungen:

$$z_J(\mathfrak{p}) = \varepsilon_{J,\mathfrak{p}}\, \gamma_{J,\mathfrak{p}} \left(\frac{\mathfrak{i}(\mathfrak{p})}{\mathfrak{o}(\mathfrak{p})}\right)^n,$$

mit Zahlfaktoren $\gamma_{J,\mathfrak{p}} \neq 0$ aus Ω, die einem endlichen Vorrat angehören, und Einheitsfaktoren $\varepsilon_{J,\mathfrak{p}}$ aus Ω. Wegen der Endlichkeit des Einheitenranges von Ω ist auch die Anzahl der durch Einheiten gelieferten n-Klassen in Ω endlich. Daher durchlaufen die $z_J(\mathfrak{p})$ in der Tat nur endlich viele n-Klassen in Ω.

2. Gestützt auf die damit bewiesene schwächere Endlichkeitsaussage wird der Beweis des Endlichkeitssatzes selbst nach dem klassischen Verfahren der descente infinie geführt. Da mit einer abelschen Gruppe auch jede Untergruppe endlichen Rang hat, können wir für diesen Beweis, auf Grund einer endlich-algebraischen Konstantenerweiterung von K/Ω, ohne Einschränkung voraussetzen, daß K/Ω einen rationalen Punkt $\mathfrak{o}$ besitzt, und daß für eine feste natürliche Zahl $n > 1$ (es genügt $n = 2$) die n-Teilungsklassen von K/Ω rational sind, so daß also D/D^n endlich ist. Es gibt dann ein endliches System R von rationalen Punkten $\mathfrak{r}$ von K/Ω derart, daß die Brüche $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{o}}$ die endlich vielen Klassen von D/D^n repräsentieren. Wir denken R so gewählt, daß die n-Hauptklasse D^n durch $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}} = 1$ und zueinander reziproke n-Klassen durch Paare $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{o}}, \frac{\bar{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{o}}$ mit $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{o}} \frac{\bar{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{o}} \sim 1$ repräsentiert werden. Zu jedem rationalen Punkt $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0$ von K/Ω gibt es dann eine unendliche Folge rationaler Punkte $\mathfrak{p}_i$ von K/Ω derart, daß

$$\mathfrak{p}_{i-1} \sim \left(\frac{\mathfrak{p}_i}{\mathfrak{o}}\right)^n \mathfrak{r}_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

mit $\mathfrak{r}_i$ aus R gilt. Dabei ist $\mathfrak{p}_i$ durch $\mathfrak{p}_{i-1}$ nur bis auf eine Translation um eine willkürliche n-Teilungsklasse festgelegt; wir arbeiten mit irgendeiner festen Wahl der $\mathfrak{p}_i$ zu $\mathfrak{p}$. Zusammengezogen hat man

$$\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}} \sim \left(\frac{\mathfrak{p}_k}{\mathfrak{o}}\right)^{n^k} \left(\frac{\mathfrak{r}_{k-1}}{\mathfrak{o}}\right)^{n^{k-1}} \cdots \left(\frac{\mathfrak{r}_1}{\mathfrak{o}}\right)^n \frac{\mathfrak{r}_0}{\mathfrak{o}} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Entweder ist nun einmal $\left(\frac{\mathfrak{p}_k}{\mathfrak{o}}\right)^n \sim 1$. In diesem Falle gehört die Klasse von $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}$ zu der aus $\frac{R}{\mathfrak{o}}$ erzeugten Gruppe. Oder aber es sind alle $\left(\frac{\mathfrak{p}_i}{\mathfrak{o}}\right)^n \not\sim 1$, so daß kein $\mathfrak{p}_{i-1}$ zu R gehört; wegen der besonderen Wahl von R sind dann alle $\mathfrak{p}_{i-1} \neq \mathfrak{o}, \mathfrak{r}_{i-1}, \bar{\mathfrak{r}}_{i-1}$. In diesem Falle zeigen wir, daß es ein (von $\mathfrak{p}$ abhängiges) $k_0(\mathfrak{p})$ derart gibt, daß $\mathfrak{p}_k$ mit $k \geqq k_0(\mathfrak{p})$ einem von $\mathfrak{p}$ unabhängigen endlichen Vorrat P angehört. In jedem Falle gehört demnach die Klasse von $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}$ zu der aus $\frac{R}{\mathfrak{o}}$ und $\frac{P}{\mathfrak{o}}$ erzeugten Gruppe, d. h. die Gruppe D wird durch die endlich vielen Repräsentanten aus $\frac{R}{\mathfrak{o}}$ und $\frac{P}{\mathfrak{o}}$ erzeugt, hat also endlichen Rang.

3. Der Hauptschluß bei dieser descente infinie, nämlich der Nachweis der Endlichkeit des Vorrats P für $\mathfrak{p}_k$ im zweiten Falle, wird dadurch erbracht, daß für eine Beziehung vom Typus (1):

$$\mathfrak{p} \sim \left(\frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{o}}\right)^n \mathfrak{r} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}, \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}} \tag{3}$$

die homogenen Koordinaten von $\mathfrak{p}'$ ihrer Höhe nach durch die homogenen Koordinaten von $\mathfrak{p}$ abgeschätzt werden. Dieser Teil unseres Beweises unterscheidet sich von dem entsprechenden Teil bei MORDELL und WEIL durch eine der Sachlage besser angepaßte Wahl der Koordinaten. Wir bilden nämlich die Koordinaten nicht mittels der WEIERSTRASSschen Normalform der Erzeugung von K/Ω, was im Sinne von A, §3 der Klasse von $\mathfrak{o}^3$ entspricht, sondern mittels der Klasse N von $\mathfrak{o}^{n^2}$. Der Grad n^2 dieser Klasse N erfüllt die in A, §3, **3** geforderte Ungleichung: $n^2 \geqq 2^2 = 4 = 3g + 1$. Eine für unseren Zweck geeignete homogene N-Basis erhalten wir aus der Theorie des n-Teilungskörpers. Eine solche muß aus $\dim N = n^2$ Elementen bestehen. Nach dem Beweis des Kummer-Zerlegungsgesetzes in §2 sind nun die dortigen n^2 Elemente

$$w_J \cong \frac{\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}\,\mathfrak{n}_\mathfrak{o}}$$

linear-unabhängig über $K\mathfrak{n}$, also sicher über Ω. Diese Elemente bilden eine N-Basis. Denn nach der Definition von $\mathfrak{n}_\mathfrak{o}$ sind die $\mathfrak{i}$ die Lösungen von $\mathfrak{n}_\mathfrak{o}\mathfrak{i} = \mathfrak{o}$. Daher ist $\mathfrak{o}\mathfrak{n}_\mathfrak{o} = \prod_\mathfrak{i} \mathfrak{i}$. Weil nun die Gruppe D_n der J den Typus (n, n) hat, gilt $\prod_J J = 1$, also $\prod_\mathfrak{i} \mathfrak{i} \sim \mathfrak{o}^{n^2}$, und somit in der Tat $\mathfrak{o}\mathfrak{n}_\mathfrak{o} \sim \mathfrak{o}^{n^2}$. Wegen dieser Äquivalenz gibt es in K ein Element

$$t \cong \frac{\mathfrak{o}\,\mathfrak{n}_\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}^{n^2}}.$$

Wir legen dann für unseren Zweck vorteilhafter folgende Normierung der homogenen N-Basis w_J zugrunde:

$$x_J = t\,w_J \cong \frac{\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}^{n^2}}.$$

Bei ihr ist nämlich die N-Basis x_J primitiv für alle $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$. Ist also $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$, so gilt nach A, §9, 8 für die Höhe der homogenen n-Koordinaten von $\mathfrak{p}$ die Formel:

$$H_x(\mathfrak{p}) \doteq |N(\mathfrak{o}(\mathfrak{p}))|^{n^2} \cdot N\left(\operatorname*{Max}_J |x_J(\mathfrak{p})|\right). \tag{4}$$

4. Mittels dieser Formel schätzen wir nunmehr bei Bestehen einer Beziehung (3) die Koordinaten von $\mathfrak{p}'$ durch die von $\mathfrak{p}$ ab. Wir schreiben dazu (3) in der Form:

$$\mathfrak{p} = \varrho\mathfrak{n}_\mathfrak{o}\mathfrak{p}' \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}, \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}, \tag{3'}$$

wo ϱ die Translation um die Klasse von $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{o}}$ bezeichnet, und zerlegen diese Beziehung in zwei Einzelschritte, die Multiplikation n_0 und die Translation ϱ.

a) *Koordinatenabschätzung bei der Multiplikation.* Die zu betrachtende Beziehung lautet:

(3a) $$\mathfrak{p} = n_0 \mathfrak{p}' \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}.$$

Wir drücken die Basis x_J von $\left\{\frac{1}{\mathfrak{o}^{n^2}}\right\}$ in K durch die meromorph zugeordnete Basis $x_J n_0$ von $\left\{\frac{1}{(\mathfrak{o} n_0)^{n^2}}\right\}$ in Kn aus. Es ist

$$w_J^n = z_J n_0 \cong \left(\frac{\mathfrak{i} n_0}{\mathfrak{o} n_0}\right)^n.$$

Hiernach besteht ein Gleichungssystem:

$$w_J^{n^2} = (z_J n_0)^n = \sum_{J'} \alpha_{J,J'} \cdot x_{J'} n_0$$

mit Koeffizienten $\alpha_{J,J'}$ aus Ω. Multiplikation mit t^{n^2} liefert das Gleichungssystem:

$$x_J^{n^2} = t^{n^2} \sum_{J'} \alpha_{J,J'} \cdot x_{J'} n_0,$$

das die N-Basis x_J durch die meromorph zugeordnete $N n_0$-Basis $x_J n_0$ ausdrückt. Dies Gleichungssystem ist auch an sich interessant, als eine algebraisch-durchsichtige homogene Erzeugung des n-Teilungskörpers K/Kn. Wir gehen zu den Resten mod. $\mathfrak{p}'$ über. Nach der Restformel § 1, (2) und nach (3a) ist

$$(x_J n_0)(\mathfrak{p}') = x_J(n_0 \mathfrak{p}') = x_J(\mathfrak{p}).$$

Damit ergibt sich das Gleichungssystem:

$$x_J(\mathfrak{p}')^{n^2} = t(\mathfrak{p}')^{n^2} \sum_{J'} \alpha_{J,J'} x_{J'}(\mathfrak{p}),$$

das die homogenen N-Koordinaten von $\mathfrak{p}'$ durch die von $\mathfrak{p}$ ausdrückt; man beachte dabei, daß wegen $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$ auch $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{o}$ ist, so daß die auftretenden Reste $\neq \infty$ sind. Aus diesem Gleichungssystem folgt eine Abschätzung:

(5a) $$N\left(\operatorname{Max}_J |x_J(\mathfrak{p}')|\right)^{n^2} \leqq A \cdot |N(t(\mathfrak{p}'))|^{n^2} \cdot N\left(\operatorname{Max}_J |x_J(\mathfrak{p})|\right)$$

mit einer durch die Koeffizienten $\alpha_{J,J'}$ bestimmten, also von $\mathfrak{p}$ unabhängigen positiven Zahl A. Aus $t \cong \frac{\mathfrak{o} n_0}{\mathfrak{o}^{n^2}}$ folgt nun nach dem Hauptsatz der Distributionslehre:

$$t(\mathfrak{p}') \doteq \frac{(\mathfrak{o} n_0)(\mathfrak{p}')}{\mathfrak{o}(\mathfrak{p}')^{n^2}}.$$

Darin ist nach der Restformel § 1, (3) und nach (3a)

$$(\mathfrak{o} n_0)(\mathfrak{p}') \doteq \mathfrak{o}(n_0 \mathfrak{p}') = \mathfrak{o}(\mathfrak{p}).$$

Demnach ist

$$t(\mathfrak{p}') \doteq \frac{\mathfrak{o}(\mathfrak{p})}{\mathfrak{o}(\mathfrak{p}')^{n^2}},$$

und somit (im Sinne von A, § 9, 8)

$$|N(t(\mathfrak{p}'))| \doteq \frac{|N(\mathfrak{o}(\mathfrak{p}))|}{|N(\mathfrak{o}(\mathfrak{p}'))|^{n^2}}. \tag{6a}$$

Aus (5a) und (6a) folgt nach (4) eine Abschätzung:

$$H_x(\mathfrak{p}') \leqq C \cdot H_x(\mathfrak{p})^{\frac{1}{n^2}} \tag{7a}$$

mit einer von $\mathfrak{p}$ unabhängigen positiven Zahl C.

b) ***Koordinatenabschätzung bei der Translation.*** Die zu betrachtende Beziehung lautet:

$$\mathfrak{p} = \varrho\mathfrak{p}' \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}, \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}, \tag{3b}$$

wo ϱ die Translation um die Klasse von $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{o}}$ ist. Der Beziehung $\mathfrak{o}\varrho^{-1} = \varrho\mathfrak{o} = \mathfrak{r}$ entsprechend drücken wir hier die durch den Isomorphismus ϱ^{-1} entstehende Basis $x_J\varrho^{-1}$ von $\left\{\frac{1}{\mathfrak{r}^{n^2}}\right\}$ durch die Basis x_J von $\left\{\frac{1}{\mathfrak{o}^{n^2}}\right\}$ aus. Wegen $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{o}}\,\frac{\bar{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{o}} \sim 1$ gibt es in K ein Element

$$u \cong \frac{\mathfrak{o}^2}{\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}}.$$

Es ist dann

$$\frac{1}{u^{n^2}}\left\{\frac{1}{\mathfrak{r}^{n^2}}\right\} \leqq \left\{\frac{1}{\mathfrak{o}^{2n^2}}\right\} = \left(\frac{1}{\mathfrak{o}^{n^2}}\right)^2,$$

letzteres nach dem Hilfssatz in A, § 2, 2. Hiernach besteht ein Gleichungssystem:

$$x_J\varrho^{-1} = u^{n^2} \sum_{J',J''} \alpha_{J,J',J''}\, x_{J'}\, x_{J''}$$

mit Koeffizienten $\alpha_{J,J',J''}$ aus Ω, das die durch den Isomorphismus ϱ^{-1} entstehende $N\varrho^{-1}$-Basis $x_J\varrho^{-1}$ durch die N-Basis x_J ausdrückt. Wir gehen zu den Resten mod. $\mathfrak{p}$ über. Nach der Restformel § 1, (2) und nach (3b) ist

$$(x_J\varrho^{-1})(\mathfrak{p}) = x_J(\varrho^{-1}\mathfrak{p}) = x_J(\mathfrak{p}').$$

Damit ergibt sich das Gleichungssystem:

$$x_J(\mathfrak{p}') = u(\mathfrak{p})^{n^2} \sum_{J',J''} \alpha_{J,J',J''}\, x_{J'}(\mathfrak{p})\, x_{J''}(\mathfrak{p}),$$

das die homogenen N-Koordinaten von $\mathfrak{p}'$ durch die von $\mathfrak{p}$ ausdrückt; man beachte dabei, daß wegen $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}, \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}$ die auftretenden Reste $\neq \infty$ sind. Aus diesem Gleichungssystem folgt eine Abschätzung:

$$N\left(\max_J |x_J(\mathfrak{p}')|\right) \leqq A_{\mathfrak{r}} \cdot |N(u(\mathfrak{p}))|^{n^2} \cdot N\left(\max_J |x_J(\mathfrak{p})|\right)^2 \tag{5b}$$

mit einer durch die Koeffizienten $\alpha_{J,J',J''}$ bestimmten, also nur von $\mathfrak{r}$, nicht von $\mathfrak{p}$ abhängigen positiven Zahl $A_{\mathfrak{r}}$. Aus $u \cong \frac{\mathfrak{o}^2}{\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}}$ folgt nun nach dem Hauptsatz der Distributionslehre:

$$u(\mathfrak{p}) \doteq \frac{\mathfrak{o}(\mathfrak{p})^2}{\mathfrak{r}(\mathfrak{p})\,\bar{\mathfrak{r}}(\mathfrak{p})}.$$

Darin ist nach der Restformel § 1, (3) und nach (3b)

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{o}\varrho^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{o}(\varrho^{-1}\mathfrak{p}) = \mathfrak{o}(\mathfrak{p}').$$

Demnach ist

$$u(\mathfrak{p}) \doteq \frac{1}{\bar{\mathfrak{r}}(\mathfrak{p})} \cdot \frac{\mathfrak{o}(\mathfrak{p})^2}{\mathfrak{o}(\mathfrak{p}')};$$

da $\bar{\mathfrak{r}}(\mathfrak{p})$ wesentlich ganz ist, also beschränkten Nenner hat (A, §9, 7), folgt hieraus

$$|N(u(\mathfrak{p}))| \leqq B_{\mathfrak{r}} \frac{|N(\mathfrak{o}(\mathfrak{p}))|^2}{|N(\mathfrak{o}(\mathfrak{p}'))|} \tag{6b}$$

mit einer nur von $\mathfrak{r}$, nicht von $\mathfrak{p}$ abhängigen positiven Zahl $B_{\mathfrak{r}}$. Aus (5b) und (6b) folgt nach (4) eine Abschätzung:

$$H_x(\mathfrak{p}') \sim C_{\mathfrak{r}} \cdot H_x(\mathfrak{p})^2 \tag{7b}$$

mit einer nur von $\mathfrak{r}$, nicht von $\mathfrak{p}$ abhängigen positiven Zahl $C_{\mathfrak{r}}$.

Aus den für die speziellen Beziehungen (3a), (3b) gewonnenen Abschätzungen (7a), (7b) ergibt sich für die allgemeine Beziehung (3'), d. h. (3), durch Zusammensetzung:

$$H_x(\mathfrak{p}') \leqq C \cdot H_x(\mathfrak{n}_{\mathfrak{o}}\mathfrak{p}')^{\frac{1}{n^2}} \leqq C C_{\mathfrak{r}}^{\frac{1}{n^2}} \cdot H_x(\mathfrak{p})^{\frac{2}{n^2}}.$$

Bei der Beziehungskette (1) gilt demnach, weil die $\mathfrak{r}_i$ dem endlichen Repräsentantensystem R entnommen sein sollen, eine Abschätzung:

$$H_x(\mathfrak{p}_i) \leqq C_R \cdot H_x(\mathfrak{p}_{i-1})^{\frac{2}{n^2}}$$

mit einer nur von R, nicht von $\mathfrak{p}$ abhängigen positiven Zahl C_R. Daraus folgt für die Beziehung (2) durch Zusammensetzung:

$$H_x(\mathfrak{p}_k) \leqq C_R^{1+\frac{2}{n^2}+\cdots+\left(\frac{2}{n^2}\right)^{k-1}} \cdot H_x(\mathfrak{p})^{\left(\frac{2}{n^2}\right)^k},$$

also

$$H_x(\mathfrak{p}_k) < C_R^{\frac{n^2}{n^2-2}} \cdot H_x(\mathfrak{p})^{\left(\frac{2}{n^2}\right)^k}.$$

Wegen $n^2 \geqq 2^2 > 2$ gibt es hiernach ein $k_0(\mathfrak{p})$ derart, daß

$$H_x(\mathfrak{p}) \leqq C_R^{\frac{n^2}{n^2-2}} + 1 \text{ für alle } k \geqq k_0(\mathfrak{p}).$$

Für $k \geqq k_0(\mathfrak{p})$ ist demgemäß die Höhe der homogenen N-Koordinaten von $\mathfrak{p}_k$ unabhängig von $\mathfrak{p}$ beschränkt. Die $\mathfrak{p}_k$ in (2) gehören somit für $k \geqq k_0(\mathfrak{p})$ einem von $\mathfrak{p}$ unabhängigen endlichen Vorrat P an. Damit ist nach dem schon Gesagten der Endlichkeitssatz bewiesen.

(Eingegangen am 5. Oktober 1941.)

Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. IV.

Herrn KONRAD KNOPP
zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

E. Kamke in Tübingen.

§ 1.

Einleitung.

1. 1. In dieser Arbeit, deren Beweisführungen von den vorangehenden Arbeiten[1]) unabhängig sind, handelt es sich wie in K II und K III um die Eigenwertaufgabe, die aus der Differentialgleichung

$$F(y) = \lambda G(y) \tag{1}$$

und den Randbedingungen

$$U_\mu(y) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, 2m) \tag{2}$$

besteht. Dabei sind F und G die selbstadjungierten Differentialausdrücke

$$F(y) = \sum_{\nu=0}^{m} (f_\nu y^{(\nu)})^{(\nu)}, \quad G(y) = \sum_{\nu=0}^{r} (g_\nu y^{(\nu)})^{(\nu)}, \tag{3}$$

die $f_\nu = f_\nu(x)$ und $g_\nu = g_\nu(x)$ sind im Intervall $a \leqq x \leqq b$ gegebene reelle, ν-mal stetig differenzierbare Funktionen, ferner ist $f_m \neq 0$, $g_n \not\equiv 0$, $|f_0| + |g_0| \not\equiv 0$ [2]), $0 \leqq n < m$. Die

$$U_\mu(y) = \sum_{\varkappa=0}^{2m-1} [\alpha_{\mu,\varkappa} y^{(\varkappa)}(a) + \beta_{\mu,\varkappa} y^{(\varkappa)}(b)] \tag{4}$$

sind gegebene Linearformen in den $y^{(\varkappa)}(a)$, $y^{(\varkappa)}(b)$ mit reellen Koeffizienten $\alpha_{\mu,\varkappa}$, $\beta_{\mu,\varkappa}$, deren Matrix den Rang $2m$ hat, d. h. die Gleichungen (2) sind voneinander linear unabhängig.

Die Gleichungen

$$F(y) = 0, \quad G(y) = 0$$

[1]) K I, K II, K III = KAMKE, Math. Zeitschr. **45** (1939), S. 759–787; **46** (1940), S. 231–250 und 251–286.

[2]) Diese Voraussetzung wird allein in 4. 4 benutzt und läßt sich in einer Reihe von Fällen auch umgehen. In dem Fall $n = 0$, d. h. für $G(y) = g(x)y$ ist sie sicher erfüllt, wenn $g \not\equiv 0$ vorausgesetzt wird.

sollen keine Lösung gemeinsam haben, die $\not\equiv 0$ ist und die Randbedingungen (2) erfüllt[3]).

Schließlich soll die Eigenwertaufgabe (1), (2) selbstadjungiert[4]) und in dem in 1. 3 angegebenen Sinne definit[5]) sein.

Diese Voraussetzungen sollen im folgenden immer erfüllt sein. Die Eigenwertaufgabe ist dann normal[6]). Daher sind nach K II, Satz 3 und 4, alle Eigenwerte reell, ferner gibt es höchstens abzählbar viele Eigenwerte, und diese haben keinen im Endlichen gelegenen Häufungspunkt, können also nach wachsender Größe numeriert werden.

Aus K III läßt sich weiter entnehmen, daß es unendlich viele Eigenwerte gibt. Doch wird das hier nicht als bekannt vorausgesetzt, sondern im folgenden mitbewiesen.

1. 2. In dem Fall, daß für jede $2m$-mal stetig differenzierbare Funktion $y(x)$, welche die Randbedingungen (2) erfüllt, neben der Definitheitsvoraussetzung von K III[7]) auch noch[8])

$$\int y\,G(y)\,dx \geqq 0$$

gilt[9]), liefert der Satz 2 von K III folgendes: Die Variationsaufgabe

$$\frac{\int y\,F(y)\,dx}{\int y\,G(y)\,dx} = \text{Min} \tag{5}$$

---

[3]) Diese Voraussetzung ist z. B. erfüllt, wenn die Gleichungen $F(y) = 0$ und $G(y) = 0$ überhaupt keine Lösung außer $y \equiv 0$ gemeinsam haben, und das trifft z. B. zu, wenn $n = 0$, also $G(y) = g(x)y$ und $g \not\equiv 0$ ist. Denn dann folgt aus $G(y) = 0$, daß $y \equiv 0$ in einem Teilintervall, also, wenn y zugleich die lineare Differentialgleichung $F(y) = 0$ erfüllt, $y \equiv 0$ sogar in dem ganzen Intervall $\langle a, b\rangle$ ist.

[4]) Vgl. S. 75 und K II, S. 231f.

[5]) Sie ist dann, wie S. 71, Fußnote 20 gezeigt wird, auch in dem früheren Sinne von K III, S. 252 definit.

[6]) Zu diesem Begriff vgl. K II, S. 237f. Daß die Eigenwertaufgabe unter den obigen Voraussetzungen normal ist, folgt aus K II, Satz 2 (d) in Verbindung mit der vorangehenden Fußnote.

[7]) In K III, S. 252 war die Eigenwertaufgabe definit genannt, wenn für jede Funktion $y(x)$, die in $\langle a, b\rangle$ $2m$-mal stetig differenzierbar ist und die $2m$ Randbedingungen (2) erfüllt,

$$\int_a^b y\,F(y)\,dx \geqq 0$$

und außerdem für diejenigen dieser Funktionen $y(x) \not\equiv 0$, für die hierin etwa das Gleichheitszeichen gilt,

$$\int_a^b y\,G(y)\,dx \neq 0$$

ist und ein festes Vorzeichen hat.

[8]) In dieser Arbeit ist durchweg $\int = \int_a^b$.

[9]) Dann sind offenbar alle Eigenwerte $\geqq 0$.

hat eine Lösung $y = \varphi(x)$, wenn zur Konkurrenz alle diejenigen Funktionen $y(x)$ zugelassen werden, für die der Nenner > 0 ist und die

(a) $2m$-mal stetig differenzierbar sind und

(b) die $2m$ Randbedingungen (2) erfüllen.

Der Minimalwert von (5) ist der kleinste Eigenwert λ_1 und $\varphi(x)$ eine zu diesem gehörige Eigenfunktion der Aufgabe (1), (2).

Diese Festlegung des kleinsten Eigenwertes, die auf die höheren Eigenwerte ausgedehnt werden kann, hat bekanntlich neben der theoretischen auch eine erhebliche praktische Bedeutung für die wirkliche Berechnung der Eigenwerte[10]), und zwar ist es für diese genäherte Berechnung der Eigenwerte durch die linke Seite von (5) um so günstiger, je weniger eingeengt der Bereich der zugelassenen Funktionen $y(x)$ ist.

1.3. Im Fall $m = 1$[11]) hat HOLMGREN[12]) für mehrere Typen von Randbedingungen nachgewiesen, daß die Bedingungen (a) und (b) nach geeigneter Umformung des Zählers von (5) gemildert werden können, d. h. der Bereich der zugelassenen Funktionen erweitert werden kann. Im folgenden soll gezeigt werden, daß das sogar für alle selbstadjungierten definiten Eigenwertaufgaben möglich ist[13]).

Zunächst ist nach der DIRICHLETschen Formel[14]) für jede $2m$-mal stetig differenzierbare Funktion $y(x)$

$$\int y F(y)\,dx = \int \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu f_\nu y^{(\nu)^2} dx + [R(y, y)]_a^b$$

mit

$$R(y, y) = \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{p+q=\nu-1} (-1)^p (f_\nu y^{(\nu)})^{(q)} y^{(p)}$$

und entsprechend

$$\int y G(y)\,dx = \int \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu y^{(\nu)^2} dx + [S(y, y)]_a^b$$

---

[10]) Vgl. dazu L. COLLATZ, Zeitschr. f. angewandte Mathematik und Mechanik **19** (1939), S. 224ff.

[11]) Dann ist $n = 0$, also $G(y)$ von der Gestalt $g(x)\,y$ mit $g(x) \not\equiv 0$.

[12]) E. HOLMGREN, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik 1 (1903–04), S. 401–417. Die Differentialgleichung hat bei HOLMGREN die spezielle Gestalt $y'' = \lambda g(x)\,y$.

[13]) Es bleibt zu untersuchen, ob und inwieweit die Ergebnisse etwa in der Arbeit von E. HÖLDER, Entwicklungssätze aus der Theorie der zweiten Variation [Acta Mathematica 70 (1939), S. 193–242] enthalten sind oder aus ihr herauspräpariert werden können. Wie mir Herr E. HÖLDER mitteilt, bereitet er eine Veröffentlichung über diese Frage vor.

[14]) Vgl. E. KAMKE, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, S. 76f. Leipzig 1942.

mit

$$S(y, y) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{p+q=\nu-1} (-1)^p (g, y^{(\nu)})^{(q)} y^{(p)}.$$

Trägt man dieses in (5) ein, so bestehen Zähler und Nenner aus Integralen, in denen von y nur Ableitungen der Ordnung $\leqq m$ und $\leqq n$ auftreten, und integralfreien „DIRICHLETschen Restteilen", die nur Ableitungen der Ordnung $\leqq 2m-1$ und $\leqq 2n-1$ enthalten. Diese Restteile werden mittels der Randbedingungen (2) weiter umgeformt.

Man bildet durch lineare Kombination der Randbedingungen (2) möglichst viele solcher Gleichungen, die nur Ableitungen der Ordnung $\leqq m-1$ enthalten[15]). Diese Randbedingungen seien jetzt mit

$$U_1(y) = 0, \ \ldots, \ U_k(y) = 0 \tag{6}$$

bezeichnet[16]) und mögen die (für diese Untersuchung) *wesentlichen Randbedingungen* heißen[17]). Zu diesen werden noch $2m-k$ der früheren Randbedingungen hinzugenommen, so daß im ganzen wieder $2m$ linear unabhängige Gleichungen entstehen. Diese letzten Randbedingungen seien mit

$$U_{k+1}(y) = 0, \ \ldots, \ U_{2m}(y) = 0 \tag{7}$$

bezeichnet und mögen die *restlichen Randbedingungen*[18]) heißen.

Vermittels der k wesentlichen Randbedingungen können k der Ableitungen $y^{(\nu)}(a)$, $y^{(\nu)}(b)$ mit $\nu \leqq m-1$ durch die übrigen dieser Ableitungen ausgedrückt werden (wobei auch Koeffizienten 0 vorkommen können); diese letzten $2m-k$ Ableitungen $y^{(\nu)}(a)$, $y^{(\nu)}(b)$ mit $\nu \leqq m-1$ mögen *freie Ableitungen* heißen.

Werden nun mittels der restlichen Randbedingungen (7) in $[R(y, y)]_a^b$ und $[S(y, y)]_a^b$, soweit möglich, die Ableitungen der Ordnung $\geqq m$ entfernt und dann noch alle Ableitungen der Ordnung $\leqq m-1$ durch die freien Ableitungen ausgedrückt, so zeigt sich, daß alle Ableitungen der Ordnung $\geqq m$ herausfallen (Beweis in 2.3 und 2.5). Die so umgeformten DIRICHLETschen Restteile $[R(y, y)]_a^b$ und $[S(y, y)]_a^b$, die künftig (vgl. 2.5) mit $F_0(y, y)$ und

---

[15]) D. h. mit Koeffizienten, die $\neq 0$ sind.

[16]) $k = 0$ bedeutet, daß keine wesentlichen Randbedingungen vorhanden sind.

[17]) Für Beispiele siehe § 3.

[18]) Schon früher sind in Einzelfällen die Randbedingungen unterteilt worden. So hat R. COURANT im Fall $m = 1$ bei einigen Beispielen von „natürlichen" Randbedingungen gesprochen; diese gehören zu den Randbedingungen, die oben als restliche Randbedingungen bezeichnet sind. In der technischen Literatur (vgl. C. B. BIEZENO-R. GRAMMEL, Technische Dynamik, S. 165, Berlin 1939) sind im Falle $m = 2$ bei einigen Typen von Eigenwertaufgaben „geometrische" und „dynamische" Randbedingungen unterschieden. Diese entsprechen den obigen wesentlichen und restlichen Randbedingungen.

$G_0(y, y)$ bezeichnet werden, mögen *reduzierte* DIRICHLETsche *Restteile* heißen. Sie sind quadratische Formen $F_0(y, y)$ und $G_0(y, y)$ der freien Ableitungen[19]).

Die Eigenwertaufgabe (1), (2) soll jetzt *definit* heißen, wenn

$$(8) \quad (-1)^\nu f_\nu(x) \geqq 0 \quad (\nu = 0, \ldots, m) \quad \text{und} \quad (-1)^\nu g_\nu(x) \geqq 0 \quad (\nu = 0, \ldots, n)$$

ist und wenn außerdem die reduzierten Restteile

$$(9) \qquad F_0(y, y) \geqq 0, \quad G_0(y, y) \geqq 0$$

sind[20]).

Weiter soll eine Funktion $y(x) \not\equiv 0$ eine *zulässige Funktion* heißen, wenn sie

(a) in $\langle a, b\rangle$ $(m-1)$-mal stetig differenzierbar, stückweise sogar m-mal stetig differenzierbar ist und

(b) die wesentlichen Randbedingungen (6) erfüllt[21]).

---

[19]) Dabei kann auch $F_0 \equiv 0$ und $G_0 \equiv 0$ sein.

[20]) Ist die Eigenwertaufgabe in dem obigen Sinne definit, so ist sie es auch im Sinne von K III, S. 252 (vgl. Fußnote 7 auf S. 68). Denn für zulässige Funktionen $y(x)$ im Sinne von K III, d. h. für Funktionen $y(x)$, die $2m$-mal stetig differenzierbar sind und alle $2m$ Randbedingungen (2) erfüllen, ist nach der obigen Umformung der DIRICHLETschen Formel

$$\int y F(y)\, dx = \int \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu f_\nu y^{(\nu)2}\, dx + F_0(y, y)$$

und

$$\int y G(y)\, dx = \int \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu y^{(\nu)2}\, dx + G_0(y, y),$$

also

$$(*) \qquad \int y F(y)\, dx \geqq 0 \quad \text{und} \quad \int y G(y)\, dx \geqq 0,$$

also die erste der früheren Definitheitsvoraussetzungen erfüllt. Besteht nun für eine dieser Funktionen $y(x)$ die Gleichung $\int y F(y)\, dx = 0$, so wähle man eine beliebige $2m$-mal stetig differenzierbare Funktion $u(x)$, die mit ihren $2m-1$ ersten Ableitungen in den Punkten a und b verschwindet, also alle Randbedingungen (2) erfüllt. Dann erfüllt für beliebiges $\varepsilon \neq 0$ auch $y + \varepsilon u$ diese Randbedingungen, und nach (*) ist

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \int (y + \varepsilon u) F(y + \varepsilon u)\, dx \\ &= \int y F(y)\, dx + 2\varepsilon \int u F(y)\, dx + \varepsilon^2 \int u F(u)\, dx \\ &= 2\varepsilon \int u F(y)\, dx + \varepsilon^2 \int u F(u)\, dx. \end{aligned}$$

Hätte das erste Integral der letzten Zeile für ein u einen Wert $\neq 0$, so ergäbe sich aus der Ungleichung für alle ε mit hinreichend kleinen absoluten Beträgen und mit einem zu diesem Integral entgegengesetzten Vorzeichen ein Widerspruch. Daher ist $\int u F(y)\, dx = 0$ für alle vorher genannten $u(x)$. Daraus folgt, daß $y(x)$ der Differentialgleichung $F(y) = 0$ genügt.

Ist nun zugleich $\int y G(y)\, dx = 0$, so ergibt sich in der gleichen Weise, daß auch $G(y) = 0$ ist. Dann ist aber nach dem zweiten Absatz von 1.1 $y \equiv 0$. Gilt in der ersten Ungleichung von (*) das Gleichheitszeichen für $y \not\equiv 0$, so kann es also in der zweiten Ungleichung gestrichen werden, d. h. auch die restliche Bedingung für die Definitheit in dem früheren Sinne ist erfüllt.

[21]) Die obigen beiden Bedingungen (a) und (b) bedeuten offenbar eine wesentliche Milderung der entsprechenden Bedingungen von 1.2.

1. 4. Unter diesen Voraussetzungen wird die Variationsaufgabe

$$\frac{\int \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu f_\nu y^{(\nu)^2}\, dx + F_0(y, y)}{\int \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu y^{(\nu)^2}\, dx + G_0(y, y)} = \text{Min} \tag{10}$$

gebildet. Über diese wird in § 4 bewiesen:

Satz 1. *In dem Bereich der zulässigen Funktionen $y(x)$, für die der Nenner $\neq 0$ ist, gibt es mindestens eine zulässige Funktion $y = \varphi(x)$, für die der Bruch* (10) *den kleinsten Wert annimmt. Dieser Minimalwert ist der kleinste Eigenwert λ_1. Jede zulässige Funktion $y(x)$, für die* (10) *den Minimalwert annimmt, ist sogar $2m$-mal stetig differenzierbar und eine zu λ_1 gehörige Eigenfunktion.*

Hieraus ergibt sich unmittelbar die

Folgerung. *Für jede zulässige Funktion $y(x)$ ist die linke Seite von* (10) *eine obere Schranke für den kleinsten Eigenwert.*

In § 3 werden die Eigenwertaufgaben zweiter Ordnung und die Sturmschen Eigenwertaufgaben vierter Ordnung mit $n = 0$ angegeben, bei denen die Voraussetzungen des obigen Satzes erfüllt sind. § 5 enthält einige Ergänzungen: die Ausdehnung des Satzes auf die höheren Eigenwerte, die independente Festlegung der Eigenwerte, Besselsche Ungleichung und Parsevalsche Formel bei einer neuen Definition der Fourier-Koeffizienten einer zulässigen Funktion, den Kryloffschen Abschätzungssatz für die Eigenwerte bei dem Ritzschen Verfahren.

§ 2.

Untersuchung des Restteils der Dirichletschen Formel.

In diesem Paragraphen wird nur die Selbstadjungiertheit, nicht die Definitheit der Eigenwertaufgabe benutzt.

2. 1. Übergang zu einer Bilinearform. Im Intervall $\langle a, b\rangle$ sei $u(x)$ $2m$-mal stetig differenzierbar und $v(x)$ $(m-1)$-mal stetig differenzierbar und stückweis sogar m-mal stetig differenzierbar, dann besteht für den Differentialausdruck $F(y)$ die Dirichletsche Formel[22])

$$\int v F(u)\, dx = \int \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu f_\nu u^{(\nu)} v^{(\nu)}\, dx + [R(u, v)]_a^b \tag{11}$$

mit

$$R(u, v) = \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{p+q=\nu-1} (-1)^p (f_\nu u^{(\nu)})^{(q)} v^{(p)}. \tag{12}$$

[22]) Vgl. E. Kamke, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, S. 76f. Leipzig 1942.

Ordnet man in R die Glieder um und führt man die Differentiationen aus, so erhält man

$$\begin{aligned} R(u,v) &= \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^p v^{(p)} \sum_{\nu=p+1}^{m} (f_\nu u^{(\nu)})^{(\nu-p-1)} \\ &= \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^p v^{(p)} \sum_{\nu=p+1}^{m} \sum_{r=0}^{\nu-p-1} \binom{\nu-p-1}{r} u^{(\nu+r)} f_\nu^{(\nu-p-r-1)} \\ &= \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^p v^{(p)} \sum_{\nu=p+1}^{m} \sum_{q=\nu}^{2\nu-p-1} \binom{\nu-p-1}{q-\nu} u^{(q)} f_\nu^{(2\nu-p-q-1)} \\ &= \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{q=p+1}^{2m-p-1} A_{p,q}(x)\, v^{(p)} u^{(q)} \end{aligned}$$

mit

$$A_{p,q}(x) = \sum_{\frac{p+q+1}{2} \leqq \nu \leqq \operatorname{Min}(q,m)} (-1)^p \binom{\nu-p-1}{q-\nu} f_\nu^{(2\nu-p-q-1)}.$$

Da $p \leqq m-1$ ist, ist für $p+q = 2m-1$

$$\operatorname{Min}(q,m) = \operatorname{Min}(2m-p-1, m) = m,$$

also

$$A_{p,q}(x) = (-1)^p f_m(x) \neq 0.$$

Die $A_{p,q}(x)$ erfüllen somit ein Dreieck (vgl. Fig. 1 für $m=3$) und haben in den Punkten der stark ausgezogenen Dreiecksseite Werte $\neq 0$. Durch Hinzu-

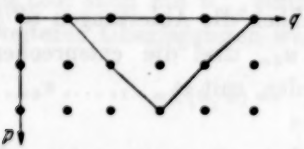

Fig. 1.

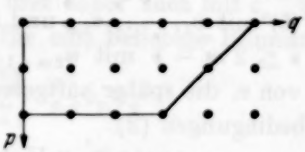

Fig. 2.

nahme von Gliedern mit dem Wert 0 wird das Dreieck zu einem Trapez ergänzt (Fig. 2). Dann ist

$$R(u,v) = \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{2m-p-1} A_{p,q}(x)\, v^{(p)} u^{(q)} \tag{13}$$

eine Bilinearform in den Ableitungen $v^{(p)}$, $u^{(q)}$ mit

$$\operatorname{Det} |A_{p,q}(x)| = \pm f_m^m \neq 0 \qquad (0 \leqq p \leqq m-1;\ m \leqq q \leqq 2m-1). \tag{14}$$

Entsprechend ist für dieselben Funktionen u, v

$$\int v\, G(u)\, dx = \int \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu u^{(\nu)} v^{(\nu)}\, dx + [S(u,v)]_a^b \tag{15}$$

mit

$$S(u,v) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{p+q=\nu-1} (-1)^p (g, u^{(\nu)})^{(q)} v^{(p)} \tag{16}$$
$$= \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{2n-p-1} B_{p,q}(x)\, v^{(p)} u^{(q)},$$

wobei jetzt jedoch über die der Determinante (14) entsprechende Determinante keine Aussage gemacht werden kann.

Später wird für eine beliebige Zahl λ noch die aus (11) und (15) folgende Formel

$$\int v[F(u) - \lambda G(u)]\,dx \tag{17}$$
$$= \int \Big\{ \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu f_\nu u^{(\nu)} v^{(\nu)} - \lambda \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu u^{(\nu)} v^{(\nu)} \Big\}\,dx + [T(u,v)]_a^b$$

mit

$$T(u,v) = R(u,v) - \lambda S(u,v)$$

benutzt werden. Die Koeffizienten von $S(u,v)$ liegen wegen $n < m$ ganz in dem Koeffizienten-Trapez von $R(u,v)$, jedoch liegt kein Koeffizient auf der schrägen Trapezlinie. Daher ist

$$\text{Det}\,|T(u,v)| = \text{Det}\,|R(u,v)| \neq 0 \quad (0 \leqq p \leqq m-1;\ m \leqq q \leqq 2m-1). \tag{18}$$

Werden nun die Größen

$$u(a),\ u'(a),\ \ldots,\ u^{(m-1)}(a),\quad u(b),\ \ldots,\ u^{(m-1)}(b)$$

in irgendeiner Reihenfolge mit $u_1, \ldots, u_{2m}$ bezeichnet, die entsprechenden $v^{(\nu)}(a)$, $v^{(\nu)}(b)$ mit $v_1, \ldots, v_{2m}$ und schließlich die Ableitungen $u^{(\nu)}(a)$, $u^{(\nu)}(b)$ für $m \leqq \nu \leqq 2m-1$ mit $u_{2m+1}, \ldots, u_{4m}$ und die entsprechenden Ableitungen von v, die später auftreten werden, mit $v_{2m+1}, \ldots, v_{4m}$, so lauten die Randbedingungen (2)

$$U_\mu(u) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, M) \tag{19}$$

mit $M = 2m$ und

$$U_\mu(u) = \sum_{\nu=1}^{2M} \alpha_{\mu,\nu} u_\nu \qquad (\mu = 1, \ldots, M);$$

die Matrix der $\alpha_{\mu,\nu}$ hat den Rang M. Ferner ist der Restteil der DIRICHLETschen Formel (11), wenn noch weitere Glieder mit dem Wert 0 hinzugenommen werden,

$$[R(u,v)]_a^b = \sum_{p=1}^{M} \sum_{q=1}^{2M} a_{p,q} v_p u_q \tag{20}$$

eine Bilinearform in den u, v mit

$$\text{Det}\,|a_{p,q}| \neq 0 \quad (p = 1, \ldots, M;\ q = M+1, \ldots, 2M). \tag{21}$$

Entsprechend ist

$$[S(u,v)]_a^b = \sum_{p=1}^{M} \sum_{q=1}^{2M} b_{p,q} v_p u_q, \tag{22}$$

wobei jetzt über die Koeffizienten jedoch keine der Ungleichung (21) entsprechende Aussage gemacht werden kann, und schließlich ist der in (17) auftretende Restteil von der Gestalt

$$[T(u,v)]_a^b = \sum_{p=1}^{M} \sum_{q=1}^{2M} c_{p,q} v_p u_q \tag{23}$$

mit

$$\text{Det } |c_{p,q}| \neq 0 \quad (p = 1, \ldots, M;\ q = M+1, \ldots, 2M). \tag{24}$$

Die Voraussetzung, daß die Eigenwertaufgabe (1), (2) selbstadjungiert ist, besagt folgendes[23]): Für je zwei Zahlensysteme

$$u(a),\ u'(a),\ \ldots,\ u^{(2m-1)}(a),\quad u(b),\ \ldots,\ u^{(2m-1)}(b)$$

und

$$v(a),\ v'(a),\ \ldots,\ v^{(2m-1)}(a),\quad v(b),\ \ldots,\ v^{(2m-1)}(b),$$

die beide die Randbedingungen (2) erfüllen, ist

$$[R(u,v)]_a^b = [R(v,u)]_a^b \quad \text{und} \quad [S(u,v)]_a^b = [S(v,u)]_a^b, \tag{25}$$

wo R und S durch (12) und (16) gegeben sind. In den soeben eingeführten Bezeichnungen besagt das: Es ist

$$\sum_{p=1}^{M} \sum_{q=1}^{2M} a_{p,q} v_p u_q = \sum_{p=1}^{M} \sum_{q=1}^{2M} a_{p,q} u_p v_q \tag{26}$$

für je zwei Zahlensysteme u_p und v_p, die beide die Gleichungen (19) erfüllen. Ferner gilt (26) auch mit $b_{p,q}$ statt $a_{p,q}$ und daher auch mit $c_{p,q}$ statt $a_{p,q}$.

Die weiteren Überlegungen werden für eine beliebige Bilinearform

$$A(u,v) = \sum_{p=1}^{M} \sum_{q=1}^{2M} a_{p,q} v_p u_q \tag{27}$$

mit der Eigenschaft angestellt, daß (26) für alle Zahlensysteme u_p, v_p gelten soll, die beide die Gleichungen (19) erfüllen. Die Ergebnisse lassen sich unmittelbar auf die Dirichletschen Restteile übertragen.

2. 2. Umformung der Nebenbedingungen (19). Zunächst werden, entsprechend dem Vorgehen in 1. 3, durch lineare Kombination der Gleichungen (19) möglichst viele linear unabhängige Gleichungen gebildet, in denen nur $u_1, \ldots, u_M$ vorkommen, d. h. in denen alle übrigen u_ν den Koeffizienten 0 haben. Ein solches Gleichungssystem sei

$$\bar{U}_1(u) = 0,\ \ldots,\ \bar{U}_k(u) = 0; \tag{28}$$

es ist dann $0 \leqq k \leqq M$ ($k = 0$ bedeutet, daß es keine derartigen Gleichungen gibt). Dazu werden noch $M - k$ der ursprünglichen Gleichungen (19) ge-

[23]) Vgl. K II, S. 231.

nommen, die zusammen mit den Gleichungen (28) ein System von linear unabhängigen Gleichungen bilden, und mit

$$\bar{U}_{k+1}(u) = 0, \ldots, \bar{U}_M(u) = 0 \tag{29}$$

bezeichnet. Dann besagen die Gleichungen (19) dasselbe wie die Gleichungen (28) + (29). Die Gleichungen (28) entsprechen den wesentlichen Randbedingungen von 1. 3, die Gleichungen (29) den restlichen Randbedingungen und mögen hier wesentliche und restliche Nebenbedingungen heißen.

Die Gleichungen (28) sind von der Gestalt

$$\sum_{\nu=1}^{M} \beta_{\mu,\nu} u_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, k).$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit gibt es k Variable u_ν, die unter Abänderung der bisherigen Numerierung jetzt mit $u_1, \ldots, u_k$ bezeichnet seien, so daß die Determinante ihrer Koeffizientenmatrix $\neq 0$ ist. Das System (28) kann dann nach $u_1, \ldots, u_k$ aufgelöst werden:

$$u_\mu = \sum_{\nu=k+1}^{M} \gamma_{\mu,\nu} u_\nu \qquad (\mu = 1, \ldots, k); \tag{30}$$

$u_{k+1}, \ldots, u_M$ mögen freie Variable heißen.

Die $M - k$ Gleichungen (29) haben nach Eintragen von (30) die Gestalt

$$\sum_{\nu=k+1}^{2M} \beta_{\mu,\nu} u_\nu = 0 \qquad (\mu = k+1, \ldots, M),$$

und aus ihnen lassen sich nach unserer Annahme keine weiteren Gleichungen gewinnen, die nur $u_1, \ldots, u_M$ enthalten. Da die Gleichungen außerdem linear unabhängig sind, haben in ihnen $M - k$ der Größen u_ν mit $\nu \geqq M + 1$ eine Koeffizientenmatrix, deren Determinante $\neq 0$ ist. Unter Abänderung der bisherigen Numerierung seien diese Größen mit $u_{M+k+1}, \ldots, u_{2M}$ bezeichnet, während die übrigen u_ν mit $\nu \geqq M + 1$ die Nummern $M + 1, \ldots, M + k$ erhalten. Die obigen Gleichungen können dann nach $u_{M+k+1}, \ldots, u_{2M}$ aufgelöst werden:

$$u_\mu = \sum_{\nu=k+1}^{M+k} \gamma_{\mu,\nu} u_\nu \qquad (\mu = M + k + 1, \ldots, 2M). \tag{31}$$

Die Gleichungen (30) + (31) besagen dasselbe wie die Gleichungen (28) + (29) und damit dasselbe wie die Gleichungen (19).

Die vorgenommene Umnumerierung der $u_1, \ldots, u_M$ hat für die Bilinearform $A(u, v)$ die Wirkung, daß in der Matrix $(a_{p,q})$ Zeilen vertauscht werden und ebenso die entsprechenden Spalten, also nur Spalten mit einer Nummer $q \leqq M$. Die Umnumerierung der $u_{M+1}, \ldots, u_{2M}$ hat die Wirkung, daß in der Matrix $(a_{p,q})$ Spalten mit Nummern $q \geqq M + 1$ vertauscht werden.

Man erhält also jedenfalls wieder eine Bilinearform (27) mit der Eigenschaft (26); ferner bleibt die Eigenschaft (21) erhalten, wenn sie für die ursprüngliche Bilinearform gilt.

2. 3. Gestalt der Bilinearform nach Eintragen der Nebenbedingungen. In den Gleichungen (30) und (31) können $u_{k+1}, \ldots, u_{k+M}$ willkürlich gewählt werden. Zunächst werden nur die Gleichungen (30) berücksichtigt, d. h. die aus (30) sich ergebenden Werte $u_1, \ldots, u_k$ und ebenso $v_1, \ldots, v_k$ aus den Gleichungen mit v statt u werden in (27) eingetragen. Weiter wird

$$u_\mu = U_\mu + \sum_{\nu=k+1}^{M+k} \gamma_{\mu,\nu} u_\nu \qquad (\mu = M+k+1, \ldots, 2M) \tag{32}$$

gesetzt[24]); entsprechende Gleichungen werden mit v statt u gebildet. Dann bedeutet

$$U_{M+k+1} = 0, \ \ldots, \ U_{2M} = 0, \tag{33}$$

daß auch die Gleichungen (31) erfüllt sind. Vorerst brauchen diese letzten Gleichungen jedoch nicht erfüllt zu sein.

Trägt man die k Nebenbedingungen (30) für u und v und außerdem (32) in (27) ein, so entsteht[25])

$$\begin{aligned}
\bar{A}(u,v) = &\sum_{p=1}^{k}\Big(\sum_{q=1}^{k} + \sum_{q=k+1}^{M+k} + \sum_{q=M+k+1}^{2M}\Big) + \sum_{p=k+1}^{M}\Big(\sum_{q=1}^{k} + \sum_{q=k+1}^{M+k} + \sum_{q=M+k+1}^{2M}\Big) \\
= &\sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{k} a_{p,q} \sum_{\mu=k+1}^{M}\sum_{\nu=k+1}^{M} \gamma_{q,\mu}\gamma_{p,\nu} u_\mu v_\nu \\
&+ \sum_{p=1}^{k}\sum_{q=k+1}^{M+k} a_{p,q} u_q \sum_{\nu=k+1}^{M} \gamma_{p,\nu} v_\nu \\
&+ \sum_{p=1}^{k}\sum_{q=M+k+1}^{2M} a_{p,q}\Big(U_q \sum_{\nu=k+1}^{M} \gamma_{p,\nu} v_\nu + \sum_{\mu=k+1}^{M+k}\sum_{\nu=k+1}^{M} \gamma_{p,\nu}\gamma_{q,\nu} u_\mu v_\nu\Big) \\
&+ \sum_{p=k+1}^{M}\sum_{q=1}^{k} a_{p,q} v_p \sum_{\mu=k+1}^{M} \gamma_{q,\mu} u_\mu + \sum_{p=k+1}^{M}\sum_{q=k+1}^{M+k} a_{p,q} v_p u_q \\
&+ \sum_{p=k+1}^{M}\sum_{q=M+k+1}^{2M} a_{p,q}\Big(v_p U_q + v_p \sum_{\mu=k+1}^{M+k} \gamma_{q,\mu} u_\mu\Big).
\end{aligned}$$

Erfüllen die u und v auch noch die restlichen Nebenbedingungen (29), d. h. die Gleichungen (31), so gilt (33). Der dann aus $\bar{A}(u, v)$ entstehende Ausdruck sei mit $A_0(u, v)$ bezeichnet.

Die Bedingung (26) besagt nun, daß

$$A_0(u, v) = A_0(v, u) \tag{34}$$

---

[24]) Die hier auftretenden Größen U_μ haben natürlich eine andere Bedeutung als die U_μ in (2).

[25]) Leere Summen bedeuten 0.

für beliebige Zahlen

$$u_{k+1}, \ldots, u_{M+k} \quad \text{und} \quad v_{k+1}, \ldots, v_{M+k}$$

gilt. $A_0(u, v)$, d. h. das obige $\overline{A}(u, v)$ mit $U_q = 0$, enthält aber offensichtlich kein v_ν mit $\nu > M$, d. h. $A_0(v, u)$, enthält kein u_ν mit $\nu > M$, also enthält nach (34) auch $A_0(u, v)$ kein solches u_ν, d. h. es ist

$$\sum_{\mu=M+1}^{M+k} \sum_{\nu=k+1}^{M} u_\mu v_\nu \Big(\sum_{p=1}^{k} a_{p,\mu} \gamma_{p,\nu} + \sum_{p=1}^{k} \sum_{q=M+k+1}^{2M} a_{p,q} \gamma_{p,\nu} \gamma_{q,\mu} + a_{\nu,\mu} + \sum_{q=M+k+1}^{2M} a_{\nu,q} \gamma_{q,\mu} \Big) = 0$$

für beliebige u_μ, v_ν, also

$$(35) \quad \sum_{p=1}^{k} \sum_{q=M+k+1}^{2M} a_{p,q} \gamma_{p,\nu} \gamma_{q,\mu} + \sum_{p=1}^{k} a_{p,\mu} \gamma_{p,\nu} + \sum_{q=M+k+1}^{2M} a_{\nu,q} \gamma_{q,\mu} + a_{\nu,\mu} = 0$$

für $M + 1 \leqq \mu \leqq M + k$, $k + 1 \leqq \nu \leqq M$.

In $\overline{A}(u, v)$ und $A_0(u, v)$ fallen somit alle Glieder fort, die ein u_q mit $M + 1 \leqq q \leqq M + k$ enthalten. Damit wird

$$(36) \quad A_0(u, v) = \sum_{\mu=k+1}^{M} \sum_{\nu=k+1}^{M} u_\mu v_\nu \Big\{ \sum_{p=1}^{k} \gamma_{p,\nu} \Big(\sum_{q=1}^{k} a_{p,q} \gamma_{q,\mu} + \sum_{q=M+k+1}^{2M} a_{p,q} \gamma_{q,\mu} \Big) + \sum_{p=1}^{k} a_{p,\mu} \gamma_{p,\nu} + \sum_{q=1}^{k} a_{\nu,q} \gamma_{q,\mu} + \sum_{q=M+k+1}^{2M} a_{\nu,q} \gamma_{q,\mu} + a_{\nu,\mu} \Big\}$$

eine Bilinearform von $2(M - k)$ unabhängigen Veränderlichen und

$$(37) \quad \overline{A}(u, v) = A_0(u, v) + \sum_{\nu=k+1}^{M} v_\nu \sum_{q=M+k+1}^{2M} U_q \Big(\sum_{p=1}^{k} a_{p,q} \gamma_{p,\nu} + a_{\nu,q} \Big).$$

Da bei dieser Umformung von der Ungleichung (21) kein Gebrauch gemacht ist, gilt eine entsprechende Umformung auch für die Bilinearform (22).

2. 4. Bilinearformen mit der Eigenschaft (21). Gilt für die Bilinearform auch noch die Ungleichung (21) und ist

$$(38) \quad \overline{A}(u, v) - A_0(u, v) = 0$$

für beliebige Werte der freien Variabeln $v_{k+1}, \ldots, v_M$, so bestehen die Gleichungen (33), d. h. die u_ν erfüllen die Gleichungen (31).

Wird nämlich zur Abkürzung

$$(39) \quad A_{\nu,\mu} = \sum_{p=1}^{k} a_{p,\mu} \gamma_{p,\nu} + a_{\nu,\mu}$$

gesetzt, so folgt aus (38) und (37)

$$(40) \quad \sum_{q=M+k+1}^{2M} A_{\nu,q} U_q = 0 \qquad (\nu = k+1, \ldots, M).$$

Ferner wird aus (35)

$$(41)\quad \sum_{q=M+k+1}^{2M} A_{\nu,q}\gamma_{q,\mu} + A_{\nu,\mu} = 0 \quad (M+1 \leqq \mu \leqq M+k,\ k+1 \leqq \nu \geqq M).$$

Wenn aus (40) nicht die Gleichungen (33) gefolgert werden können, so ist

$$\mathrm{Det}\,|A_{\nu,q}| = 0 \quad (\nu = k+1, \ldots, M;\ q = M+k+1, \ldots, 2M).$$

Dann gibt es Zahlen $h_{k+1}, \ldots, h_M$, die nicht alle 0 sind und für die

$$\sum_{\nu=k+1}^{M} h_\nu A_{\nu,q} = 0 \quad (q = M+k+1, \ldots, 2M)$$

ist. Nach (41) ist dann auch für $\mu = M+1, \ldots, M+k$

$$\sum_{\nu=k+1}^{M} h_\nu A_{\nu,\mu} = -\sum_{q=M+k+1}^{2M} \gamma_{q,\mu} \sum_{\nu=k+1}^{M} h_\nu A_{\nu,q} = 0,$$

d. h. es ist im Ganzen

$$\sum_{\nu=k+1}^{M} h_\nu A_{\nu,\mu} = 0 \qquad \text{für } \mu = M+1, \ldots, 2M.$$

Diese Gleichungen besagen nach (39) für $\mu = M+1, \ldots, 2M$

$$0 = \sum_{\nu=k+1}^{M} h_\nu \left(\sum_{p=1}^{k} a_{p,\mu}\gamma_{p,\nu} + a_{\nu,\mu} \right)$$

$$= \sum_{p=1}^{k} a_{p,\mu} \sum_{\nu=k+1}^{M} h_\nu \gamma_{p,\nu} + \sum_{\nu=k+1}^{M} h_\nu a_{\nu,\mu},$$

d. h. das Gleichungssystem

$$\sum_{p=1}^{M} a_{p,\mu} x_p = 0 \qquad (\mu = M+1, \ldots, 2M)$$

hat, da nicht alle h_ν Null sind, eine eigentliche Lösung, also müßte

$$\mathrm{Det}\,|a_{p,\mu}| = 0 \quad (p = 1, \ldots, M;\ \mu = M+1, \ldots, 2M)$$

sein, im Widerspruch zu (21). Daher folgt aus (40) und somit aus (38) tatsächlich (33).

2. 5. Folgerungen für die Dirichletschen Restteile. Ich kehre nun zum Ausgangspunkt dieses Paragraphen zurück. Aus dem Vorangehenden (vgl. insbes. 2. 3) ergibt sich, daß $[R(u,v)]_a^b$ für $(2m-1)$-mal stetig differenzierbare Funktionen u, welche alle Randbedingungen (2) erfüllen, und $(m-1)$-mal stetig differenzierbare Funktionen v, welche die wesentlichen Randbedingungen (6) erfüllen, nach Eintragen dieser Randbedingungen eine Bilinearform $F_0(u,v)$ von gewissen $2m-k$ der Größen $u^{(\nu)}(a)$, $u^{(\nu)}(b)$ und den entsprechenden Größen $v^{(\nu)}(a)$, $v^{(\nu)}(b)$ mit $\nu \leqq m-1$, den freien Ableitungen (vgl. 1. 3) wird. Diese Bilinearform, das vorherige $A_0(u,v)$ der Formel (37), wird im folgenden als selbstständige Bilinearform, ohne Rücksicht auf ihre Entstehung und die dabei über die u, v gemachten Voraus-

setzungen auftreten, und ist der *reduzierte* DIRICHLETsche *Restteil*. Er kann für alle zulässigen Funktionen u, v gebildet werden und ist nach (25) bzw. (34) eine symmetrische Funktion

$$F_0(u, v) = F_0(v, u). \tag{42}$$

Führt man dieselbe Umformung von $[S(u, v)]_a^b$ mit den gleichen freien Ableitungen durch, so kommt man auf eine Bilinearform $G_0(u, v)$ derselben freien Ableitungen, für die ebenfalls

$$G_0(u, v) = G_0(v, u) \tag{43}$$

gilt, und schließlich führt $[T(u, v)]_a^b$ auf

$$F_0(u, v) - \lambda G_0(u, v).$$

Eine weitere Folgerung war in 2. 3 für Bilinearformen A gezogen, für welche die Ungleichung (21) gilt. Die Bilinearform $C(u, v)$ erfüllt nach (24) die entsprechende Ungleichung. Daher gilt das Ergebnis auch für C und kann so formuliert werden:

Sind u, v zulässige Funktionen und ist u in den Randpunkten a, b sogar $(2m - 1)$-mal differenzierbar, so werden aus $[R(u, v)]_a^b$ und $[S(u, v)]_a^b$ nach Eintragen der wesentlichen Randbedingungen (6) Bilinearformen

$$\overline{F}(u, v) \quad \text{und} \quad \overline{G}(u, v)$$

der freien Ableitungen $u^{(\nu)}(a)$, $u^{(\nu)}(b)$ und $v^{(\nu)}(a)$, $v^{(\nu)}(b)$ sowie der höheren Ableitungen von u mit folgender Eigenschaft: ist für ein λ

$$\overline{F}(u, v) - \lambda \overline{G}(u, v) - [F_0(u, v) - \lambda G_0(u, v)] = 0$$

für alle freien Ableitungen $v^{(\nu)}(a)$, $v^{(\nu)}(b)$, so erfüllt u auch die restlichen Randbedingungen (7) und somit alle Randbedingungen (2).

§ 3.

Beispiele.

3. 1. Eigenwertaufgaben zweiter Ordnung. Für diese ist $m = 1$, also $n = 0$. Die Differentialgleichung (1) hat dann die Gestalt

$$(fy')' + hy + \lambda gy = 0,$$

wo $f = f(x)$ in $\langle a, b\rangle$ stetig differenzierbar, $h = h(x)$ und $g = g(x)$ stetig, $f \neq 0$ und $g \neq 0$ ist. Die Randbedingungen sind [26])

$$\alpha_1 y_a + \alpha_1' y_a' + \beta_1 y_b + \beta_1' y_b' = 0,$$
$$\alpha_2 y_a + \alpha_2' y_a' + \beta_2 y_b + \beta_2' y_b' = 0.$$

[26]) Der Index a oder b bedeutet, daß $x = a$ oder $x = b$ einzutragen ist; also z. B. $y_a' = y'(a)$, $(fy'')_a' = f(a)\, y'''(a) + f'(a)\, y''(a)$.

Die Matrix der Koeffizienten hat den Rang 2. Daß die Eigenwertaufgabe selbstadjungiert ist, ergibt die Bedingung

$$(\alpha_1\alpha_2' - \alpha_1'\alpha_2)\, f_b = (\beta_1\beta_2' - \beta_1'\beta_2) f_a .$$

Wird die Differentialgleichung in der Gestalt

$$-(fy')' - hy = \lambda g y$$

geschrieben, so lautet die Variationsaufgabe (10)

$$\frac{\int (f y'^2 - h y^2)\, dx + F_0(y, y)}{\int g y^2\, dx} = \text{Min},$$

wobei $F_0(y, y)$ aus dem DIRICHLETschen Restteil

$$[R(y, y)]_a^b = [-fyy']_a^b = f_a y_a y_a' - f_b y_b y_b'$$

durch Reduktion mittels der Randbedingungen zu bilden ist. Dabei ist vorauszusetzen, daß die Aufgabe definit ist. Nach (8) ist dafür

$$f > 0, \quad h \leqq 0, \quad g \geqq 0$$

vorauszusetzen. Es bleibt noch zu untersuchen, wann (9) erfüllt ist, d. h. wann $F_0(y, y) \geqq 0$ gilt. Hierfür sind folgende Fälle zu unterscheiden, wobei die Randbedingungen schon in die Gestalt von wesentlichen und restlichen Randbedingungen gebracht sind:

(a) $y_a = 0,\ y_b = 0;$ $\quad F_0 = 0.$

(b) $y_a = 0,\ y_b' = -\beta y_b;$ $\quad F_0 = \beta f_b y_b^2.$

(c) $y_b = 0,\ y_a' = \alpha y_a;$ $\quad F_0 = \alpha f_a y_a^2.$

(d) $y_a = y_b,\ f_a y_a' = f_b y_b';$ $\quad F_0 = 0.$

(e) $y_a' = \alpha y_a + \gamma f_b y_b,$ $\quad y_b' = -\gamma f_a y_a - \beta y_b;$

$$F_0 = \alpha f_a y_a^2 + \beta f_b y_b^2 + 2\gamma f_a f_b y_a y_b .$$

Im Fall (a) sind beide Randbedingungen wesentlich, in den Fällen (b), (c), (d) ist die erste Randbedingung die wesentliche, die zweite die restliche, im Fall (e) gibt es keine wesentlichen Randbedingungen. Wie die für F_0 angegebenen Ausdrücke zeigen, ist die Aufgabe nur definit, wenn $\alpha \geqq 0,\ \beta \geqq 0$ und im Fall (e) außerdem $f_a f_b \gamma^2 < \alpha\beta$ ist. Die ersten vier Fälle finden sich bei HOLMGREN, während der fünfte Fall anscheinend in der Literatur nicht enthalten ist[27]).

[27]) Nach einer mündlichen Mitteilung von Herrn HAMEL hat dieser jedoch in seinen Vorlesungen auf den Fall (e) hingewiesen.

3.2. Eigenwertaufgaben vierter Ordnung mit Sturmschen Randbedingungen. Die Eigenwertaufgabe sei

$$(fy'')'' + (gy')' + hy = \lambda g_0 y$$

mit den Randbedingungen

$$\alpha_\nu y_a + \beta_\nu y_a' + \gamma_\nu f_a y_a'' + \delta_\nu [(fy'')_a + g_a y_a'] = 0 \qquad (\nu = 1, 2),$$
$$\alpha_\nu y_b + \beta_\nu y_b' + \gamma_\nu f_b y_b'' + \delta_\nu [(fy'')_b + g_b y_b'] = 0 \qquad (\nu = 3, 4).$$

Dabei ist $f = f(x)$ in $\langle a, b\rangle$ zweimal stetig differenzierbar, $g = g(x)$ einmal stetig differenzierbar, $h = h(x)$ und $g_0 = g_0(x)$ stetig, ferner $f \neq 0$, $g_0 \not\equiv 0$. Die Aufgabe ist genau dann selbstadjungiert, wenn

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \delta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \alpha_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \delta_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_3 & \gamma_3 \\ \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix}$$

ist. Die Variationsaufgabe (10) lautet

$$\frac{\int (fy''^2 - gy'^2 + hy^2)\,dx + F_0(y, y)}{\int g_0 y^2\,dx} = \text{Min},$$

wobei F_0 aus dem Dirichletschen Restteil

$$[R(y, y)]_a^b = R_b - R_a$$

mit

$$R(y, y) = [(fy'')' + gy']\,y - fy'y''$$

zu bilden ist. Dabei ist vorauszusetzen, daß die Aufgabe definit ist. Nach (8) ist dafür

$$f > 0, \quad g \leqq 0, \quad h \geqq 0, \quad g_0 \geqq 0$$

vorauszusetzen. Weiter ist noch zu untersuchen, wann (9), d. h. $F_0(y, y) \geqq 0$ gilt. Hierfür genügt es, R_a mittels der auf den Randpunkt a bezüglichen Randbedingungen zu reduzieren, da man dann offenbar auch R_b und somit F_0 sofort hinschreiben kann. Dabei werden folgende Fälle unterschieden, wobei wiederum die Randbedingungen in die Gestalt von wesentlichen und restlichen Randbedingungen gebracht sind.

(a) $y_a = 0$, $y_a' = 0$; $\qquad F_{0,a} = 0.$

(b) $y_a = 0$, $y_a'' = \alpha y_a'$; $\qquad F_{0,a} = -\alpha f_a y_a'^2.$

(c) $y_a' = \alpha y_a$, $(fy'')_a' = \beta y_a + \alpha f_a y_a''$; $\qquad F_{0,a} = (\beta + \alpha g_a) y_a^2.$

(d) $f_a y_a'' = \alpha y_a + \beta y_a'$, $(fy'')_a' = \gamma y_a - (\alpha + g_a) y_a'$;
$$F_{0,a} = \gamma y_a^2 - 2\alpha y_a y_a' - \beta y_a'^2.$$

Bei (a) sind beide Randbedingungen wesentlich, bei (b) und (c) die ersten, bei (d) gibt es keine wesentlichen Randbedingungen. Bei (b) und (c) ist $-F_{0,a} \geqq 0$, wenn $\alpha \geqq 0$ bzw. $\beta + \alpha g_a \leqq 0$ ist; bei (d) ist $\beta \geqq 0$, $\gamma \leqq 0$ und $\alpha^2 \leqq |\beta\gamma|$ erforderlich.

§ 4.

Beweis des Hauptsatzes.

4. 1. Abkürzungen und Hilfsformeln. Für zulässige Funktionen $u(x)$, $v(x)$ der Eigenwertaufgabe (1), (2) und die reduzierten Restteile F_0, G_0 (vgl. 2. 5) der DIRICHLETschen Formel wird zur Abkürzung

$$(44)\qquad \begin{cases} \Phi(u,v) = \int \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu f_\nu u^{(\nu)} v^{(\nu)}\, dx + F_0(u,v), \\ \Psi(u,v) = \int \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu u^{(\nu)} v^{(\nu)}\, dx + G_0(u,v), \\ \Phi(u) = \Phi(u,u), \qquad \Psi(u) = \Psi(u,u) \end{cases}$$

gesetzt. Wegen der Symmetrie von F_0, G_0 (vgl. 2. 5) ist dann

$$(45)\qquad \Phi(u,v) = \Phi(v,u), \quad \Psi(u,v) = \Psi(v,u),$$

ferner wegen der Bilinearität für beliebige Zahlen r, s

$$(46)\qquad \begin{cases} \Phi(ru+sv) = r^2\Phi(u) + 2rs\Phi(u,v) + s^2\Phi(v), \\ \Psi(ru+sv) = r^2\Psi(u) + 2rs\Psi(u,v) + s^2\Psi(v). \end{cases}$$

Da hierin wegen der Definitheit (vgl. 1. 3) die linken Seiten $\geqq 0$ sind, folgt

$$(47)\qquad |\Phi(u,v)|^2 \leqq \Phi(u)\Phi(v), \quad |\Psi(u,v)|^2 \leqq \Psi(u)\Psi(v).$$

4. 2. Beginn des Beweises. Für den Bereich der zulässigen Funktionen $u(x)$, für die $\Psi(u) \neq 0$ ist[28]), sei

$$(48)\qquad \lambda_1 = \operatorname*{fin}_u \frac{\Phi(u)}{\Psi(u)}.$$

Da Zähler und Nenner $\geqq 0$ sind, ist $\lambda_1 \geqq 0$. Es soll gezeigt werden:

(a) der rechts stehende Bruch hat in dem Bereich der zulässigen Funktionen sogar ein Minimum, d. h. es gibt eine zulässige Funktion $u(x)$, für die

$$(49)\qquad \Phi(u) = \lambda_1 \Psi(u)$$

ist;

(b) jede Funktion dieser Art ist sogar $2m$-mal stetig differenzierbar und erfüllt die Differentialgleichung (1) sowie die restlichen Randbedingungen (7), also alle Randbedingungen (2) und ist somit, da zulässige Funktionen $\neq 0$ sind, eine zu λ_1 gehörige Eigenfunktion der Eigenwertaufgabe (1), (2); λ_1 ist der kleinste Eigenwert.

Damit ist dann der Satz 1 von 1. 4 bewiesen.

---

[28]) Es gibt solche Funktionen $u(x)$. Denn es ist $g_n \not\equiv 0$. Wählt man eine m-mal stetig differenzierbare Funktion $u(x)$, die mit ihren ersten $m-1$ Ableitungen in den Punkten a und b verschwindet, deren n-te Ableitung aber $\neq 0$ ist in einem Intervall, in dem $g_n \neq 0$ ist, so ist dies eine zulässige Funktion, und nach (8) und (9) ist $\Psi(u) > 0$.

Jedenfalls gibt es eine Folge zulässiger Funktionen $u_1(x), u_2(x), \ldots$, für die $\Psi(u_h) \neq 0$ und

$$\lim_{h \to \infty} \frac{\Phi(u_h)}{\Psi(u_h)} = \lambda_1$$

ist[29]). Indem man jedes u_h mit einem passenden Zahlenfaktor multipliziert, kann man erreichen, daß

$$\Psi(u_h) = 1 \qquad (h = 1, 2, \ldots), \tag{50}$$

also

$$\lim_{h \to \infty} \Phi(u_h) = \lambda_1 \tag{51}$$

ist. Diese Folge zulässiger Funktionen bleibt zunächst fest. Dann gelten folgende Hilfssätze:

4.3. Es sei $v_1(x), v_2(x), \ldots$ eine Folge zulässiger Funktionen, für die

$$\Phi(v_h), \quad \Psi(v_h) \text{ beschränkt} \tag{52}$$

und

$$\Psi(u_h, v_h) = 0 \tag{53}$$

ist. Dann ist

$$\Phi(u_h, v_h) \to 0 \quad \text{für} \quad h \to \infty. \tag{54}$$

Beweis. Für beliebige Zahlen r_h, s_h sind auch $w_h = r_h u_h + s_h v_h$ zulässige Funktionen. Nach (46) ist

$$\Phi(w_h) = r_h^2 \Phi(u_h) + 2 r_h s_h \Phi(u_h, v_h) + s_h^2 \Phi(v_h),$$
$$\Psi(u_h) = r_h^2 \Psi(u_h) + 2 r_h s_h \Psi(u_h, v_h) + s_h^2 \Psi(v_h).$$

Nach (50) und (53) ist also

$$\Psi(w_h) = r_h^2 + s_h^2 \Psi(v_h) = 1,$$

wenn

$$r_h^2 = 1 - s_h^2 \Psi(v_h) \tag{55}$$

ist. Man wähle $s_h > 0$ so, daß die rechte Seite dieser Gleichung > 0 und $s_h \to 0$ ist. Wegen (52) ist dann $|r_h| \to 1$; über das noch freie Vorzeichen von r_h wird weiter unten verfügt werden. Nach (48) ist nun

$$\lambda_1 \leqq \frac{\Phi(w_h)}{\Psi(w_h)} = \Phi(w_h)$$
$$= r_h^2 \Phi(u_h) + 2 r_h s_h \Phi(u_h, v_h) + s_h^2 \Phi(v_h).$$

also nach (55)

$$\lambda_1 \leqq \Phi(u_h) + 2 r_h s_h \Phi(u_h, v_h) + s_h^2 [\Phi(v_h) - \Psi(v_h)].$$

---

[29]) Die u_h dürfen, was später benutzt wird, auch alle übereinstimmen.

Nach (48) und (50) ist $\Phi(u_h) \geqq \lambda_1$, also, da $s_h > 0$ ist,

$$2 r_h \Phi(u_h, v_h) + s_h [\Phi(v_h) - \Psi(v_h)] \geqq 0$$

und somit wegen $s_h \to 0$ und (52)

$$\overline{\lim_{h \to \infty}} r_h \Phi(u_h, v_h) \geqq 0.$$

Wird das noch freie Vorzeichen von r_h entgegengesetzt zu dem von $\Phi(u_h, v_h)$ gewählt, so folgt hieraus wegen $|r_h| \to 1$ die Relation (54).

4.4. Jede der Folgen

$$u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}, \ldots \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, m-1)$$

ist in $a \leqq x \leqq b$ gleichmäßig beschränkt.

Beweis. Zunächst wird bewiesen:

(a) Zu jedem $0 \leqq \nu \leqq m-1$ und jedem h gibt es im Intervall $\langle a, b\rangle$ einen Punkt $\xi_{h,\nu}$, so daß die Folge

$$u_h^{(\nu)}(\xi_{h,\nu}) \qquad (h = 1, 2, \ldots)$$

beschränkt ist.

Angenommen, diese Behauptung sei falsch. Dann ist für ein $0 \leqq \nu \leqq m-1$

$$\overline{\lim_{h \to \infty}} \operatorname{Min}_{a \leqq x \leqq b} |u_h^{(\nu)}(x)| = \infty, \tag{56}$$

und es gibt ein kleinstes ν dieser Art. Ist dieses $\geqq 1$, so ist

$$|u_h^{(\nu-1)}(\xi_{h,\nu-1})| \text{ beschränkt, etwa } \leqq A_{\nu-1} \tag{57}$$

für eine geeignet gewählte Folge von Punkten

$$\xi_{h,\nu-1} \qquad (h = 1, 2, \ldots)$$

des Intervalls $\langle a, b\rangle$. Weiter werden nur diejenigen h betrachtet, für die

$$\operatorname{Min}_{a \leqq x \leqq b} |u_h^{(\nu)}| > 0$$

ist. Nach (56) gibt es unendlich viele solcher h, und für sie hat jedes $u_h^{(\nu)}(x)$ als stetige Funktion ein festes Vorzeichen. Daher ist für diese h

$$|u_h^{(\nu-1)}(x) - u_h^{(\nu-1)}(\xi_{h,\nu-1})| = \left| \int_{\xi_{h,\nu-1}}^{x} |u_h^{(\nu)}(x)| dx \right|,$$

also wegen (57)

$$|u_h^{(\nu-1)}(x)| \geqq \left| \int_{\xi_{h,\nu-1}}^{x} |u_h^{(\nu)}(x)| \, dx \right| - A_{\nu-1}.$$

Es sei nun $\langle x_1, x_2\rangle$ ein festes Teilintervall von $\langle a, b\rangle$. Dann gibt es in $\langle x_1, x_2\rangle$ für jedes h ein Teilintervall $i_{h,\nu-1}$ der Länge $\frac{x_2 - x_1}{4}$, so daß zwischen dem

Intervall $\mathfrak{i}_{h,\nu-1}$ und dem Punkt $\xi_{h,\nu-1}$ ein Teilintervall $\mathfrak{i}^*_{h,\nu-1}$ der Länge $\frac{x_2-x_1}{4}$ liegt. Für diese Intervalle folgt aus der obigen Ungleichung

$$\operatorname*{Min}_{x \text{ in } \mathfrak{i}_{h,\nu-1}} |u_h^{(\nu-1)}(x)| \geqq \int_{\mathfrak{i}^*_{h,\nu-1}} |u_h^{(\nu)}(x)|\,dx - A_{\nu-1}$$

$$\geqq \frac{x_2-x_1}{4} \operatorname*{Min}_{a \leqq x \leqq b} |u_h^{(\nu)}(x)| - A_{\nu-1},$$

also nach (56)

$$\overline{\lim_{h\to\infty}} \operatorname*{Min}_{x \text{ in } \mathfrak{i}_{h,\nu-1}} |u_h^{(\nu-1)}(x)| = \infty. \tag{58}$$

Weiter ist, falls sogar $\nu \geqq 2$ ist, nach der Minimaleigenschaft von ν auch

$$|u_h^{(\nu-2)}(\xi_{h,\nu-2})| \text{ beschränkt, etwa } \leqq A_{\nu-2} \tag{59}$$

für eine geeignet gewählte Zahlenfolge

$$\xi_{h,\nu-2} \qquad (h = 1, 2, \ldots).$$

Aus (58) folgt, daß $u_h^{(\nu-1)}(x)$ in $\mathfrak{i}_{h,\nu-1}$ für unendlich viele h ein festes Vorzeichen hat. Für diese h ergibt sich mit (59) wie vorhin

$$|u_h^{(\nu-2)}(x)| \geqq \left| \int_{\xi_{h,\nu-2}}^{x} |u_h^{(\nu-1)}(x)|\,dx \right| - A_{\nu-2}.$$

In jedem Intervall $\mathfrak{i}_{h,\nu-1}$ gibt es ein Teilintervall $\mathfrak{i}_{h,\nu-2}$ der Länge $\frac{x_2-x_1}{4^2}$, so daß zwischen dem Teilintervall $\mathfrak{i}_{h,\nu-2}$ und dem Punkt $\xi_{h,\nu-2}$ noch ein Teilintervall $\mathfrak{i}^*_{h,\nu-2}$ von $\mathfrak{i}_{h,\nu-1}$ mit der Länge $\frac{x_2-x_1}{4^2}$ liegt. Für diese Intervalle folgt aus der obigen Ungleichung

$$\operatorname*{Min}_{x \text{ in } \mathfrak{i}_{h,\nu-2}} |u_h^{(\nu-2)}(x)| \geqq \int_{\mathfrak{i}^*_{h,\nu-2}} |u_h^{(\nu-1)}(x)|\,dx - A_{\nu-2}$$

$$\geqq \frac{x_2-x_1}{4^2} \operatorname*{Min}_{x \text{ in } \mathfrak{i}_{h,\nu-1}} |u_h^{(\nu-1)}(x)| - A_{\nu-2},$$

also wegen (58)

$$\overline{\lim_{h\to\infty}} \operatorname*{Min}_{x \text{ in } \mathfrak{i}_{h,\nu-2}} |u_h^{(\nu-2)}(x)| = \infty.$$

In dieser Weise kann man fortfahren. Man erhält schließlich

$$\overline{\lim_{h\to\infty}} \operatorname*{Min}_{x \text{ in } \mathfrak{i}_{h,0}} |u_h(x)| = \infty$$

für eine Folge von Teilintervallen $\mathfrak{i}_{h,0}$ der Länge $\frac{x_2-x_1}{4^\nu}$ in dem Intervall $\langle x_1, x_2\rangle$.

Das führt aber zu einem Widerspruch, wenn für $\langle x_1, x_2\rangle$ ein Intervall gewählt wird, in dem $f_0(x) + g_0(x) \geqq \frac{1}{A} > 0$ ist. Dann ergibt sich nämlich

mit der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung für jedes $i_{h,0}$, wenn dieses die Endpunkte ξ_h, η_h hat,

$$\left(\int_{\xi_h}^{\eta_h} 1 \cdot |u_h(x)|\,dx\right)^2 \leqq (\eta_h - \xi_h)\int_{\xi_h}^{\eta_h} u_h^2\,dx$$

$$\leqq \frac{x_2 - x_1}{4^\nu} A \int_{\xi_h}^{\eta_h} (f_0 u_h^2 + g_0 u_h^2)\,dx$$

$$\leqq \frac{x_2 - x_1}{4^\nu} A\,[\Phi(u_h) + \Psi(u_h)] \leqq B^2,$$

wo B nach (50) und (51) von h unabhängig ist. Hieraus folgt

$$\min_{x \text{ in } i_{h,0}} |u_h(x)| \leqq \frac{1}{\eta_h - \xi_h}\int_{\xi_h}^{\eta_h} |u_h(x)|\,dx \leqq \frac{4^\nu B}{x_2 - x_1}.$$

Damit ist der gewünschte Widerspruch erreicht und somit die Behauptung (a) bewiesen.

(b) Mit (a) ergibt sich nun die ursprüngliche Behauptung so: Aus (51) folgt, daß die Folge der $\Phi(u_h)$ beschränkt ist. Nach (44) ist dann wegen der Definitheit der Aufgabe [vgl. (44) und (8)] erst recht die Folge

$$\int_a^b (-1)^m f_m u_h^{(m)2}\,dx \qquad (h = 1, 2, \ldots)$$

beschränkt, also, da $(-1)^m f_m > 0$ und stetig ist, auch

$$\int_a^b u_h^{(m)2}\,dx \qquad (h = 1, 2, \ldots)$$

beschränkt, also nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung

$$\int_a^b 1 \cdot |u_h^{(m)}|\,dx \leqq \left\{(b-a)\int_a^b u_h^{(m)2}\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

beschränkt. Aus

$$u_h^{(m-1)}(x) = u_h^{(m-1)}(\xi_{h,m-1}) + \int_{\xi_{h,m-1}}^{x} u_h^{(m)}\,dx$$

folgt weiter, daß die $u_h^{(m-1)}$ in $\langle a, b\rangle$ gleichmäßig beschränkt sind, und hieraus mit

$$u_h^{(m-2)}(x) = u_h^{(m-2)}(\xi_{h,m-2}) + \int_{\xi_{h,m-2}}^{x} u_h^{(m-1)}\,dx$$

die gleichmäßige Beschränktheit der $u_h^{(m-2)}(x)$; usw. Damit ist die Behauptung bewiesen.

4. 5. Jede der Folgen

$$u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}, \ldots \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, m-1)$$

ist in $\langle a, b\rangle$ gleichgradig stetig.

Beweis. Für $0 \leqq \nu \leqq m-2$ ist nach 4. 4 bei passend gewähltem A

$$|u_h^{(\nu)}(x_2) - u_h^{(\nu)}(x_1)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} u_h^{(\nu+1)}(x)\,dx\right| \leqq |x_2 - x_1|\,A,$$

d. h. für $\nu \leqq m-2$ ist die Behauptung richtig. Für $\nu = m-1$ ist nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung, da $(-1)^m f_m \geqq B > 0$ bei passend gewähltem B ist,

$$\begin{aligned}(u_h^{(m-1)}(x_2) - u_h^{(m-1)}(x_1))^2 &= \Big(\int_{x_1}^{x_2} 1 \cdot u_h^{(m)}(x)\,dx\Big)^2 \\ &\leqq |x_2 - x_1| \left|\int_{x_1}^{x_2} u_h^{(m)2}\,dx\right| \\ &\leqq |x_2 - x_1| \frac{1}{B}\int_a^b (-1)^m f_m\, u_h^{(m)2}\,dx \\ &\leqq |x_2 - x_1| \frac{\Phi(u_h)}{B},\end{aligned}$$

und hieraus folgt die Behauptung auch für $\nu = m-1$, da die $\Phi(u_h)$ wegen (51) beschränkt sind.

4. 6. Für jede zulässige Funktion $w(x)$ ist

$$\Phi(u_h, w) - \lambda_1 \Psi(u_h, w) \to 0 \quad \text{für} \quad h \to \infty.$$

Beweis. Auch

$$v_h = w - u_h \Psi(u_h, w)$$

ist eine zulässige Funktion. Für diese ist nach (46)

$$\Phi(v_h) = \Phi(w) - 2\Psi(u_h, w)\Phi(u_h, w) + \Psi^2(u_h, w)\Phi(u_h).$$

Nach (50) und (51) sind die $\Phi(u_h)$, $\Psi(u_h)$ beschränkt, also nach (47) auch die $\Phi(u_h, w)$, $\Psi(u_h, w)$, also auch die $\Phi(v_h)$. Weiter ist nach (46) und (50)

$$\begin{aligned}\Psi(v_h) &= \Psi(w) - 2\Psi^2(u_h, w) + \Psi^2(u_h, w)\Psi(u_h) \\ &= \Psi(w) - \Psi^2(u_h, w),\end{aligned}$$

also sind die $\Psi(v_h)$ ebenfalls beschränkt. Schließlich ist

$$\begin{aligned}\Psi(u_h, v_h) &= \Psi(u_h, w) - \Psi(u_h, w)\Psi(u_h) \\ &= \Psi(u_h, w) - \Psi(u_h, w) = 0.\end{aligned}$$

Daher ist nach 4. 3

$$\Phi(u_h, v_h) \to 0 \quad \text{für} \quad h \to \infty,$$

d. h.

$$\Phi(u_h, w) - \Phi(u_h)\Psi(u_h, w) \to 0$$

oder

$$\Phi(u_h, w) - \lambda_1 \Psi(u_h, w) - [\Phi(u_h) - \lambda_1]\Psi(u_h, w) \to 0.$$

Da die $\Psi(u_h, w)$, wie vorher gezeigt, beschränkt sind. folgt hieraus die Behauptung nach (51).

4. 7. Beginn des Beweises der Behauptung (a): Für eine passend gewählte Teilfolge der Indizes h konvergieren die $u_h(x)$, nebst den $m-1$ ersten Ableitungen gegen eine zulässige Funktion $u(x)$ und deren $m-1$ ersten Ableitungen gleichmäßig im Intervall $\langle a, b\rangle$.

Beweis. Nach 4. 4 und 4. 5 ist die Folge

$$u_h^{(m-1)}(x) \qquad (h = 1, 2, \ldots)$$

in $\langle a, b\rangle$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig. Nach dem Satz von ARZELÀ gibt es daher eine Teilfolge, die in $\langle a, b\rangle$ gleichmäßig konvergiert und die wieder mit $u_h^{(m-1)}(x)$ bezeichnet sei. Die Funktion

$$u_{m-1}(x) = \lim_{h \to \infty} u_h^{(m-1)}(x) \tag{60}$$

ist dann in $\langle a, b\rangle$ stetig. Wegen 4. 4 kann die Teilfolge überdies so gewählt werden, daß auch jede der Folgen

$$u_1^{(\nu)}(a),\ u_2^{(\nu)}(a),\ \ldots \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, m-2) \tag{61}$$

konvergiert. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (60) und der Konvergenz von (61) für $\nu = m-2$ ist dann[30]) auch die Folge

$$u_h^{(m-2)}(x) \qquad (h = 1, 2, \ldots)$$

gleichmäßig konvergent, und, wenn ihr Grenzwert $u_{m-2}(x)$ ist, gilt $u'_{m-2} = u_{m-1}$. Ebenso ergibt sich, daß die Folge

$$u_h^{(m-3)}(x) \qquad (h = 1, 2, \ldots)$$

gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $u_{m-3}(x)$ konvergiert, für die $u'_{m-3} = u_{m-2}$ gilt, und allgemein, daß

$$u_h^{(\nu)}(x) \qquad (h = 1, 2, \ldots)$$

für jedes $0 \leqq \nu \leqq m-1$ gegen eine Grenzfunktion $u_\nu(x)$ konvergiert, für die

$$u'_\nu(x) = u_{\nu+1}(x) \qquad (0 \leqq \nu \leqq m-2)$$

---

[30]) Vgl., z. B. K. KNOPP, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Aufl., S. 353. Berlin 1931; dort für unendliche Reihen statt Folgen formuliert.

gilt. Wird $u(x) = u_0(x)$ gesetzt, so ist also

$$\lim_{h \to \infty} u_h^{(\nu)}(x) = u^{(\nu)}(x) \quad \text{für} \quad 0 \leqq \nu \leqq m-1,$$

und zwar gleichmäßig in $\langle a, b \rangle$. Da in $\Psi(u_h)$ nur Ableitungen der Ordnung $\leqq n \leqq m-1$ vorkommen, ist $\Psi(u) = \lim \Psi(u_h) = 1$, also sicher $u \not\equiv 0$, und da die u_h die wesentlichen Randbedingungen (6) erfüllen und in diesen nur Ableitungen der Ordnung $\leqq m-1$ vorkommen, erfüllt auch u diese Randbedingungen und ist somit eine zulässige Funktion.

4.8. Abschluß des Beweises der Behauptung (a): Die Funktion $u(x)$ von 4.7 ist sogar $2m$-mal stetig differenzierbar und erfüllt die Differentialgleichung (1) mit $\lambda = \lambda_1$ sowie die Gleichung (49).

Beweis. Es sei $w(x)$ eine beliebige $(m+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, welche die Randbedingungen

$$w^{(\nu)}(a) = w^{(\nu)}(b) = 0 \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, \ldots, m \tag{62}$$

erfüllt. Für diese Funktion ist

$$F_0(u_h, w) = G_0(u_h, w) = 0,$$

da in diesen bilinearen Ausdrücken jedes Glied eine Ableitung $w^{(\nu)}(a)$ oder $w^{(\nu)}(b)$ mit $\nu \leqq m-1$ enthält. Daher ist nach (44)

$$\begin{aligned} &\Phi(u_h, w) - \lambda_1 \Psi(u_h, w) \\ &\quad = \int_a^b \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu f_\nu u_h^{(\nu)} w^{(\nu)} dx - \lambda_1 \int_a^b \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu u_h^{(\nu)} w^{(\nu)} dx. \end{aligned} \tag{63}$$

Die rechte Seite wird durch partielle Integration so umgeformt, daß jedes Glied den Faktor $w^{(m+1)}$ enthält. Zu dem Zweck wird

$$\begin{cases} f_\nu u_h^{(\nu)} = F_\nu^{[0]}(u_h), & g_\nu u_h^{(\nu)} = G_\nu^{[0]}(u_h), \\ \int_a^x F_\nu^{[x-1]}(u_h)\, dx = F_\nu^{[x]}(u_h), & \int_a^x G_\nu^{[x-1]}(u_h)\, dx = G_\nu^{[x]}(u_h) \end{cases} \tag{64}$$

gesetzt. Dann ist wegen (62)

$$\begin{aligned} \int f_\nu u_h^{(\nu)} w^{(\nu)} dx &= -\int F_\nu^{[1]}(u_h) w^{(\nu+1)} dx \\ &= (-1)^2 \int F_\nu^{[2]}(u_h) w^{(\nu+2)} dx \\ &= (-1)^r \int F^{[r]}(u_h) w^{(\nu+r)} dx \quad \text{für} \quad \nu + r \leqq m+1 \end{aligned}$$

und

$$\int g_\nu u_h^{(\nu)} w^{(\nu)} dx = (-1)^r \int G_\nu^{[r]}(u_h) w^{(\nu+r)}\, dx.$$

Für $r = m - \nu + 1$ erhält man hieraus

$$\begin{aligned} \int f_\nu u_h^{(\nu)} w^{(\nu)} dx &= (-1)^{m-\nu+1} \int F_\nu^{[m-\nu+1]}(u_h) w^{(m+1)} dx, \\ \int g_\nu u_h^{(\nu)} w^{(\nu)} dx &= (-1)^{m-\nu+1} \int G_\nu^{[m-\nu+1]}(u_h) w^{(m+1)} dx. \end{aligned}$$

Dies wird in die rechte Seite von (63) eingetragen. Da die linke Seite nach 4. 6 gegen 0 strebt, ist

$$(65)\quad \int \left\{ \sum_{\nu=0}^{m} F_\nu^{[m-\nu+1]}(u_h) - \lambda_1 \sum_{\nu=0}^{n} G_\nu^{[m-\nu+1]}(u_h) \right\} w^{(m+1)} dx \to 0 \text{ für } h \to \infty.$$

In der ersten Summe wird das Glied mit $\nu = m$ noch umgeformt in

$$(66)\quad F_m^{[1]}(u_h) = \int_a^x f_m u_h^{(m)} dx = [f_m u_h^{(m-1)}]_a^x - \int_a^x f_m' u_h^{(m-1)} dx.$$

Dann treten in allen Gliedern von (65) nur Ableitungen $u_h^{(\nu)}$ mit $\nu \leqq m-1$ auf, und man kann nach 4. 7 für eine wieder mit u_h bezeichnete Teilfolge den Grenzübergang gliedweise und unter dem Integralzeichen ausführen. Man erhält dann für $h \to \infty$

$$\int \left\{ \sum_{\nu=0}^{m} F_\nu^{[m-\nu+1]}(u) - \lambda_1 \sum_{\nu=0}^{n} G_\nu^{[m-\nu+1]}(u) \right\} w^{(m+1)} dx = 0,$$

und zwar für jede Funktion $w(x)$ mit den am Anfang des Beweises genannten Eigenschaften. Nach einem Satz von ZERMELO[31]) ist daher

$$(67)\quad \sum_{\nu=0}^{m} F_\nu^{[m-\nu+1]}(u) - \lambda_1 \sum_{\nu=0}^{n} G_\nu^{[m-\nu+1]}(u) = P_m(x),$$

wo P_m ein Polynom des Grades $\leqq m$ ist. Die rechte Seite und somit auch die linke Seite ist also sicher m-mal stetig differenzierbar.

Jedes der Glieder mit $\nu \leqq m-1$ in (67) ist nach (64) für sich differenzierbar, also auch das höchste Glied der ersten Summe ($\nu = m$). Dieses ist durch die rechte Seite von (66) mit u statt u_h gegeben. Darin ist das letzte Integral differenzierbar. Daher ist auch das erste Glied $[f_m u_h^{(m-1)}]_a^x$ differenzierbar. Da f_m differenzierbar ist, ist also $u^{(m-1)}$ nochmals differenzierbar, und es gilt somit die vollständige Gleichung (66) mit u statt u_h.

Durch einmalige Differentiation von (67) folgt nun bei Berücksichtigung von (64)

$$f_m u^{(m)} + \sum_{\nu=0}^{m-1} F_\nu^{[m-\nu]}(u) - \lambda_1 \sum_{\nu=0}^{n} G_\nu^{[m-\nu]}(u) = P_{m-1}.$$

Da $n < m$ ist, sind hierin nach (64) alle Glieder der ersten und zweiten Summe einzeln differenzierbar, also auch $u^{(m)}$, da f_m differenzierbar ist. Die Ausführung der Differentiation ergibt

$$(f_m u^{(m)})' + f_{m-1} u^{(m-1)} + \sum_{\nu=0}^{m-2} F_\nu^{[m-\nu-1]}(u) - \lambda_1 \sum_{\nu=0}^{n} G_\nu^{[m-\nu-1]}(u) = P_{m-2},$$

wobei jedoch von der letzten Summe das Glied mit $\nu = n$ in der Gestalt $g_{m-1} u^{(m-1)}$ abzutrennen ist, falls $n = m-1$ ist. Jetzt sind links sicher

[31]) Math. Annalen 58 (1904), S. 558–564.

wieder alle Glieder bis auf das erste differenzierbar, also auch das erste, also ist $u^{(m)}$ zweimal differenzierbar. Führt man die Differentiationen bei Beachtung von (64) aus und fährt man in dieser Weise fort, so ergibt sich schließlich, daß u $2m$-mal stetig differenzierbar ist und die Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{m} (f_\nu u^{(\nu)})^{(\nu)} = \lambda_1 \sum_{\nu=0}^{n} (g_\nu u^{(\nu)})^{(\nu)},$$

d. h. die Gleichung (1) mit $\lambda = \lambda_1$ erfüllt.

Es bleibt noch zu beweisen, daß u die Gleichung (49) erfüllt. Da u, wie bewiesen, eine zulässige Funktion ist, die sogar $2m$-mal stetig differenzierbar ist, kann in 4. 6 $w = u$ gewählt werden. D. h. es ist

$$\Phi(u_h, u) - \lambda_1 \Psi(u_h, u) \to 0 \quad \text{für} \quad h \to \infty.$$

Nach 4. 7 kann hierin bei allen Gliedern, die nur Ableitungen $u_h^{(\nu)}$ mit $\nu \leqq m - 1$ enthalten, der Grenzübergang ausgeführt werden, indem $u_h = u$ gesetzt wird. Das einzige Glied, das eine höhere Ableitung enthält, ist, abgesehen vom Vorzeichen, nach (44)

$$\int f_m u_h^{(m)} u^{(m)} dx = [u_h^{(m-1)} f_m u^{(m)}]_a - \int u_h^{(m-1)} (f_m u^{(m)})' dx.$$

Jetzt kann auch hierin der Grenzübergang ausgeführt werden, indem man rechts $u_h = u$ setzt. Aus der rechten Seite erhält man aber wieder die linke Seite mit $u_h = u$. Aus der obigen Limesgleichung erhält man also in der Tat

$$\Phi(u) - \lambda_1 \Psi(u) = 0,$$

wie behauptet war.

4. 9. Beweis der Behauptung (b). Die Schlüsse der vorangehenden Nummern gelten auch, wenn alle $u_h = u$ übereinstimmen. Wenn für eine zulässige Funktion $u(x)$

$$\frac{\Phi(u)}{\Psi(u)} = \lambda_1 \text{ und } \Psi(u) \neq 0 \tag{68}$$

ist, wo λ_1 durch (48) bestimmt ist, so ist daher $u(x)$ sogar $2m$-mal stetig differenzierbar und eine eigentliche Lösung von

$$F(u) - \lambda_1 G(u) = 0. \tag{69}$$

Es sei nun $w(x)$ eine beliebige zulässige Funktion. Da $u(x)$ $2m$-mal stetig differenzierbar ist, kann die Formel (17) angewendet werden. Werden in $[T(u, v)]_a$ für u und w die wesentlichen Randbedingungen eingetragen, so ergibt sich (vgl. den letzten Absatz von 2. 5)

$$\int [F(u) - \lambda_1 G(u)] w \, dx = \int \Big\{ \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu f_\nu u^{(\nu)} w^{(\nu)} - \lambda_1 \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu u^{(\nu)} v^{(\nu)} \Big\} dx + \bar{F}(u, w) - \lambda_1 \bar{G}(u, w).$$

Nach (69) ist hierin die linke Seite = 0. Nach (68) ist, wenn die Ausdrücke (44) eingetragen werden,

$$0 = \int \Big\{ \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu f_\nu u^{(\nu)} w^{(\nu)} - \lambda_1 \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu u^{(\nu)} w^{(\nu)} \Big\} dx + F_0(u,w) - \lambda_1 G_0(u,w).$$

Aus den beiden Gleichungen folgt

$$\overline{F}(u,w) - \lambda_1 \overline{G}(u,w) - \{F_0(u,w) - \lambda_1 G_0(u,w)\} = 0$$

für beliebige zulässige Funktionen w, insbesondere also für beliebige freie Ableitungen von w. Nach 2. 5 erfüllt dann u auch die restlichen Randbedingungen (7), also alle Randbedingungen, und ist somit eine zu λ_1 gehörige Eigenfunktion.

Endlich ist λ_1 der kleinste Eigenwert. Denn ist λ_0 irgendein Eigenwert und $y(x)$ eine zu diesem gehörige Eigenfunktion, so ist nach (17), 2. 5 und (44), wenn alle Randbedingungen eingetragen werden,

$$0 = \int [F(y) - \lambda_0 G(y)]\, y\, dx = \Phi(y) - \lambda_0 \Psi(y).$$

Hierin ist

$$\int y\, G(y)\, dx = \Psi(y) \neq 0,$$

da sonst nach der obigen Gleichung auch

$$\int y\, F(y)\, dx = \Phi(y) = 0$$

wäre, und das nach S. 71, Fußnote 20 ausgeschlossen ist. Es ist also

$$\lambda_0 = \frac{\Phi(y)}{\Psi(y)},$$

und dieser Bruch ist $\geqq \lambda_1$ nach der Definition (48) von λ_1.

§ 5.

Zusätzliche Bemerkungen.

5. 1. Die höheren Eigenwerte. Die Festlegung des kleinsten Eigenwertes nach Satz 1 läßt sich in der bekannten Weise auch auf die höheren Eigenwerte ausdehnen.

Satz 2. *Sind $\lambda_1 \leqq \cdots \leqq \lambda_r$ die ersten r Eigenwerte und ist $\psi_1(x), \ldots, \psi_r(x)$ ein zu diesem gehöriges Orthogonalsystem von Eigenfunktionen, d. h. ist*

$$\Psi(\psi_p, \psi_q) = 0 \qquad (p \neq q;\ p, q \leqq r),$$

so gibt es stets einen nächstgrößeren Eigenwert λ_{r+1}, und es ist

$$\lambda_{r+1} = \operatorname*{Min}_u \frac{\Phi(u)}{\Psi(u)}, \tag{70}$$

wobei jetzt nur solche zulässigen Funktionen $u(x)$ zu betrachten sind, für die

$$\Psi(u) \neq 0 \quad \text{und} \quad \Psi(u, \psi_p) = 0 \qquad (p = 1, \ldots, r)$$

ist.

Es gibt also unendlich viele Eigenwerte, und man erhält durch dieses Verfahren jeden Eigenwert in seiner Vielfachheit.

Für den Beweis dieses Satzes ist nur folgende zusätzliche Überlegung nötig: Sind $\psi_1, \ldots, \psi_r$ zulässige Funktionen, für die

$$\Psi(\psi_p) \neq 0^{32}), \quad \Psi(\psi_p, \psi_q) = 0 \qquad (p \neq q;\ p, q \leqq r) \tag{71}$$

gilt, so gibt es zulässige Funktionen $u(x)$ mit

$$\Psi(u) \neq 0, \quad \Psi(u, \psi_p) = 0 \qquad (p = 1, \ldots, r). \tag{72}$$

Man wähle nämlich im Innern von $\langle a, b\rangle$ ein Intervall $\langle \alpha, \beta\rangle$, in dem $g_n(x) \neq 0$ ist. Das Intervall soll außerdem so klein gewählt werden, daß

$$\sum_{q=1}^{r} \frac{1}{\Psi(\psi_q)} \int_\alpha^\beta \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu \psi_q^{(\nu)\,2}\, dx < 1 \tag{73}$$

ist. Man wähle weiter eine m-mal stetig differenzierbare Funktion $u_0(x)$, die $\neq 0$ in $\alpha < x < \beta$ und sonst $= 0$ ist; dann ist offenbar $F_0(u_0, \psi_p) = 0$, also

$$\Psi(u_0, \psi_p) = \int_\alpha^\beta \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu u_0^{(\nu)} \psi_p^{(\nu)}\, dx \qquad (p = 1, \ldots, r). \tag{74}$$

Die Funktion u_0 läßt sich außerdem so wählen, daß $u_0^{(n)} \neq 0$, also

$$\Psi(u_0) = \int_\alpha^\beta \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu u_0^{(\nu)\,2}\, dx > 0 \tag{75}$$

ist. Für beliebige Zahlen ϱ_q ist auch

$$u(x) = u_0 + \sum_{q=1}^{r} \varrho_q \psi_q$$

eine zulässige Funktion, und wegen (71) ist

$$\Psi(u, \psi_p) = \Psi(u_0, \psi_p) + \varrho_p \Psi(\psi_p) \qquad (p = 1, \ldots, r) \tag{76}$$

und

$$\Psi(u) = \Psi(u_0) + 2 \sum_{q=1}^{r} \varrho_q \Psi(u_0, \psi_q) + \sum_{q=1}^{r} \varrho_q^2 \Psi(\psi_q).$$

---

[32]) Für Eigenfunktionen ψ_p ist diese Ungleichung von selbst erfüllt.

Nach (76) können die ϱ_p so gewählt werden, daß die letzten r der Gleichungen (72) erfüllt sind. Dann ist

$$\Psi(u) = \Psi(u_0) - \sum_{q=1}^{r} \varrho_q^2 \Psi(\psi_q)$$
$$= \Psi(u_0) - \sum_{q=1}^{r} \frac{\Psi^2(u_0, \psi_q)}{\Psi(\psi_q)}.$$

Hierin ist nach (74), der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung[33]) und (75)

$$\Psi^2(u_0, \psi_q) = \left(\int_\alpha^\beta \sum_{\nu=0}^{n} \sqrt{(-1)^\nu g_\nu}\, u_0^{(\nu)} \cdot \sqrt{(-1)^\nu g_\nu}\, \psi_p^{(\nu)}\, dx\right)^2$$
$$\leqq \int_\alpha^\beta \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu u_0^{(\nu)2}\, dx \cdot \int_\alpha^\beta \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu \psi_q^{(\nu)2}\, dx$$
$$= \Psi(u_0) \int_\alpha^\beta \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu \psi_q^{(\nu)2}\, dx.$$

Daher ist

$$\Psi(u) \geqq \Psi(u_0)\left(1 - \sum_{q=1}^{r} \frac{1}{\Psi(\psi_q)} \int_\alpha^\beta \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu \psi_q^{(\nu)2}\, dx\right) > 0,$$

wegen (73) und (75).

Mit Benutzung dieser Hilfsbetrachtung ergibt sich der Satz 2 durch Schluß von r auf $r+1$. Ist der Satz schon für $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ bewiesen, so gibt es eine zulässige Funktion $u(x)$, welche die Relationen (72) erfüllt. Man macht nun den Ansatz (70) und folgt dem Beweis zu Satz 1. Es ergibt sich dann, daß λ_{r+1} der erste Eigenwert $\geqq \lambda_r$ ist und daß man eine zu λ_{r+1} gehörige Eigenfunktion erhält, die zu $\psi_1, \ldots, \psi_r$ orthogonal ist.

5. 2. Besselsche Ungleichung und Parsevalsche Formel. Es sei jetzt $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem von Eigenfunktionen der Eigenwertaufgabe (1), (2), also

$$\Psi(\psi_p, \psi_q) = e_{p,q}; \tag{77}$$

$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots$ seien die zugehörigen Eigenwerte. In K III, S. 269 waren als Fourier-Koeffizienten einer stetigen Funktion $\varphi(x)$ in bezug auf diese Eigenwertaufgabe die Zahlen

$$a_p = \int \varphi(x) G(\psi_p)\, dx \tag{78}$$

bezeichnet. Für zulässige Funktionen $\varphi(x)$ in dem dortigen Sinne, d. h. für Funktionen $\varphi(x)$, die $2m$-mal stetig differenzierbar sind und alle $2m$ Randbedingungen erfüllen, waren dann BESSELsche Ungleichung und PARSEVALsche Formel abgeleitet.

---

[33]) Für die hier benutzte Form der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung siehe K III, S. 268, Fußnote 16.

Wird für zulässige Funktionen $\varphi(x)$ in dem jetzigen Sinne der Begriff der *Fourier-Koeffizienten* dahin abgeändert, daß diese

$$a_p = \Psi(\varphi, \psi_p) \tag{79}$$

sind[34]), so besteht der

Satz 3. *Für die Fourier-Koeffizienten einer zulässigen Funktion $\varphi(x)$ gilt*

$$\sum_p \lambda_p a_p^2 \leqq \Phi(\varphi) \quad (\text{Besselsche Ungleichung}), \tag{80}$$

$$\sum_p a_p^2 = \Psi(\varphi) \quad (\text{Parsevalsche Formel}). \tag{81}$$

Ist auch $\psi(x)$ eine zulässige Funktion und sind die b_p ihre Fourier-Koeffizienten, so ist

$$\sum_p a_p b_p = \Psi(\varphi, \psi). \tag{82}$$

Beweis. Aus (17) erhält man für $\lambda = \lambda_p$, $u = \psi_p$, $v = \varphi$, da dann der Integrand der linken Seite Null ist,

$$\int \left\{ \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu f_\nu \psi_p^{(\nu)} \varphi^{(\nu)} - \lambda_p \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu \psi_p^{(\nu)} \varphi^{(\nu)} \right\} dx + [R(\psi_p, \varphi)]_a^b - \lambda_p [S(\psi_p, \varphi)]_a^b = 0.$$

Trägt man nun in die Restteile $[R(\psi_p, \varphi)]_a^b$, $[S(\psi_p, \varphi)]_a^b$ alle $2m$ Randbedingungen für die ψ_p und die wesentlichen Randbedingungen für φ ein, so gehen diese Ausdrücke nach 2. 5 in $F_0(\psi_p, \varphi)$, $G_0(\psi_p, \varphi)$ über. Bei Berücksichtigung von (44) wird daher aus der obigen Gleichung

$$\Phi(\varphi, \psi_p) = \lambda_p \Psi(\varphi, \psi_p).$$

Hiermit und mit (77), (79) erhält man für beliebige h nach (46)

$$\begin{aligned} \Phi\Big(\varphi - \sum_{p=1}^{h} a_p \psi_p\Big) &= \Phi(\varphi) - 2\sum_p a_p \Phi(\varphi, \psi_p) + \sum_{p,q} a_p a_q \Phi(\psi_p, \psi_q) \\ &= \Phi(\varphi) - 2\sum_p \lambda_p a_p \Psi(\varphi, \psi_p) + \sum_{p,q} a_p a_q \lambda_q \Psi(\psi_p, \psi_q) \\ &= \Phi(\varphi) - 2\sum_p \lambda_p a_p^2 + \sum_p \lambda_p a_p^2 \\ &= \Phi(\varphi) - \sum_p \lambda_p a_p^2. \end{aligned} \tag{83}$$

Da die Eigenwertaufgabe definit ist, ist die linke Seite dieser Gleichung $\geqq 0$. Damit ist (80) bereits bewiesen.

Für

$$\chi_h(x) = \varphi - \sum_{p=1}^{h} a_p \psi_p$$

und $1 \leqq q \leqq h$ ist nach (79) und (77)

$$\Psi(\chi_h, \psi_q) = \Psi(\varphi, \psi_q) - \sum_p a_p \Psi(\psi_p, \psi_q) = a_q - a_q = 0,$$

[34]) Für zulässige Funktionen φ in dem früheren Sinne stimmen die rechten Seiten von (78) und (79) nach 2. 5 überein.

d. h. χ_h orthogonal zu $\psi_1, \ldots, \psi_h$. Ist $\Psi(\chi_h) > 0$, so ist daher nach Satz 2

$$\lambda_{h+1} \leqq \frac{\Phi(\chi_h)}{\Psi(\chi_h)},$$

also, wenn h so groß gewählt wird, daß $\lambda_{h+1} > 0$ ist,

$$\Psi(\chi_h) \leqq \frac{\Phi(\chi_h)}{\lambda_{h+1}},$$

und das gilt auch, wenn $\Psi(\chi_h) = 0$ ist. Nach (83) ist $\Phi(\chi_h) \leqq \Phi(\varphi)$. Für $h \to \infty$ ist daher $\Psi(\chi_h) \to 0$. Es ist aber

$$\begin{aligned}\Psi(\chi_h) &= \Psi(\varphi) - 2\sum_p a_p \Psi(\varphi, \psi_p) + \sum_{p,q} a_p a_q \Psi(\psi_p, \psi_q)\\ &= \Psi(\varphi) - 2\sum a_p^2 + \sum a_p^2\\ &= \Psi(\varphi) - \sum_{p=1}^{h} a_p^2,\end{aligned}$$

also

$$\sum_{p=1}^{h} a_p^2 \to \Psi(\varphi),$$

womit (81) bewiesen ist.

Aus (81) mit $\varphi + \psi$ statt φ ergibt sich

$$\sum (a_p + b_p)^2 = \Psi(\varphi + \varphi),$$

also

$$\sum a_p^2 + \sum b_p^2 + 2\sum a_p b_p = \Psi(\varphi) + \Psi(\psi) + 2\Psi(\varphi, \psi).$$

Hieraus folgt, wenn man (81) und dieselbe Gleichung für ψ statt φ subtrahiert, die Gleichung (82).

5. 3. Festlegung der Eigenwerte durch das Maximum-Minimum-Prinzip.

Satz 4. *Für integrierbare*[35]) *Funktionen* $w_\nu(x)$ *sei*

$$m(w_1, \ldots, w_{p-1}) = \operatorname*{fin}_y \frac{\Phi(y)}{\Psi(y)},$$

wo die y *beliebige zulässige Funktionen sein dürfen, für die* $\Psi(y) > 0$ *und*

$$\int w_\nu y \, dx = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, p-1) \tag{84}$$

ist. Dann ist $m \leqq \lambda_p$ *und*

$$\lambda_p = \operatorname*{Max}_w m(w_1, \ldots, w_{p-1}).$$

Beweis. Für den Beweis des ersten Teiles genügt es, eine zulässige Funktion y anzugeben, welche die oben angegebenen Eigenschaften besitzt und für die $\Phi(y) \leqq \lambda_p \Psi(y)$ ist. Zu dem Zweck wird

$$y = \sum_{q=1}^{p} a_q \psi_q$$

[35]) Der Satz ist auch richtig, wenn man „integrierbar" durch „stetig" ersetzt.

gesetzt. Dann ist

$$\Psi(y) = \sum_{q,r} a_q a_r \Psi(\psi_q, \psi_r) = \sum_q a_q^2 > 0,$$

falls nicht alle a_q Null sind. Die Gleichungen (84) sind erfüllt, wenn

$$\sum_{q=1}^{p} a_q \int w_\nu \psi_q \, dx = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, p-1)$$

ist. Das sind $p-1$ Gleichungen für p unbekannte a_q. Es gibt also eine nicht aus lauter Nullen bestehende Lösung. Für diese ist dann

$$\Phi(y) = \sum_{q,r} a_q a_r \Phi(\psi_q, \psi_r) = \sum_{q,r} a_q a_r \lambda_r \Psi(\psi_q, \psi_r)$$
$$= \sum_q \lambda_q a_q^2 \leqq \lambda_p \sum_q a_q^2 = \lambda_p \Psi(y).$$

Da für $w_\nu = \psi_\nu$ nach Satz 2 $m = \lambda_p$ ist, ist der Satz vollständig bewiesen.

5. 4. Das Verfahren von Ritz und Kryloffs Satz[36]).

Satz 5. *Sind $u_1(x), \ldots, u_h(x)$ ein System zulässiger Funktionen, für das die Orthogonalitätsrelationen*

$$\Psi(u_p, u_q) = 0 \qquad (p \neq q) \tag{85}$$

und außerdem die Ungleichungen

$$\Psi(u_p) > 0 \tag{86}$$

bestehen, so sind die Nullstellen der Determinante

$$D(\lambda) = \mathrm{Det}\,|\Phi(u_p, u_q) - \lambda e_{p,q} \Psi(u_p, u_q)| \qquad (p, q = 1, \ldots, h) \tag{87}$$

sämtlich reell. Sind sie, der Größe nach geordnet,

$$\bar{\lambda}_1 \leqq \cdots \leqq \bar{\lambda}_h, \tag{88}$$

so ist

$$\bar{\lambda}_p \geqq \lambda_p \qquad (p = 1, \ldots, h). \tag{89}$$

Beweis. Auf die Determinante (87) kommt man, wenn man in dem Satz 1 statt der Menge aller zulässiger Funktionen $y(x)$ nur die Funktionen

$$\bar{y}(x) = \sum_{\nu=1}^{h} a_\nu u_\nu \tag{90}$$

betrachtet. Für diese Funktionen ist nach (45), (46) und (85)

$$\begin{cases} \Phi(\bar{y}) = \sum\limits_{p,q=1}^{h} a_p a_q \Phi(u_p, u_q), \\ \Psi(\bar{y}) = \sum\limits_{p,q=1}^{h} a_p a_q \Psi(u_p, u_q) = \sum\limits_{p=1}^{h} a_p^2 \Psi(u_p). \end{cases} \tag{91}$$

---

[36]) Vgl. hierzu die in K I, § 5 behandelte, von GALERKIN herrührende Variante des Verfahrens von RITZ, außerdem zur Literatur: E. KAMKE, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, S. 220. Leipzig 1942.

Aus der Variationsaufgabe (10) oder, was auf dasselbe hinausläuft, der Aufgabe $\Phi(y) = \text{Min}$ unter der Nebenbedingung $\Psi(y) = 1$, wird dann die Aufgabe: Die a_p sollen so bestimmt werden, daß

$$\Phi(\bar{y}) = \text{Min} \tag{92}$$

bei der Nebenbedingung $\Psi(\bar{y}) = 1$ wird. Da die Eigenwertaufgabe definit ist, ist $\Phi(\bar{y}) \geqq 0$ und somit die obige Minimumsaufgabe lösbar. Die Regeln der Differentialrechnung ergeben für die a_p und einen ebenfalls noch zu bestimmenden Parameter λ die Gleichungen

$$\sum_{q=1}^{h} a_q \Phi(u_p, u_q) = \lambda a_p \Psi(u_p) \qquad (p = 1, \ldots, h). \tag{93}$$

Dieses homogene Gleichungssystem hat genau dann eine eigentliche Lösung, wenn $D(\lambda) = 0$ ist.

Wegen der Symmetrie von (87) in den Indizes p, q hat $D(\lambda)$ nur reelle Nullstellen.

Für jede Nullstelle λ hat (93) eine eigentliche Lösung, und diese kann so normiert werden, daß $\Psi(\bar{y}) = 1$ ist. Multipliziert man dann (93) mit a_p und addiert man die Gleichungen, so erhält man wegen (91)

$$\Phi(\bar{y}) = \lambda \Psi(\bar{y}) = \lambda.$$

Da $\Phi(\bar{y}) \geqq 0$ ist, sind alle Nullstellen $\lambda \geqq 0$, und die kleinste Nullstelle $\bar{\lambda}_1$ ist der gesuchte Minimalwert von $\Phi(\bar{y})$. Da hier gegenüber Satz 1 der Bereich der zulässigen Funktionen weiter eingeschränkt ist, ist $\bar{\lambda}_1 \geqq \lambda_1$.

Für den allgemeinen Beweis von (89) wird der Satz 4 benutzt und außerdem der entsprechende Satz über die Eigenwerte $\varkappa_1 \leqq \cdots \leqq \varkappa_h$ der quadratischen Form

$$K(x, x) = \sum_{p, q=1}^{h} k_{p, q} x_p x_q,$$

d. h. der Nullstellen der Determinante

$$\Delta(\lambda) = \text{Det}\,|k_{p, q} - \lambda e_{p, q}|.$$

Es ist[37])

$$\varkappa_r \geqq \bar{m}_r(\alpha), \tag{94}$$

wo

$$\bar{m}_r(\alpha) = \underset{x_p}{\text{fin}}\, K(x, x)$$

ist und hierin zur Konkurrenz alle solche Zahlen x_p zugelassen sind, welche die Norm

$$\sum_{p=1}^{h} x_p^2 = 1 \tag{95}$$

[37]) R. Courant-D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I, 2. Aufl., S. 27, 29. Berlin 1931.

haben und $r-1$ beliebig gegebene Gleichungen

$$\sum_{q=1}^{h} \alpha_{\nu,q} x_q = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, r-1) \tag{96}$$

erfüllen.

Für

$$k_{p,q} = \frac{\Phi(u_p, u_q)}{\sqrt{\Psi(u_p)\,\Psi(u_q)}}, \qquad x_p = a_p \sqrt{(\Psi u_p)}$$

wird

$$K(x, x) = \sum_{p,q=1}^{h} \Phi(u_p, u_q)\, a_p a_q = \Phi(\bar{y})$$

und $\Delta(\lambda)$, abgesehen von einem Faktor $\neq 0$, gleich $D(\lambda)$, d. h. $\varkappa_r = \bar{\lambda}_r$. Weiter wird aus (95)

$$1 = \sum_{p=1}^{h} a_p^2 \Psi(u_p) = \Psi(\bar{y}). \tag{97}$$

Wird schließlich für die in Satz 4 vorkommenden Funktionen w_r

$$\alpha_{\nu,q} = \frac{1}{\sqrt{\Psi(u_q)}} \int w_\nu u_q \, dx$$

gewählt, so wird aus (96)

$$0 = \sum_{q=1}^{h} a_q \int w_\nu u_q \, dx = \int w_\nu \bar{y} \, dx. \tag{98}$$

Aus (94) wird also

$$\bar{\lambda}_r \geqq \underline{\text{fin}}\, \Phi(\bar{y}),$$

wo $\bar{y}$ durch (90) gegeben ist und zur Konkurrenz solche a_p, d. h. solche $\bar{y}$ zugelassen sind, für die (97) und (98) erfüllt ist. Diese $\bar{y}$ bilden eine Teilmenge der in Satz 4 zugelassenen y. Daher ist nach (94) und Satz 4

$$\bar{\lambda}_r \geqq \overline{m}_r \geqq m(w_1, \ldots, w_{r-1}),$$

also auch

$$\bar{\lambda}_r \geqq \underset{w}{\text{Max}}\, m = \lambda_r.$$

(Eingegangen am 5. Januar 1942.)

Zur Stetigkeit der Wurzeln einer algebraischen Gleichung.

Herrn Konrad Knopp
zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

Hellmuth Kneser in Tübingen.

Der Satz von der Stetigkeit der Wurzeln einer algebraischen Gleichung besagt in seiner bescheidensten Gestalt das Folgende:

Ist c eine Nullstelle des Polynoms

$$f^*(x) = x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu^* x^\nu,$$

so hat das Polynom

$$f(x) = x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu x^\nu$$

beliebig nahe bei c eine Nullstelle, sobald sich die Beiwerte a_ν hinreichend wenig von den entsprechenden Beiwerten a_ν^* unterscheiden.

Den kürzesten Beweis hierfür findet man in van der Waerdens Einführung in die algebraische Geometrie (1939) auf S. 48. Im Sonderfalle $c = 0$ lautet er folgendermaßen. Ist $c = 0$ eine Nullstelle von $f^*(x)$, so ist $a_0^* = 0$. Sind nun $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Nullstellen von $f(x)$ und ist α_1 die — oder eine — vom kleinsten Betrage, so ist

$$|\alpha_1|^n \leqq |\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n| = |a_0|,$$

$$|\alpha_1| \leqq \sqrt[n]{|a_0|},$$

also so klein wie man will, wenn nur $|a_0| = |a_0 - a_0^*|$ hinreichend klein ist.

Außer durch seine Kürze zeichnet sich dieser Beweis dadurch aus, daß er mehr liefert als behauptet war: sein Ergebnis ist ganz unabhängig von den Werten $a_1, \ldots, a_{n-1}$; der auf diese bezügliche Teil der Voraussetzung ist also überflüssig. Das ist auch deshalb bemerkenswert, weil umgekehrt aus der Kleinheit von $|\alpha_1|$ die von $|a_0|$ erst dann folgt, wenn man z. B. für die Beträge von $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ eine obere Schranke kennt.

Zwar nicht ganz die schlagende Kürze, wohl aber die Mehrleistung des van der Waerdenschen Beweises läßt sich nun auch auf den vollen Stetigkeitssatz übertragen. Dieser lautet:

A. *Ist* $1 \leqq m \leqq n$ *und ist* c *eine* m*-fache Nullstelle des Polynoms*

$$f^*(x) = x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu^* x^\nu,$$

so hat das Polynom

$$f(x) = x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu x^\nu$$

beliebig nahe bei c *mindestens* m *Nullstellen, sobald sich die Beiwerte* a_ν *hinreichend wenig von den entsprechenden Beiwerten* a_ν^* *unterscheiden.*

Auch hier wird sich im Sonderfalle $c = 0$, d. h. $a_0^* = \cdots = a_{m-1}^* = 0$ zeigen, daß es nur auf die Beiwerte $a_0, \ldots, a_{m-1}$ ankommt. Bedenken wir, daß die Beiwerte a_ν bis aufs Vorzeichen gleich den symmetrischen Grundpolynomen in $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sind, so können wir den Satz als eine Aussage über die Beträge irgendwelcher komplexer Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und ihrer symmetrischen Grundpolynome aussprechen. Bezeichnen wir mit s_ν immer das symmetrische Grundpolynom ν-ten Grades in den dahinter angegebenen Argumenten, so lautet unser Satz:

B(m). *Ist* $1 \leqq m \leqq n$ *und sind* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *komplexe Zahlen, geordnet nach nicht abnehmenden Beträgen*:

$$|\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq \cdots \leqq |\alpha_n|, \tag{1}$$

so gibt es für den Betrag von α_m *eine obere Schranke* φ_m, *die nur abhängt von den Beträgen der* m *letzten symmetrischen Grundpolynome in* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, *und die mit diesen Beträgen gegen Null strebt*:

$$|\alpha_m| \leqq \varphi_m(t_1, \ldots, t_m), \quad t_\nu = |s_{n-\nu+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|, \tag{2}$$

$$\varphi_m \to 0, \quad \textit{wenn } t_1 \to 0, \ldots, t_m \to 0. \tag{3}$$

Sei $0 \leqq k < n$ und B(m) bewiesen für $m \leqq k$ — im Falle $k = 0$ ist damit nichts vorausgesetzt; wir wollen B($k+1$) beweisen. So wie man VAN DER WAERDENS Beweis auffassen kann als das Aufstellen einer durch α_1 allein bestimmten unteren Schranke für t_1, so wollen wir eine untere Schranke für t_{k+1} aufsuchen. Das würde sofort zum Ziele führen, wenn s_{n-k} allein aus dem Gliede $\alpha_{k+1} \ldots \alpha_n$ bestünde. Die störenden anderen Glieder nach oben abzuschätzen geht nicht ohne weiteres an, da sie Faktoren $\alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n$ enthalten können, über deren Größe wir nichts wissen. Wir kommen zum Ziele, indem wir aus allen Gliedern das Hauptglied $\alpha_{k+1} \ldots \alpha_n$ als Faktor herausziehen.

Ist $\alpha_{k+1} = 0$, so gilt (2) mit $m = k+1$ und mit jedem nicht negativen Wert von φ_{k+1}, also auch mit dem, den wir nachher einführen werden. Andernfalls sind wegen (1) auch $\alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n$ von Null verschieden, und es gilt

$$(4)\quad s_{n-k}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_{k+1} \ldots \alpha_n \left[1 + \sum_{\nu=1}^{r} s_\nu(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)\, s_\nu(\alpha_{k+1}^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1})\right],$$

worin

$$r = \operatorname{Min}(k, n-k)$$

gesetzt ist. In der Tat: jedes Glied in $s_{n-k}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ außer dem Hauptgliede $\alpha_{k+1} \ldots \alpha_n$ enthält eine Anzahl $\nu \geqq 1$ von Faktoren des Hauptgliedes nicht und statt dessen die gleiche Anzahl voneinander verschiedener Faktoren aus der Reihe $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Es muß daher $\nu \leqq k$ und $\nu \leqq n-k$, d. h. $\nu \leqq r$ sein, und jedes Glied der beschriebenen Art kommt in s_{n-k} mit dem Beiwert 1 vor. Gerade das ist aber in (4) ausgesagt. Nehmen wir zu (4) hinzu die aus (2) mit $m = \nu \leqq k$ folgende Ungleichung

$$|s_\nu(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)| \leqq s_\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$$

sowie die aus (1) sich ergebenden Ungleichungen

$$|\alpha_{k+1} \ldots \alpha_n| \geqq |\alpha_{k+1}|^{n-k},$$

$$|s_\nu(\alpha_{k+1}^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1})| \leqq \binom{n-k}{\nu} |\alpha_{k+1}|^{-\nu},$$

so erhalten wir

$$t_{k+1} = |s_{n-k}(\alpha_1, \ldots \alpha_n)|$$

$$\geqq |\alpha_{k+1}|^{n-k} \left[1 - \sum_{\nu=1}^{r} \binom{n-k}{\nu} s_\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)\, |\alpha_{k+1}|^{-\nu}\right],$$

$$(5)\quad \sum_{\nu=1}^{r} \binom{n-k}{\nu} s_\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)\, |\alpha_{k+1}|^{-\nu} + t_{k+1}\, |\alpha_{k+1}|^{-(n-k)} \geqq 1,$$

Die Beiwerte der Potenzen von $|\alpha_{k+1}|$ auf der linken Seite von (5) sind nicht negativ. Sind sie nicht alle gleich Null, so steht links in (5) eine Funktion $L(|\alpha_{k+1}|)$ von $|\alpha_{k+1}|$, die bei positiven Werten der Veränderlichen fallend alle positiven Werte durchläuft. Daher kann $|\alpha_{k+1}|$ nicht größer sein als die positive Wurzel ξ der Gleichung

$$(6)\quad L(\xi) = \sum_{\nu=1}^{r} \binom{n-k}{\nu} s_\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)\, \xi^{-\nu} + t_{k+1}\, \xi^{-(n-k)} = 1.$$

Wir setzen also φ_{k+1} gleich dieser Wurzel und haben damit die Behauptung (2) für $m = k+1$ bewiesen.

Sollten aber alle Beiwerte in $L(\xi)$ gleich Null sein, so kann (5) nicht bestehen. Dieser Fall kann also nur eintreten, wenn $\alpha_{k+1} = 0$ ist; in ihm setzen wir $\varphi_{k+1} = 0$, so daß auch hier (2) mit $m = k+1$ gilt.

Nun werden die Beiwerte in $L(\xi)$ beliebig klein, wenn $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ und t_{k+1} gegen Null streben, d. h. wenn $t_1, \ldots, t_{k+1}$ gegen Null streben. Ist also $\varepsilon > 0$ gegeben, so wählen wir $t_1, \ldots, t_{k+1}$ so klein, daß $L(\varepsilon) < 1$ ist. Da die Funktion L dauernd abnimmt, kann dann (6) nur für $\xi < \varepsilon$ gelten, d. h. es ist $\varphi_{k+1} < \varepsilon$. Dies gilt auch im Sonderfall des vorigen Absatzes, da dort $\varphi_{k+1} = 0$ gesetzt wurde. Damit ist auch die Behauptung (3) mit $m = k + 1$ bewiesen und so der Beweis des Satzes B vollendet.

Wir stellen noch den Zusammenhang mit dem üblichen Stetigkeitssatze A her. Sei ein Polynom

$$g(y) = y^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu y^\nu$$

gegeben und $\beta_1, \ldots, \beta_n$ seine Nullstellen. Setzen wir in ihm

$$y = c + x,$$

$$g(y) = x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{g^{(\nu)}(c)}{\nu!} x^\nu = f(x),$$

so sind die symmetrischen Grundpolynome in den Wurzeln $\alpha_\nu = \beta_\nu - c$ der Gleichung $f(x) = 0$ bis aufs Vorzeichen gleich den Werten $g^{(\nu)}(c)/\nu!$. Nach Satz B(m) sind mindestens m unter den Wurzeln betragsmäßig so klein wie wir wollen, wenn nur die m letzten Beiwerte in $f(x)$ betragsmäßig hinreichend klein sind, d. h. wenn die Ableitungswerte $g(c), g'(c), \ldots, g^{(m-1)}(c)$ hinreichend kleine Beträge haben. So ergibt sich der Satz:

C. *Ein Polynom*

$$g(y) = y^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu y^\nu$$

hat in beliebiger Nähe eines Wertes c mindestens m Nullstellen, wenn die Ableitungswerte $g(c), g'(c), \ldots, g^{(m-1)}(c)$ hinreichend kleine Beträge haben.

Da die Polynome

$$g^*(y) = y^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu^* y^\nu$$

mit m-facher Nullstelle bei c durch

$$g^*(c) = g^{*\prime}(c) = \cdots = g^{*(m-1)}(c) = 0$$

gekennzeichnet sind und die Ableitungswerte stetig von den Beiwerten des Polynoms $g(y)$ abhängen, ist der Stetigkeitssatz A im Satze C enthalten.

(Eingegangen am 6. Januar 1942.)

Über die restringierte Limitierung von Doppelfolgen nach den Verfahren von Cesàro, Hölder und Euler-Knopp.

Herrn Konrad Knopp
zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

Friedrich Lösch in Rostock.

Die vorliegende Note beschäftigt sich mit Transformationen von (reellen oder komplexen) Doppelfolgen, bei denen mit Hilfe zweier Dreiecksmatrizen

$$(A)\quad \begin{matrix} a_{00} & & & \\ a_{10} & a_{11} & & \\ \dots & \dots & & \\ a_{m0} & a_{m1} & \dots & a_{mm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \qquad (B)\quad \begin{matrix} b_{00} & & & \\ b_{10} & b_{11} & & \\ \dots & \dots & & \\ b_{m0} & b_{m1} & \dots & b_{mm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix},$$

welche den Toeplitzschen Bedingungen

$$\text{(I)}\quad a_{m\mu} \to 0, \qquad b_{m\mu} \to 0 \qquad \text{für festes } \mu \text{ und } m \to \infty,$$

$$\text{(II)}\quad \sum_{\mu=0}^{m} |a_{m\mu}| < K, \qquad \sum_{\mu=0}^{m} |b_{m\mu}| < K \qquad \text{für } m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\text{(III)}\quad \sum_{\mu=0}^{m} a_{m\mu} \to 1, \qquad \sum_{\mu=0}^{m} b_{m\mu} \to 1 \qquad \text{für } m \to \infty$$

genügen, einer Doppelfolge

$$s_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots)$$

eine neue Doppelfolge

$$S_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_{m\mu} b_{n\nu} s_{\mu\nu} \qquad (m, n = 0, 1, 2, \dots),$$

die „*$\{A, B\}$-Transformation*“ von $(s_{\mu\nu})$, zugeordnet wird. Die Klasse dieser Transformationen wird im folgenden kurz die Klasse der „*T-Transformationen*“ genannt.

Eine Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ heißt „*restringiert konvergent*“ gegen den Limes s, in Zeichen

$$[\lim]_{\mu, \nu \to \infty} s_{\mu\nu} = s,$$

wenn für jedes ϑ aus $0 < \vartheta < 1$ diejenigen $s_{\mu\nu}$, deren Indizes den Ungleichungen $\vartheta\nu < \mu < \frac{1}{\vartheta}\nu$ genügen, den einzigen Häufungswert s haben; sie heißt „*restringiert $\{A, B\}$-limitierbar*“ zum Wert S, in Zeichen

$$\{A, B\} - [\lim]_{\mu, \nu \to \infty} s_{\mu\nu} = S,$$

wenn für ihre $\{A, B\}$-Transformation (S_{mn}) die Limesrelation

$$[\lim_{m,n\to\infty}] \; S_{mn} = S$$

besteht[1]). Ferner soll eine Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ „*restringiert beschränkt*" genannt werden, wenn der größte Häufungswert der Beträge derjenigen $s_{\mu\nu}$, deren Indizes μ, ν den Ungleichungen $\vartheta\nu < \mu < \frac{1}{\vartheta}\nu$ genügen, für $\vartheta \downarrow 0$ unter einer endlichen Schranke bleibt; entsprechend soll $(s_{\mu\nu})$ „*restringiert $\{A, B\}$-beschränkt*" genannt werden, wenn ihre $\{A, B\}$-Transformation (S_{mn}) restringiert beschränkt ist. Eine restringiert konvergente bzw. restringiert $\{A, B\}$-limitierbare Doppelfolge ist auch restringiert beschränkt bzw. restringiert $\{A, B\}$-beschränkt.

Über die restringierte Limitierung von Doppelfolgen liegen bisher erst wenige Untersuchungen vor, sie beziehen sich sämtlich auf die Frage nach der Gültigkeit des Permanenzsatzes[2]). Dabei zeigt sich bereits, daß die Verhältnisse bei Zugrundelegung restringierter Konvergenz und Limitierbarkeit erheblich komplizierter sind als bei Zugrundelegung gewöhnlicher Konvergenz und Limitierbarkeit. Im Falle gewöhnlicher Konvergenz und Limitierbarkeit gilt der Permanenzsatz, so lange man nach dem Vorgang von Bromwich und Hardy nur beschränkte Doppelfolgen in Betracht zieht („condition of finitude"), für alle T-Transformationen in vollem Umfange, d. h. aus $\lim_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu} = s$ folgt stets $\{A, B\}$-$\lim_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu} = s$; läßt man beliebige Doppelfolgen zu, so gilt der Permanenzsatz wenigstens noch in der abgeschwächten Form, daß aus der gleichzeitigen Existenz der beiden Limites $\lim_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu}$ und $\{A,B\}$-$\lim_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu}$ ihre Gleichheit folgt. Demgegenüber lassen sich die bisher für restringierte Konvergenz und Limitierbarkeit erzielten Ergebnisse folgendermaßen zusammenfassen:

1) Schon bei beschränkten Doppelfolgen gilt der Permanenzsatz nicht für alle T-Transformationen, auch nicht in der obengenannten abgeschwächten Form. Es gibt jedoch gewisse T-Transformationen, sie seien weiterhin „*T'-Transformationen*" genannt, für die der Permanenzsatz in vollem Umfange gilt, für die also bei beschränkten Doppelfolgen $(s_{\mu\nu})$ aus $[\lim_{\mu,\nu\to\infty}] \; s_{\mu\nu} = s$ stets $\{A, B\}$-$[\lim_{\mu,\nu\to\infty}] \; s_{\mu\nu} = s$ folgt. Die Klasse dieser T'-Transformationen läßt sich

[1]) Die Begriffe der restringierten Konvergenz bzw. Limitierbarkeit wurden von C. N. Moore im Zusammenhang mit seinen Untersuchungen über die Summierung Fourierscher Doppelreihen von Funktionen, die längs einer Kurve unstetig sind, eingeführt. Vgl. C. N. Moore, On the summability of the double Fourier's series of discontinuous functions. Math. Annalen **74** (1913), S. 555–572, insbesondere S. 567.

[2]) Für eine zusammenfassende Darstellung vgl. C. N. Moore, Summable series and convergence factors, New York 1938 (American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. XXII).

vollständig charakterisieren und man erkennt ohne Mühe, daß ihr die geläufigsten speziellen T-Transformationen, nämlich die *Cesàroschen*, *Hölderschen* und *Euler-Knoppschen Transformationen* ganzer positiver Ordnung angehören[3]).

2) Läßt man beliebige, nicht notwendig beschränkte Doppelfolgen zu, so zeigt sich, daß nun auch die Klasse der T'-Transformationen noch zu weit ist, als daß für sie hinsichtlich restringierter Konvergenz und Limitierbarkeit der Permanenzsatz, auch nur in der genannten abgeschwächten Form, gelten würde. Die dadurch nahegelegte Frage nach den T-Transformationen, für die der Permanenzsatz in der einen oder anderen Form noch gilt, ist bisher nicht vollständig beantwortet worden. Durch den folgenden, für die Betrachtungen dieser Note grundlegenden Satz kennt man jedoch eine Klasse von T-Transformationen, die „*T''-Transformationen*", für welche der Permanenzsatz wenigstens in der abgeschwächten Form gilt[4]):

Hauptsatz: *Eine T-Transformation werde als T''-Transformation bezeichnet, wenn es bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ möglich ist, die Elemente der Matrizen (A) und (B) für jedes feste positive η, das nur kleiner als eine von ε abhängige Zahl $\eta_0(\varepsilon)$ ist, durch Gleichungssysteme*

$$a_{m\mu} = \sum_{\eta m < \varrho \leqq m} \alpha_\varrho^{(m,\eta)} a_{\varrho\mu}, \qquad b_{m\mu} = \sum_{\eta m < \varrho \leqq m} \beta_\varrho^{(m,\eta)} b_{\varrho\mu} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, [\eta m])$$

zu verknüpfen, deren Koeffizienten $\alpha_\varrho^{(m,\eta)}$, $\beta_\varrho^{(m,\eta)}$ den Ungleichungen

$$\text{(IV)} \qquad \sum_{\eta m < \varrho \leqq m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| < \varepsilon, \qquad \sum_{\eta m < \varrho \leqq m} |\beta_\varrho^{(m,\eta)}| < \varepsilon$$

genügen, sobald m größer als eine von η abhängige Zahl $M(\eta)$ ist.

Definieren die beiden Matrizen (A), (B) eine T''-Transformation, so ist eine restringiert konvergente Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ dann und nur dann auch restringiert $\{A, B\}$-limitierbar, wenn sie restringiert $\{A, B\}$-beschränkt ist. Ist die Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ zugleich restringiert konvergent und restringiert $\{A, B\}$-limitierbar, so gilt

$$\{A, B\}\text{-}\lim_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu} = \lim_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu}.$$

Die Entscheidung, ob eine vorgelegte T-Transformation zur Klasse der T''-Transformationen gehört, so daß sie gewiß den Permanenzsatz in der abgeschwächten Form des vorstehenden Satzes zuläßt, ist in der Regel ziemlich mühsam und erfordert jeweils ein näheres Eingehen auf die spezielle Struktur der betreffenden Matrizen. Es ist das erste Ziel der vorliegenden Untersuchungen, den Nachweis dafür zu erbringen, daß die geläufigsten T-Trans-

---

[3]) F. Lösch, Über restringierte Limitierung von Doppelfolgen. Math. Annalen **110** (1934), S. 33–53, II.

[4]) F. Lösch, a. a. O.[3]), IV. Man erkennt mühelos, daß die dort gegebene Definition der T''-Transformation mit der oben gewählten, etwas einfacheren Definition äquivalent ist.

formationen auch T''-Transformationen sind. Für die *Cesàroschen Transformationen* ganzer positiver Ordnung wurde dies schon früher bewiesen[5]); der Beweis ist in § 1 in einer für das Weitere geeigneten Form wiedergegeben. Anschließend werden in § 2 die *Hölderschen Transformationen* und in § 3 die *Euler-Knoppschen Transformationen* ganzer positiver Ordnung behandelt.

Die weiteren Betrachtungen beziehen sich auf die Frage nach der *Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Verfahren* bei restringierter Limitierung von Doppelfolgen. Für einfache Folgen besagt der bekannte *Knopp-Schneesche Satz*, daß die C- und H-Verfahren gleicher Ordnung jeweils äquivalent sind. Für die gewöhnliche Limitierung von Doppelfolgen gilt dies nicht mehr in vollem Umfange. Es folgt jedoch aus der (C, r, s)-Limitierbarkeit (r, s ganz, $\geqq 0$) einer Doppelfolge ihre (H, r, s)-Limitierbarkeit, falls sie schließlich (H, r, s)-beschränkt ist [d. h. falls ihre (H, r, s)-Transformation nach Weglassen einer geeigneten endlichen Anzahl von Anfangszeilen und -spalten beschränkt ist], ebenso umgekehrt; ist die Doppelfolge gleichzeitig (C, r, s)- und (H, r, s)-limitierbar, so stimmen beide Limites überein[6]). In § 4 soll gezeigt werden, daß der entsprechende Satz auch noch für die restringierte C- und H-Limitierung der Doppelfolgen gilt.

§ 1.

Die Cesàroschen Verfahren.

In der üblichen Weise werde als „(C, r, s)-*Transformation*" für ganze $r, s \geqq 0$ die Transformation bezeichnet, die durch die Matrizen (C_r) und (C_s) festgelegt ist. Dabei verstehen wir unter (C_p) das Schema der C_p-Transformation einfacher Folgen:

$$(C_p): \quad \begin{matrix} \frac{1}{\binom{p}{p}} & \left\{\binom{p-1}{p-1}\right\} \\ \frac{1}{\binom{1+p}{p}} & \left\{\binom{p}{p-1}, \quad \binom{p-1}{p-1}\right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \frac{1}{\binom{m+p}{p}} & \left\{\binom{m+p-1}{p-1}, \binom{m+p-2}{p-1}, \ldots, \binom{p-1}{p-1}\right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{matrix} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots).$$

[5]) F. Lösch, a. a. O.[3]), V. Für den speziellen Fall des Verfahrens der arithmetischen Mittel hat den Permanenzsatz schon früher S. Bochner, Limitierung mehrfacher Folgen nach dem Verfahren der arithmetischen Mittel. Math. Zeitschr. **35** (1932), S. 122—126 direkt bewiesen.

[6]) C. R. Adams, On summability of double series. Trans. Amer. math. Soc. **34** (1932), S. 215—230 und R. P. Agnew, Amer. J. Math. **54** (1932), S. 648—656.

Wir wollen zeigen, daß für die so definierten (C, r, s)-Transformationen der Permanenzsatz für restringierte Limitierung in der folgenden Form gilt:

Permanenzsatz der C-Verfahren. *Eine restringiert konvergente Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ ist dann und nur dann auch restringiert (C, r, s)-limitierbar (r, s ganz, $\geqq 0$), wenn sie restringiert (C, r, s)-beschränkt ist. Ist die Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ zugleich restringiert konvergent und restringiert (C, r, s)-limitierbar, so gilt*

$$(C, r, s)\text{-}\lim_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu} = \lim_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu}.$$

Beweis. Es ist bekannt, daß die Matrizen (C_p) den Toeplitzschen Bedingungen genügen, so daß die (C, r, s)-Transformationen gewiß zur Klasse der T-Transformationen gehören. Nach dem Hauptsatz genügt es also, zu zeigen, daß es sich genauer um T''-Transformationen handelt, d. h. daß sich die Elemente einer beliebigen Matrix (C_p), $(p = 0, 1, 2, \ldots)$, für kleine positive η und große m in passender Weise durch Gleichungssysteme

$$(1)\qquad \frac{\binom{m+p-1-\mu}{p-1}}{\binom{m+p}{p}} = \sum_{\eta m < \varrho \leqq m} \alpha_\varrho^{(m,\eta)} \frac{\binom{\varrho+p-1-\mu}{p-1}}{\binom{\varrho+p}{p}} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, [\eta m])$$

verknüpfen lassen. Bei den zum Nachweis dieser Tatsache erforderlichen Rechnungen werde zur Abkürzung

$$(2)\qquad [\eta m] + 1 = m_\eta$$

gesetzt.

Wir behandeln zunächst die beiden besonders einfach liegenden Fälle $p = 0$ und $p = 1$ und wenden uns dann zu dem allgemeinen Fall $p > 1$:

$p = 0$. In diesem Fall hat man die *identische Transformation*. Wählt man η beliebig aus dem Intervall $0 < \eta < 1$ und dann m so groß, daß $m_\eta < m$ wird, so kann man in (1)

$$\text{alle } \alpha_\varrho^{(m,\eta)} = 0$$

setzen, da in jeder Zeile des Schemas (C_0) nur das letzte Glied $\neq 0$ ist. Die Matrix (C_0) erfüllt also gewiß die im Hauptsatz genannte Bedingung.

$p = 1$. Für $p = 1$ hat man das Schema der *arithmetischen Mittel*. Wir wählen zunächst wieder η beliebig aus $0 < \eta < 1$. Beachtet man, daß in der m_η-ten Zeile des Schemas (C_1) durchweg $\frac{1}{m_\eta+1}$, in der m-ten Zeile durchweg $\frac{1}{m+1}$ steht, so kann man in den Gleichungen (1)

$$\alpha_\varrho^{(m,\eta)} = \begin{cases} \dfrac{m_\eta+1}{m+1} & \text{für } \varrho = m_\eta, \\ 0 & \text{für } \eta m < \varrho \leqq m,\ \varrho \neq m_\eta \end{cases}$$

setzen. Mit dieser Lösung der Gleichungen (1) findet man

$$\sum_{\eta m < \varrho \leqq m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| = \frac{m_\eta + 1}{m+1} < \frac{\eta m + 2}{m+1} < \eta + \frac{2}{m}$$

und damit

$$\sum_{\eta m < \varrho \leqq m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| < \varepsilon,$$

falls $\eta < \frac{\varepsilon}{3}$ und $m > \frac{1}{\eta}$ gewählt wird. Auch die Matrix (C_1) erfüllt somit die Bedingung (IV) des Hauptsatzes.

$p > 1$. Wir wählen zunächst η beliebig aus $0 < \eta < 1$ und m so groß, daß die Koeffizientenmatrix des Systems (1) mindestens p Zeilen und Spalten aufweist. Die Matrix hat dann den Rang p. Irgendeine ihrer Spalten hat nämlich, horizontal angeordnet, die Form

$$(3) \qquad \frac{\binom{\varrho+p-1}{p-1}}{\binom{\varrho+p}{p}}, \quad \frac{\binom{\varrho+p-2}{p-1}}{\binom{\varrho+p}{p}}, \quad \ldots, \quad \frac{\binom{\varrho+p-1-[\eta m]}{p-1}}{\binom{\varrho+p}{p}}.$$

Subtrahiert man, bei der letzten Zeile beginnend, von jeder Zeile die vorhergehende und wiederholt man diesen Prozeß p-mal, wobei man das erste Mal bis zur 1. Zeile, das zweite Mal bis zur 2. Zeile geht usw., so geht (3) über in

$$(4) \qquad \frac{\binom{\varrho+p-1}{p-1}}{\binom{\varrho+p}{p}}, \quad -\frac{\binom{\varrho+p-2}{p-2}}{\binom{\varrho+p}{p}}, \quad \ldots, \quad (-1)^{p-1}\frac{\binom{\varrho}{0}}{\binom{\varrho+p}{p}}, \quad 0, \ldots, 0.$$

Dies zeigt, daß sowohl die Koeffizienten- als auch die Gleichungsmatrix von (1) höchstens den Rang p hat; die weiteren Betrachtungen ergeben, daß der Rang genau p ist.

Wir fixieren nun eine Lösung der Gleichungen (1), von denen wir nur noch die p ersten, $(\mu = 0, 1, \ldots, p-1)$, in Betracht zu ziehen brauchen, in der Weise, daß wir zunächst willkürlich p Indizes $\varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_p$ aus $\eta m < \varrho \leqq m$ wählen und

$$(5) \qquad \alpha_\varrho^{(m,\eta)} = 0 \quad \text{für } \eta m < \varrho \leqq m, \ \varrho \neq \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$$

setzen. Die restlichen Größen $\alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)}, \alpha_{\varrho_2}^{(m,\eta)}, \ldots, \alpha_{\varrho_p}^{(m,\eta)}$ müssen dann den Gleichungen

$$(6) \qquad \frac{\binom{m+p-1-\mu}{p-1}}{\binom{m+p}{p}} = \alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)}\frac{\binom{\varrho_1+p-1-\mu}{p-1}}{\binom{\varrho_1+p}{p}} + \cdots + \alpha_{\varrho_p}^{(m,\eta)}\frac{\binom{\varrho_p+p-1-\mu}{p-1}}{\binom{\varrho_p+p}{p}}$$

$$(\mu = 0, 1, \ldots, p-1)$$

genügen. Die Determinante dieses Gleichungssystems lautet, wenn man gleich die dem Übergang von (3) zu (4) entsprechende Umformung vornimmt:

$$D_p = \frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}}{\binom{\varrho_1+p}{p}\binom{\varrho_2+p}{p}\cdots\binom{\varrho_p+p}{p}} \begin{vmatrix} \binom{\varrho_1+p-1}{p-1} & \binom{\varrho_2+p-1}{p-1} & \cdots & \binom{\varrho_p+p-1}{p-1} \\ \binom{\varrho_1+p-2}{p-2} & \binom{\varrho_2+p-2}{p-2} & \cdots & \binom{\varrho_p+p-2}{p-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{\varrho_1}{0} & \binom{\varrho_2}{0} & \cdots & \binom{\varrho_p}{0} \end{vmatrix}.$$

Indem man noch, mit der letzten Zeile beginnend, geeignete Vielfache jeder Zeile von den vorhergehenden Zeilen abzieht, läßt sie sich auf die Form

$$(7) \qquad D_p = \frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}}{1!\,2!\ldots(p-1)!} \cdot \frac{V_p(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p)}{\binom{\varrho_1+p}{p}\binom{\varrho_2+p}{p}\cdots\binom{\varrho_p+p}{p}}$$

bringen, wo $V_p(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p)$ die für die Größen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$ gebildete Vandermondesche Determinante bedeutet. Für die zu berechnenden Größen $\alpha_{\varrho_\lambda}^{(m,\eta)}$ ergibt sich damit sofort

$$(8) \qquad \alpha_{\varrho_\lambda}^{(m,\eta)} = \frac{\binom{\varrho_\lambda+p}{p}}{\binom{m+p}{p}} \cdot \frac{V_p(\varrho_1, \ldots, \varrho_{\lambda-1}, m, \varrho_{\lambda+1}, \ldots, \varrho_p)}{V_p(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p)} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, p).$$

Um nun der Bedingung (IV) des Hauptsatzes zu genügen, wählen wir jedenfalls $\eta < \frac{1}{p}$ und m so groß, daß $p\,m_\eta < m$ ausfällt. Wir setzen dann

$$(9) \qquad \varrho_1 = m_\eta, \quad \varrho_2 = 2\,m_\eta, \quad \ldots, \quad \varrho_p = p\,m_\eta$$

und finden nach (8)

$$(10) \qquad \alpha_{\varrho_\lambda}^{(m,\eta)} = \frac{(-1)^{p-\lambda}}{(\lambda-1)!\,(p-\lambda)!} \cdot \frac{(m-m_\eta)(m-2\,m_\eta)\ldots(m-p\,m_\eta)}{(m-\lambda\,m_\eta)\,m_\eta^{p-1}} \cdot \frac{\binom{\lambda\,m_\eta+p}{p}}{\binom{m+p}{p}}$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, p).$$

Für $m \to \infty$ strebt $\alpha_{\varrho_\lambda}^{(m,\eta)}$ gegen einen Grenzwert, dessen Betrag für alle $\lambda = 1, 2, \ldots, p$ kleiner als ηp^p ist. Dieser Wert ist $< \frac{\varepsilon}{2p}$, wenn η auf ein

hinreichend kleines Intervall $0 < \eta < \eta_0(\varepsilon)$ beschränkt wird. Bei jeder solchen Wahl von η wird danach für die durch (5) und (10) bestimmten Größen $\alpha_\varrho^{(m,\eta)}$

$$\sum_{\eta m < \varrho \leqq m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| < \varepsilon \quad \text{für } m > M(\eta).$$

Die Matrix (C_p) erfüllt somit für beliebiges ganzes $p > 1$ die Bedingung (IV) des Hauptsatzes.

§ 2.

Die Hölderschen Verfahren.

Als „(H, r, s)-*Transformation*" werde wie üblich für ganze $r, s \geqq 0$ die Transformation bezeichnet, die durch die Matrizen (H_r) und (H) festgelegt ist. Dabei verstehen wir unter (H_p) das bekannte Schema der H_p-Transformation einfacher Folgen. Schreiben wir dasselbe

$$(H_p): \quad \begin{matrix} u_{00}^{(p)} & & & & \\ u_{10}^{(p)} & u_{11}^{(p)} & & & \\ \cdots & \cdots & & & \\ u_{m0}^{(p)} & u_{m1}^{(p)} & \cdots & u_{mm}^{(p)} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \qquad (p = 0, 1, 2 \ldots),$$

so bestimmen sich die Elemente $u_{m\mu}^{(p)}$ rekursiv durch die Formeln

$$(1)\quad u_{m\mu}^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = m \\ 0 & \text{für } \mu \neq m \end{cases} \text{ und weiter } u_{m\mu}^{(p)} = \frac{1}{m+1} \sum_{\nu=\mu}^{m} u_{\nu\mu}^{(p-1)} \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

Explizit ergibt sich hieraus bei $p > 1$ für $u_{m\mu}^{(p)}$ der Ausdruck

$$(2)\qquad u_{m\mu}^{(p)} = \frac{1}{m+1} \sum_{\nu_{p-1}=\mu+1}^{m+1} \frac{1}{\nu_{p-1}} \sum_{\nu_{p-2}=\mu+1}^{\nu_{p-1}} \frac{1}{\nu_{p-2}} \cdots \sum_{\nu_1=\mu+1}^{\nu_2} \frac{1}{\nu_1}.$$

Wir wollen zeigen, daß für die so definierten (H, r, s)-Transformationen der Permanenzsatz für restringierte Limitierung in derselben Form wie für die (C, r, s)-Transformationen gilt:

Permanenzsatz der H-Verfahren. *Eine restringiert konvergente Doppelfolge* $(s_{\mu,\nu})$ *ist dann und nur dann auch restringiert* (H, r, s)*-limitierbar* (r, s ganz, $\geqq 0$), *wenn sie restringiert* (H, r, s)*-beschränkt ist. Ist die Doppel-*

folge $(s_{\mu\nu})$ *zugleich restringiert konvergent und restringiert* (H, r, s)*-limitierbar, so gilt*

$$(H, r, s)\text{-}\lim_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu} = \lim_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu}.$$

Beweis. Da bekannt ist, daß die Matrizen (H_p) den TOEPLITZschen Bedingungen genügen, daß also die (H, r, s)-Transformationen gewiß zur Klasse der T-Transformationen gehören, so hat man wie bei den C-Verfahren nur noch zu zeigen, daß es sich genauer um T''-Transformationen handelt, d. h. daß sich die Elemente einer beliebigen Matrix (H_p), $(p = 0, 1, 2, \ldots)$, für kleine positive η und große m in passender Weise durch Gleichungssysteme

$$u_{m\mu}^{(p)} = \sum_{\eta m < \varrho \leqq m} \alpha_{\varrho}^{(m,\eta)} u_{\varrho\mu}^{(p)} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, [\eta m]) \tag{3}$$

verknüpfen lassen.

Wir dürfen $p > 1$ voraussetzen, da die Fälle $p = 0$ und $p = 1$ mit den entsprechenden Fällen der C-Verfahren übereinstimmen. Wählen wir η beliebig aus $0 < \eta < 1$ und dann m so groß, daß die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (3) mindestens p Zeilen und Spalten aufweist, so hat diese Matrix den Rang p. Irgendeine ihrer Spalten hat nämlich, horizontal angeordnet, die Form

$$u_{\varrho 0}^{(p)},\ u_{\varrho 1}^{(p)},\ \ldots,\ u_{\varrho,[\eta m]}^{(p)}. \tag{4}$$

Subtrahiert man, bei der letzten Zeile beginnend, von jeder Zeile ein geeignetes Vielfaches der vorangehenden Zeile unter Beachtung der für $p \geqq 1$ geltenden Beziehungen

$$u_{\varrho\lambda}^{(p)} = u_{\varrho,\lambda-1}^{(p)} - \frac{1}{\lambda} u_{\varrho,\lambda-1}^{(p-1)} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \varrho) \tag{5}$$

[die sich mühelos aus (2) ergeben], so erhält die Spalte (4) nach p-maliger Wiederholung dieses Prozesses, wobei das erste Mal bis zur 1. Zeile, das zweite Mal bis zur 2. Zeile usw. zu gehen ist, die Form

$$u_{\varrho 0}^{(p)},\ -\frac{1}{1!} u_{\varrho 0}^{(p-1)},\ \frac{1}{2!} u_{\varrho 0}^{(p-2)},\ \ldots,\ (-1)^{(p-1)} \frac{1}{(p-1)!} u_{\varrho 0}^{(1)},\ 0, \ldots, 0. \tag{6}$$

Dies zeigt, daß sowohl die Koeffizienten- als auch die Gleichungsmatrix von (3) höchstens den Rang p hat, die weiteren Rechnungen werden ergeben, daß der Rang genau p ist.

Wir suchen nunmehr die Gleichungen (3), von denen wir weiterhin nur die p ersten, ($\mu = 0, 1, \ldots, p-1$), in Betracht zu ziehen brauchen, in der Weise zu lösen, daß wir zunächst willkürlich p Indizes $\varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_p$ aus $\eta m < \varrho \leqq m$ wählen und

$$(7) \qquad \alpha_{\varrho}^{(m,\eta)} = 0 \quad \text{für } \eta m < \varrho \leqq m, \quad \varrho \neq \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$$

setzen, so daß die restlichen Größen $\alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)}, \alpha_{\varrho_2}^{(m,\eta)}, \ldots, \alpha_{\varrho_p}^{(m,\eta)}$ den Gleichungen

$$(8) \qquad u_{m\mu}^{(p)} = \alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)} u_{\varrho_1\mu}^{(p)} + \alpha_{\varrho_2}^{(m,\eta)} u_{\varrho_2\mu}^{(\mu)} + \cdots + \alpha_{\varrho_p}^{(m,\eta)} u_{\varrho_p\mu}^{(p)} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, p-1)$$

genügen müssen. Die Determinante dieses Gleichungssystems lautet, wenn gleich die dem Übergang von (4) zu (6) entsprechende Umformung vorgenommen wird.

$$(9) \qquad D_p = \frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}}{1!\,2!\cdots(p-1)!} \begin{vmatrix} u_{\varrho_1 0}^{(p)} & u_{\varrho_2 0}^{(p)} & \cdots & u_{\varrho_p 0}^{(p)} \\ u_{\varrho_1 0}^{(p-1)} & u_{\varrho_2 0}^{(p-1)} & \cdots & u_{\varrho_p 0}^{(p-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{\varrho_1 0}^{(1)} & u_{\varrho_2 0}^{(1)} & \cdots & u_{\varrho_p 0}^{(1)} \end{vmatrix}.$$

Setzt man für die Elemente $u_{m\mu}^{(q)}$ die Ausdrücke (2) ein, zieht aus jeder Spalte den vor dem Summenzeichen stehenden gemeinsamen Faktor heraus und subtrahiert sodann die erste Spalte von allen übrigen, so geht D_p durch Entwickeln nach der letzten Zeile in die folgende $(p-1)$-reihige Determinante über

$$D_p = \frac{(-1)^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}}}{1!\,2!\ldots(p-1)!} \cdot \frac{\Delta_p}{(\varrho_1+1)(\varrho_2+1)\ldots(\varrho_p+1)}$$

mit

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} \cdots & \sum_{\nu_{p-1}=\varrho_1+2}^{\varrho_2+1} \frac{1}{\nu_{p-1}} & \sum_{\nu_{p-2}=1}^{\nu_{p-1}} \frac{1}{\nu_{p-2}} & \cdots & \sum_{\nu_1=1}^{\nu_2} \frac{1}{\nu_1} & \cdots \\ \cdots & & \sum_{\nu_{p-2}=\varrho_1+2}^{\varrho_2+1} \frac{1}{\nu_{p-2}} & \cdots & \sum_{\nu_1=1}^{\nu_2} \frac{1}{\nu_1} & \cdots \\ \cdots & & & & & \\ \cdots & & & & \sum_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\varrho_2+1} \frac{1}{\nu_1} & \cdots \end{vmatrix} \qquad (\lambda = 2, \ldots, p).$$

Die in einer beliebigen Spalte stehenden Elemente können wir nun, von unten nach oben fortschreitend, durch die folgenden Formeln umschreiben:

$$\sum_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_1}=\sum_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_1},$$

$$\sum_{\nu_2=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_2}\sum_{\nu_1=1}^{\nu_2}\frac{1}{\nu_1}=\sum_{\nu_2=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_2}\cdot\sum_{\nu_1=1}^{\varrho_1+1}\frac{1}{\nu_1}+\sum_{\nu_2=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_2}\sum_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\nu_2}\frac{1}{\nu_1},$$

$$\sum_{\nu_3=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_3}\sum_{\nu_2=1}^{\nu_3}\frac{1}{\nu_2}\sum_{\nu_1=1}^{\nu_2}\frac{1}{\nu_1}=\sum_{\nu_3=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_3}\cdot\sum_{\nu_2=1}^{\varrho_1+1}\frac{1}{\nu_2}\sum_{\nu_1=1}^{\nu_2}\frac{1}{\nu_1}+\sum_{\nu_3=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_3}\sum_{\nu_2=\varrho_1+2}^{\nu_3}\frac{1}{\nu_2}\cdot\sum_{\nu_1=1}^{\varrho_1+1}\frac{1}{\nu_1}+\sum_{\nu_3=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_3}\sum_{\nu_2=\varrho_1+2}^{\nu_3}\frac{1}{\nu_2}\sum_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\nu_2}\frac{1}{\nu_1},$$

. . . . . .

Damit läßt sich die Determinante Δ_p durch wiederholte Zeilensubtraktion schließlich in die Form setzen

$$\Delta_p=\begin{vmatrix} \cdots & \sum\limits_{\nu_{p-1}=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_{p-1}} & \sum\limits_{\nu_{p-2}=\varrho_1+2}^{\nu_{p-1}}\frac{1}{\nu_{p-2}}\cdots & \sum\limits_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\nu_2}\frac{1}{\nu_1}\cdots \\ \cdots & & \sum\limits_{\nu_{p-2}=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_{p-2}}\cdots & \sum\limits_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\nu_2}\frac{1}{\nu_1}\cdots \\ \cdots & & & \sum\limits_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_1}\cdots \end{vmatrix} \quad (\lambda=2,3,\ldots,p).$$

Die nunmehr auftretenden Ausdrücke lassen sich in bequemer Weise für große $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$ asymptotisch abschätzen. Man hat nämlich, wieder von unten nach oben fortschreitend, für beliebiges $\varrho > \varrho_1$ mit $\varrho = O(\varrho_1)$ nacheinander

$$\sum_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\varrho+1}\frac{1}{\nu_1}=\int_{\varrho_1+2}^{\varrho+1}\frac{dx}{x}+O\left(\frac{1}{\varrho_1}\right)=\frac{1}{1!}[\ln\varrho-\ln\varrho_1]+O\left(\frac{1}{\varrho_1}\right),$$

$$\sum_{\nu_2=\varrho_1+2}^{\varrho+1}\frac{1}{\nu_2}\sum_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\nu_2}\frac{1}{\nu_1}=\int_{\varrho_1+2}^{\varrho+1}[\ln x-\ln\varrho_1]\frac{dx}{x}+O\left(\frac{\ln\varrho}{\varrho_1}\right)$$

$$=\frac{1}{2!}[\ln\varrho-\ln\varrho_1]^2+O\left(\frac{\ln\varrho_1}{\varrho_1}\right)$$

usw.

Damit sind wir in der Lage, die Auflösung des Gleichungssystems (8) vollends in übersichtlicher Weise durchzuführen. Wir setzen $\eta = \vartheta^p$ und verfügen über die bisher willkürlich angenommenen Indizes $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$ in der Weise, daß wir

$$\varrho_1 = [\vartheta^p m] + 1, \quad \varrho_2 = [\vartheta^{p-1} m] + 1, \quad \ldots, \quad \varrho_p = [\vartheta m] + 1$$

wählen, wobei m so groß sei, daß diese Werte voneinander verschieden sind. Die Determinante Δ_p erhält dann den Wert

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} \cdots & \frac{1}{(p-1)!}\{\ln \vartheta^{p-\lambda} m - \ln \vartheta^p m\}^{p-1} + O\left(\frac{\ln^{p-2} m}{m}\right) & \cdots \\ \cdots & \frac{1}{(p-2)!}\{\ln \vartheta^{p-\lambda} m - \ln \vartheta^p m\}^{p-2} + O\left(\frac{\ln^{p-3} m}{m}\right) & \cdots \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \cdots & \frac{1}{1!}\{\ln \vartheta^{p-\lambda} m - \ln \vartheta^p m\} + O\left(\frac{1}{m}\right) & \cdots \end{vmatrix} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, p-1)$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}}}{1!\,2!\ldots(p-1)!}\{\ln \vartheta\}^{\frac{p(p-1)}{2}} V_p(0, 1, 2, \ldots, p-1) + O\left(\frac{\ln^{p-2} m}{m}\right),$$

wo $V_p(0, 1, \ldots, p-1)$ die für $0, 1, \ldots, p-1$ gebildete Vandermondesche Determinante bedeutet. Um nun die gesuchten Größen $\alpha_{\varrho_\lambda}^{(m,\eta)}$ zu erhalten, hat man nur zu beachten, daß die Zählerdeterminante jeweils aus D_p entsteht, indem man $\varrho_\lambda = m$ an Stelle von $\varrho_\lambda = [\vartheta^{p+1-\lambda} m] + 1$ einführt. Damit ergibt sich

$$\alpha_{\varrho_\lambda}^{(m,\eta)} = \frac{[\vartheta^{p+1-\lambda} m] + 2}{m+1}\left\{\frac{V_p(0, \ldots, \lambda-2, p, \lambda, \ldots, p-1)}{V_p(0, 1, \ldots, p-1)} + O\left(\frac{\ln^{p-2} m}{m}\right)\right\}.$$

Man erkennt, daß dieser Wert für $m \to \infty$ gegen

$$\frac{V_p(0, \ldots, \lambda-2, p, \lambda, \ldots, p-1)}{V_p(0, 1, \ldots, p-1)}\,\vartheta^{p+1-\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, p)$$

strebt, einen Wert, der bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ unter $\frac{\varepsilon}{2p}$ sinkt, falls nur ϑ, d. h. η hinreichend klein gewählt ist. Hieraus folgt, daß für $\eta < \eta_0(\varepsilon)$

$$\sum_{\eta m < \varrho \leqq m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| < \varepsilon \quad \text{für } m > M(\eta)$$

gilt. Die Matrix (H_p) erfüllt somit für beliebiges ganzes $p > 1$ die Bedingung (IV) des Hauptsatzes.

§ 3.

Die Euler-Knoppschen Verfahren.

Wir bezeichnen als „*(E, r, s)-Transformation*" für ganze $r, s \geqq 0$ die Transformation, die durch die Matrizen (E_r) und (E_s) festgelegt ist. Dabei verstehen wir unter (E_p) das bekannte Schema der E_p-Transformation einfacher Folgen, das die Form hat:

$$(E_p): \quad \begin{array}{l} \frac{1}{(q+1)^0}\left\{\binom{0}{0}\right\} \\ \frac{1}{(q+1)^1}\left\{\binom{1}{0}q, \binom{1}{1}\right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{(q+1)^m}\left\{\binom{m}{0}q^m, \binom{m}{1}q^{m-1}, \ldots, \binom{m}{m}\right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \qquad \begin{pmatrix} q = 2^p - 1 \\ p = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Wir wollen zeigen, daß auch für die so definierten E-Transformationen der Permanenzsatz in derselben Form wie für die C- und H-Verfahren gilt:

Permanenzsatz der E-Verfahren. *Eine restringiert konvergente Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ ist dann und nur dann auch restringiert (E, r, s)-limitierbar (r, s ganz, $\geqq 0$), wenn sie restringiert (E, r, s)-beschränkt ist. Ist die Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ zugleich restringiert konvergent und restringiert (E, r, s)-limitierbar, so gilt*

$$(E, r, s)\text{-}\lim_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu} = \lim_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu}.$$

Beweis. Da bekannt ist, daß die Matrizen (E_p) den Toeplitzschen Bedingungen genügen, daß also die (E, r, s)-Transformationen zur Klasse der T-Transformationen gehören, so ist auch hier wieder nur noch zu zeigen, daß es sich genauer um T''-Transformationen handelt, d. h. daß sich die Elemente einer beliebigen Matrix (E_p), $(p = 0, 1, 2, \ldots)$, für kleine positive η und große m in passender Weise durch Gleichungssysteme

$$(1) \qquad \frac{q^{m-\mu}}{(q+1)^m}\binom{m}{\mu} = \sum_{\eta m < \varrho \leqq m} \alpha_\varrho^{(m,\eta)} \frac{q^{\varrho-\mu}}{(q+1)^\varrho}\binom{\varrho}{\mu} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, [\eta m])$$

verknüpfen lassen. Da (E_0) wieder die identische Transformation liefert, können wir $p > 0$, also auch $q > 0$, voraussetzen. Bei der Durchführung des Beweises empfiehlt es sich, die Abkürzung

$$(2) \qquad [\eta m] + 1 = m_\eta$$

zu verwenden.

Wir wählen zunächst $\eta < \frac{1}{2}$ und m so groß, daß $2m_\eta < m$ ausfällt. Für ein solches η und m genügen wir den Gleichungen (1), indem wir

$$(3) \qquad \alpha_\varrho^{(m,\eta)} = 0 \quad \text{für} \quad \eta m < \varrho \leqq m, \quad \varrho \neq m_\eta, m_\eta + 1, \ldots, 2m_\eta$$

wählen, während die übrigen $\alpha_\varrho^{(m,\eta)}$ die Gleichungen

$$(4) \qquad \frac{q^{m-\mu}}{(q+1)^m}\binom{m}{\mu} = \sum_{\varrho=m_\eta}^{2m_\eta} \alpha_\varrho^{(m,\eta)} \frac{q^{\varrho-\mu}}{(q+1)^\varrho}\binom{\varrho}{\mu} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, m_\eta)$$

erfüllen sollen. Das Gleichungssystem (4) läßt sich durch Einführung der Abkürzung

$$v = \frac{q}{q+1}$$

umschreiben in

$$(5) \qquad v^{m-m_\eta}\binom{m}{\mu} = \alpha_{m_\eta}^{(m,\eta)}\binom{m_\eta}{\mu} + \alpha_{m_\eta+1}^{(m,\eta)}\binom{m_\eta+1}{\mu}v + \cdots + \alpha_{2m_\eta}^{(m,\eta)}\binom{2m_\eta}{\mu}v^{m_\eta}$$
$$(\mu = 0, 1, \ldots, m_\eta).$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems lautet

$$D = v^{\frac{m_\eta(m_\eta+1)}{2}} \begin{vmatrix} \binom{m_\eta}{0} & \binom{m_\eta+1}{0} & \cdots & \binom{2m_\eta}{0} \\ \binom{m_\eta}{1} & \binom{m_\eta+1}{1} & \cdots & \binom{2m_\eta}{1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{m_\eta}{m_\eta} & \binom{m_\eta+1}{m_\eta} & \cdots & \binom{2m_\eta}{m_\eta} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante vereinfacht sich, wenn mit der 1. Zeile beginnend jede Zeile von der nachfolgenden subtrahiert wird. Führt man diesen Prozeß wiederholt durch, so erhält man nach m_η Schritten eine Determinante, deren sämtliche unterhalb der Hauptdiagonale stehenden Elemente verschwinden, während die in der Hauptdiagonale stehenden Elemente den Wert 1 haben; es ist also

$$D = v^{\frac{m_\eta(m_\eta+1)}{2}} \neq 0.$$

Die bei der Auflösung des Gleichungssystems (5) auftretenden Zählerdeterminanten lassen sich in derselben Weise reduzieren und man erhält so die Werte:

$$(6) \qquad \alpha_{m_\eta+\lambda}^{(m,\eta)} = (-1)^{m_\eta+\lambda}\binom{m-m_\eta}{\lambda}\binom{m-m_\eta-1-\lambda}{m_\eta-\lambda}v^{m-m_\eta-\lambda}$$
$$(\lambda = 0, 1, \ldots, m_\eta).$$

Für die durch (3) und (6) bestimmte Lösung der Gleichungen (1) wird

$$\sum_{\eta\, m < \varrho \leqq m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| = \sum_{\lambda=0}^{m_\eta} \binom{m-m_\eta}{\lambda} \binom{m-m_\eta-1-\lambda}{m_\eta-\lambda} v^{m-m_\eta-\lambda}$$

$$= (m-2m_\eta)\binom{m-m_\eta}{m_\eta} \sum_{\lambda=0}^{m_\eta} \frac{\binom{m_\eta}{\lambda}}{m-m_\eta-\lambda} v^{m-m_\eta-\lambda}$$

$$= (m-2m_\eta)\binom{m-m_\eta}{m_\eta} \int_0^v v^{m-2m_\eta-1}(1+v)^{m_\eta}\, dv,$$

also

$$(7) \qquad \sum_{\eta\, m < \varrho \leqq m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| \leqq (m-2m_\eta)\binom{m-m_\eta}{m_\eta} v^{m-2m_\eta}\,(1+v)^{m_\eta}.$$

Durch Anwendung der STIRLINGschen Formel folgt hieraus weiter

$$(8) \qquad \sum_{\eta\, m < \varrho \leqq m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| \leqq \text{Konst.}\, m\sqrt{m} \left(\frac{v^{1-2\eta-\frac{2}{m}}\,(1+v)^{\eta+\frac{1}{m}}}{\eta^{\eta+\frac{1}{m}}\left(1-2\eta-\frac{2}{m}\right)^{1-2\eta}} \right)^m$$

Bei festem η strebt der Ausdruck in der Klammer für $m \to \infty$ gegen

$$\frac{v^{1-2\eta}\,(1+v)^{\eta}}{\eta^{\eta}\,(1-2\eta)^{1-2\eta}}.$$

Dieser Limes ist kleiner als Eins, wenn η auf ein genügend kleines Intervall $0 < \eta < \eta_0$ beschränkt wird. Hieraus folgt, daß für ein solches, fest gewähltes η der Ausdruck in der Klammer von (8) selbst kleiner als eine Zahl $v_0 < 1$ ist, falls nur m genügend groß angenommen wird. Für ein festes η aus $0 < \eta < \eta_0$ gilt also bei hinreichend großem m

$$\sum_{\eta\, m < \varrho \leqq m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| \leqq \text{Konst.}\, m\sqrt{m}\, v_0^m.$$

Hieraus schließt man endlich, daß es bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ zu jedem η aus $0 < \eta < \eta_0$ eine Zahl $M(\eta)$ gibt derart, daß

$$\sum_{\eta\, m < \varrho \leqq m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| < \varepsilon \quad \text{für} \quad m > M(\eta)$$

ausfällt. Die Matrix (E_p) erfüllt somit für beliebiges ganzes $p > 0$ die Bedingung (IV) des Hauptsatzes.

§ 4.

Die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Verfahren.

Wir wenden uns nun noch zur Untersuchung der Frage, wie weit sich der Knopp-Schnee'sche Satz von der Äquivalenz der C- und H-Verfahren auf die restringierte Limitierung von Doppelfolgen überträgt. Wie einfache Beispiele zeigen, kann der Satz jedenfalls nicht in der allgemeinen Form gelten, daß für ganzes $r, s \geqq 0$ aus der restringierten (C, r, s)-Limitierbarkeit einer Doppelfolge stets ihre restringierte (H, r, s)-Limitierbarkeit zu demselben Limes folgt und umgekehrt:

1) Die Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ mit

$$s_{0\nu} = 2\{(\nu+1)^2 - \nu^2\}, \quad s_{1\nu} = -4\{(\nu+1)^2 - \nu^2\}, \quad s_{2\nu} = 2\{(\nu+1)^2 - \nu^2\},$$
$$s_{\mu\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu \geqq 3$$

besitzt den Limes 0. Ihre arithmetischen Mittel $(m_{\mu\nu})$ sind

$$m_{0\nu} = 2(\nu+1), \quad m_{1\nu} = -(\nu+1), \quad m_{\mu\nu} = 0 \text{ für } \mu \geqq 2,$$

sie haben also ebenfalls den Limes 0. Dasselbe gilt schließlich von ihrer $(C, 2, 2)$-Transformation $(c_{\mu\nu}^{(2,2)})$, denn man sieht ohne Mühe, daß

$$c_{\mu\nu}^{(2,2)} = 0 \quad \text{für} \quad \mu \geqq 1$$

gilt. Trotzdem danach die Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ im gewöhnlichen Sinne konvergent, $(C, 1, 1) = (H, 1, 1)$-limitierbar und $(C, 2, 2)$-limitierbar zu demselben Wert 0 ist, ist sie nicht einmal restringiert $(H, 2, 2)$-limitierbar. Für ihre $(H, 2, 2)$-Transformation $(h_{\mu\nu}^{(2,2)})$ gilt nämlich speziell

$$h_{\mu\mu}^{(2,2)} = \frac{1}{2}\frac{\mu+2}{\mu+1} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots),$$

sie kann also nicht den Limes 0 im restringierten Sinne besitzen und ein anderer Limes kommt nach dem Permanenzsatz des § 2 nicht in Frage.

2) Die Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ mit

$$s_{0\nu} = (\nu+1)^3 - \nu^3, \quad s_{1\nu} = -3\{(\nu+1)^3 - \nu^3\}, \quad s_{2\nu} = 2\{(\nu+1)^3 - \nu^3\},$$
$$s_{\mu\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu \geqq 3,$$

besitzt den Limes 0. Dasselbe gilt für ihre arithmetischen Mittel $(m_{\mu\nu})$, die die Werte

$$m_{0\nu} = (\nu+1)^2, \quad m_{1\nu} = -(\nu+1)^2, \quad m_{\mu\nu} = 0 \text{ für } \mu \geqq 2$$

besitzen, sowie für ihre $(H, 2, 2)$-Transformation $(h_{\mu\nu}^{(2,2)})$, denn wie man mühelos nachprüft, gilt

$$h_{\mu\nu}^{(2,2)} = 0 \quad \text{für} \quad \mu \geqq 1.$$

Trotzdem danach die Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ im gewöhnlichen Sinne konvergent, $(C, 1, 1) = (H, 1, 1)$-limitierbar und $(H, 2, 2)$-limitierbar zu demselben Wert 0

ist, ist sie nicht einmal restringiert $(C, 2, 2)$-limitierbar. Für ihre $(C, 2, 2)$-Transformation $(c_{\mu\nu}^{(2,2)})$ gilt nämlich speziell

$$c_{\mu\mu}^{(2,2)} = -\frac{1}{\binom{\mu+2}{2}^3}\left[1^3 + 2^3 + \cdots + (\mu+1)^3\right] \quad (\mu = 1, 2, \ldots),$$

sie kann also nicht den Limes 0 im restringierten Sinne besitzen und ein anderer Limes kommt nach dem Permanenzsatz des § 1 nicht in Frage.

Wenn danach die C- und H-Verfahren für restringierte Limitierung von Doppelfolgen auch nicht in vollem Umfange äquivalent sein können, so besagt doch der nachfolgende Satz, daß die Äquivalenz wenigstens in demselben abgeschwächten Sinne wie bei gewöhnlicher Limitierung von Doppelfolgen besteht:

Äquivalenzsatz der C- und H-Verfahren. *Eine für ganzes $r, s \geqq 0$ restringiert (C, r, s)-limitierbare Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ ist dann und nur dann auch restringiert (H, r, s)-limitierbar, wenn sie restringiert (H, r, s)-beschränkt ist, entsprechend umgekehrt. Ist die Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ zugleich restringiert (C, r, s)- und (H, r, s)-limitierbar,* so gilt

$$(C, r, s)\text{-}\lim_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu} = (H, r, s)\text{-}\lim_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu}.$$

Beweis. Beim Beweis gehen wir davon aus, daß sich jeweils die (C, r, s)-Transformation $(c_{\mu\nu}^{(r,s)})$ und die (H, r, s)-Transformation $(h_{\mu\nu}^{(r,s)})$ einer Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ durch T-Transformationen ineinander überführen lassen[7]: Der Übergang von der Folge $(c_{\mu\nu}^{(r,s)})$ zu der Folge $(h_{\mu\nu}^{(r,s)})$ vollzieht sich durch zwei Dreiecksmatrizen $A = (C \to H)_r$ und $B = (C \to H)_s$, wobei allgemein für ganzes $p \geqq 1$ die Matrix $(C \to H)_p$, welche die C_p-Transformation einer einfachen Folge in ihre H_p-Transformation überführt, eine lineare Kombination der Matrizen $(H_0), (H_1), \ldots, (H_{p-1})$ darstellt:

$$(1) \qquad (C \to H)_p = \gamma_0^{(p)}(H_0) + \gamma_1^{(p)}(H_1) + \cdots + \gamma_{p-1}^{(p)}(H_{p-1}).$$

Die Koeffizienten γ bestimmen sich dabei aus der Rekursionsformel

$$(2) \qquad \gamma_0^{(p)} = \frac{1}{p!}, \qquad \gamma_\lambda^{(p)} = \frac{\gamma_\lambda^{(p-1)} + (p-1)\,\gamma_{\lambda-1}^{(p-1)}}{p} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, p-1)$$

(falls man sich jeweils $\gamma_p^{(p)} = 0$ gesetzt denkt); sie zeigt, daß alle Größen $\gamma_\lambda^{(p)}$, $(\lambda = 0, 1, \ldots, p-1)$, positiv sind. Umgekehrt vollzieht sich auch der Übergang von der Folge $(h_{\mu\nu}^{(r,s)})$ zu der Folge $(c_{\mu\nu}^{(r,s)})$ durch zwei Dreiecksmatrizen $(A) = (H \to C)_r$ und $(B) = (H \to C)_s$, wobei nun allgemein für ganzes $p \geqq 1$ die Matrix $(H \to C)_p$, welche die H_p-Transformation einer einfachen Folge

[7] Vgl. V. Garten, Über den Vergleich der Cesàroschen und Hölderschen Mittelbildungen. Math. Zeitschr. 47 (1940), S. 111–124 sowie die dort zitierte Literatur.

in ihre C_p-Transformation überführt, eine lineare Kombination der Matrizen $(C_0), (C_1), \ldots, (C_p)$ darstellt:

$$(3) \qquad (H \to C)_p = \delta_0^{(p)}(C_0) + \delta_1^{(p)}(C_1) + \cdots + \delta_p^{(p)}(C_p).$$

Die Koeffizienten δ bestimmen sich dabei jeweils aus den Gleichungen

$$(4) \qquad \delta_0^{(p)} = p!, \quad \frac{(-1)^{\varkappa+1}}{p!} \sum_{\lambda=\varkappa+1}^{p} \lambda \binom{\lambda-1}{\varkappa} \delta_\lambda^{(p)} = d_{p-1-\varkappa}^{(p)} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, p-1),$$

wo die Größen d durch die Formel

$$(5) \qquad d_\lambda^{(p)} = (-1)^\lambda \binom{p-1}{\lambda} \frac{(p-\lambda-1)^p}{(p-1)!} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, p-1)$$

erklärt sind, so daß $d_{p-1}^{(p)} = 0$, dagegen $d_\lambda^{(p)} \neq 0$ für $\lambda = 0, 1, \ldots, p-2$ gilt. Sowohl die Matrix $(C \to H)_p$ als auch die Matrix $(H \to C)_p$ genügt den Toeplitzschen Bedingungen, da sie nach dem Knopp-Schneeschen Satz jede konvergente (einfache) Folge in eine zum gleichen Wert konvergente Folge überführen. Es lassen sich also in der Tat $(c_{\mu\,\nu}^{r,\,s})$ und $(h_{\mu\,\nu}^{r,\,s})$ durch T-Transformationen ineinander überführen.

Nach dem Hauptsatz ist für den Beweis des Äquivalenzsatzes somit noch zu zeigen, daß diese T-Transformationen genauer der Klasse der T''-Transformationen angehören, daß also die Matrizen $(C \to H)_p$ und $(H \to C)_p$ der dafür charakteristischen zusätzlichen Bedingung (IV) genügen. Diesen Nachweis erbringen wir nacheinander für die beiden Matrizen:

1) $(C \to H)_p$. Da die Matrix für $p = 0$ und $p = 1$ die identische Transformation darstellt, dürfen wir $p > 1$ voraussetzen. Bezeichnen wir dann die Elemente der Matrix mit

$$x_{m\,\mu}^{(p)} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, m; \; m = 0, 1, 2, \ldots),$$

so genügt es zu zeigen, daß sich dieselben für kleine positive η und große m in passender Weise durch Gleichungssysteme

$$(6) \qquad x_{m\,\mu}^{(p)} = \sum_{\eta\, m < \varrho \leqq m} \alpha_\varrho^{(m,\,\eta)} x_{\varrho\,\mu}^{(p)} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, [\eta\, m])$$

verknüpfen lassen.

Wählen wir η beliebig aus $0 < \eta < 1$ und dann m so groß, daß die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (6) mindestens $p-1$ Zeilen und Spalten aufweist, so hat diese Matrix den Rang $p-1$. Irgendeine ihrer Spalten hat nämlich, horizontal angeordnet, zufolge (1) die Form

$$(7) \quad x_{\varrho\,0}^{(p)} = \sum_{\lambda=0}^{p-1} \gamma_\lambda^{(p)} u_{\varrho\,0}^{(\lambda)}, \quad x_{\varrho\,1}^{(p)} = \sum_{\lambda=0}^{p-1} \gamma_\lambda^{(p)} u_{\varrho\,1}^{(\lambda)}, \; \ldots, \; x_{\varrho,\,[\eta\, m]}^{(p)} = \sum_{\lambda=0}^{p-1} \gamma_\lambda^{(p)} u_{\varrho,\,[\eta\, m]}^{(\lambda)},$$

wo die Größen $u_{m\,\mu}^{(\varrho)}$ die betreffenden Elemente der Matrix (H_ϱ) bedeuten (vgl. § 2). Beachtet man, daß

$$u_{m\,\mu}^{(0)} = 0 \quad \text{für } \mu < m$$

gilt, so läßt sich die Matrix mit Hilfe der Gleichungen (5) des § 2 in einfacher Weise umformen. Subtrahiert man nämlich, bei der letzten Zeile beginnend, von jeder Zeile die mit einem entsprechenden Faktor versehene vorangehende Zeile und wiederholt dieses Verfahren $(p-1)$-mal, wobei man das erste Mal bis zur 1. Zeile, das zweite Mal bis zur 2. Zeile und das $(p-1)$-te Mal bis zur $(p-1)$-ten Zeile geht, so erhält die Spalte (7), wieder horizontal angeordnet, die Form

$$(8)\qquad \sum_{\lambda=1}^{p-1}\gamma_\lambda^{(p)}u_{\varrho 0}^{(\lambda)},\quad -\frac{1}{1!}\sum_{\lambda=2}^{p-1}\gamma_\lambda^{(p)}u_{\varrho 0}^{(\lambda-1)},\quad \frac{1}{2!}\sum_{\lambda=3}^{p-1}\gamma_\lambda^{(p)}u_{\varrho 0}^{(\lambda-2)},\quad \ldots,$$
$$\frac{(-1)^{p-2}}{(p-2)!}\gamma_{p-1}^{(p)}u_{\varrho 0}^{(1)},\ 0,\ \ldots,\ 0.$$

Dies zeigt, daß sowohl die Koeffizienten- als auch die Gleichungsmatrix von (6) höchstens den Rang $p-1$ haben; daß sie genau den Rang $p-1$ haben, geht aus den weiteren Rechnungen hervor.

Wir lösen nun die Gleichungen (6), von denen wir weiterhin nur die $p-1$ ersten, $(\mu = 0, 1, \ldots, p-2)$, in Betracht zu ziehen brauchen, in der Weise, daß wir zunächst willkürlich $p-1$ Indizes $\varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_{p-1}$ aus $\eta m < \varrho \leqq m$ wählen und

$$(9)\qquad \alpha_\varrho^{(m,\eta)} = 0 \quad \text{für } \eta m < \varrho \leqq m, \quad \varrho \neq \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{p-1}$$

setzen, so daß die restlichen Größen $\alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)}, \alpha_{\varrho_2}^{(m,\eta)}, \ldots, \alpha_{\varrho_{p-1}}^{(m,\eta)}$ den Gleichungen

$$(10)\qquad x_{m\mu}^{(p)} = \alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)}x_{\varrho_1\mu}^{(p)} + \alpha_{\varrho_2}^{(m,\eta)}x_{\varrho_2\mu}^{(p)} + \ldots + \alpha_{\varrho_{p-1}}^{(m,\eta)}x_{\varrho_{p-1}\mu}^{(p)}$$
$$(\mu = 0, 1, \ldots, p-2)$$

genügen müssen. Die Determinante dieses Gleichungssystems lautet, wenn gleich die dem Übergang von (7) zu (8) entsprechende Umformung vorgenommen und dann noch, mit der letzten Zeile beginnend, ein geeignetes Vielfaches jeder Zeile von den vorhergehenden abgezogen wird, einfach

$$\frac{(-1)^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}}}{1!\,2!\ldots(p-2)!}\{\gamma_{p-1}^{(p)}\}^{p-1}\begin{vmatrix} u_{\varrho_1 0}^{(p-1)} & u_{\varrho_2 0}^{(p-1)} & \cdots & u_{\varrho_{p-1}0}^{(p-1)} \\ u_{\varrho_1 0}^{(p-2)} & u_{\varrho_2 0}^{(p-2)} & \cdots & u_{\varrho_{p-1}0}^{(p-2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{\varrho_1 0}^{(1)} & u_{\varrho_2 0}^{(1)} & \cdots & u_{\varrho_{p-1}0}^{(1)} \end{vmatrix};$$

sie stimmt also bis auf den Faktor $\{\gamma_{p-1}^{(p)}\}^{p-1}$ mit der Determinante D_{p-1} in § 2 überein [vgl. § 2, (9)]. Hieraus folgt, daß die Größen $\alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)}, \alpha_{\varrho_2}^{(m,\eta)}, \ldots, \alpha_{\varrho_{p-1}}^{(m,\eta)}$ genau dieselben Werte haben wie für die in § 2 behandelte Hölдersche Matrix (H_{p-1}). Man entnimmt daher den dortigen Überlegungen, daß die Matrix $(C \to H)_p$ für beliebiges ganzes $p > 1$ der Bedingung (IV) des Hauptsatzes genügt.

2) $(H \to C)_p$. Da auch diese Matrix für $p = 0$ und $p = 1$ die identische Transformation darstellt, darf wieder $p > 1$ vorausgesetzt werden. Bezeichnen wir die Elemente der Matrix mit

$$y_{m\mu}^{(p)} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, m;\ m = 0, 1, 2, \ldots),$$

so ist zu zeigen, daß sich dieselben für kleine positive η und große m geeignet durch Gleichungssysteme

$$(11) \qquad y_{m\mu}^{(p)} = \sum_{\eta m < \varrho \leqq m} \alpha_\varrho^{(m,\eta)}\, y_{\varrho\mu}^{(p)} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, [\eta m])$$

verknüpfen lassen.

Wir wählen zunächst wieder η beliebig aus $0 < \eta < 1$ und dann m so groß, daß die Koeffizientenmatrix des Systems (11) mindestens $p - 1$ Zeilen und Spalten aufweist. Die Matrix hat dann wie im vorhergehenden Falle den Rang $p - 1$. Nach (3) hat irgendeine ihrer Spalten, horizontal angeordnet, die Form

$$(12) \quad \sum_{\lambda=1}^{p} \delta_\lambda^{(p)} \frac{\binom{\varrho+\lambda-1}{\lambda-1}}{\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}}, \quad \sum_{\lambda=1}^{p} \delta_\lambda^{(p)} \frac{\binom{\varrho+\lambda-2}{\lambda-1}}{\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}}, \quad \ldots, \quad \sum_{\lambda=1}^{p} \delta_\lambda^{(p)} \frac{\binom{\varrho+\lambda-1-[\eta m]}{\lambda-1}}{\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}}.$$

Unter Heranziehung der Formeln (4) für die Größen δ:

$$(-1)^{\varkappa-1} \sum_{\lambda=\varkappa+1}^{p} \lambda \binom{\lambda-1}{\varkappa} \delta_\lambda^{(p)} = p!\, d_{p-1-\varkappa}^{(p)} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, p-1)$$

lassen sich die Elemente dieser Spalte erheblich vereinfachen. Dividiert man nämlich die vorstehenden Gleichungen für $\varkappa = 0, 1, \ldots, p-1$ nacheinander durch $\binom{\varrho+1}{1}, 2\binom{\varrho+2}{2}, \ldots, p\binom{\varrho+p}{p}$ und addiert, so erhält man

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \lambda\, \delta_\lambda^{(p)} \sum_{\varkappa=0}^{\lambda-1} (-1)^{\varkappa-1} \frac{\binom{\lambda-1}{\varkappa}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}} = p! \sum_{\varkappa=0}^{p-1} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}}.$$

Da aber[8])

$$\sum_{\varkappa=0}^{\lambda-1} (-1)^{\varkappa-1} \frac{\binom{\lambda-1}{\varkappa}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}} = \sum_{\varkappa=0}^{\lambda-1} (-1)^{\varkappa-1} \frac{\binom{\varrho+\lambda}{\lambda-\varkappa-1}}{\lambda\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}} = -\frac{\binom{\varrho+\lambda-1}{\lambda-1}}{\lambda\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}}$$

---

[8]) Die hier und für die Umformung der weiteren Elemente der Spalte (12) benötigten Formeln

$$\sum_{\varkappa=0}^{\lambda-1} (-1)^{\varkappa} \binom{\varkappa+\sigma}{\sigma} \binom{\varrho+\lambda}{\lambda-\varkappa-1} = \binom{\varrho+\lambda-1-\sigma}{\lambda-1} \qquad (\sigma = 0, 1, 2, \ldots)$$

ergeben sich sogleich durch Vergleich der Potenzreihenentwicklungen beider Seiten von

$$(1+x)^{\varrho+\lambda}\,(1+x)^{-(1+\sigma)} = (1+x)^{\varrho+\lambda-1-\sigma}.$$

ist, so hat man (wenn man noch $d_{p-1}^{(p)} = 0$ beachtet) für das erste Element der Spalte (12) die Darstellung

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \delta_\lambda^{(p)} \frac{\binom{\varrho+\lambda-1}{\lambda-1}}{\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}} = -p! \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}}.$$

Entsprechend folgt für die weiteren Elemente

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \delta_\lambda^{(p)} \frac{\binom{\varrho+\lambda-2}{\lambda-1}}{\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}} = -p! \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \binom{\varkappa+1}{1} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}},$$

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \delta_\lambda^{(p)} \frac{\binom{\varrho+\lambda-3}{\lambda-1}}{\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}} = -p! \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \binom{\varkappa+2}{2} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}},$$

. . . . . .

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \delta_\lambda^{(p)} \frac{\binom{\varrho+\lambda-1-[\eta m]}{\lambda-1}}{\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}} = -p! \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \binom{\varkappa+[\eta m]}{[\eta m]} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}},$$

und damit erhält die Spalte (12), wieder horizontal angeordnet, die Form

$$(13) \quad -p! \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}}, \quad -p! \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \binom{\varkappa+1}{1} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}}, \ldots,$$

$$-p! \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \binom{\varkappa+[\eta m]}{[\eta m]} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}}.$$

Subtrahiert man nun, bei der letzten Zeile beginnend, von jeder Zeile die vorhergehende und wiederholt diesen Prozeß noch weitere $(p-1)$-mal, wobei man das erste Mal bis zur 1. Zeile, das zweite Mal bis zur 2. Zeile geht usw., so geht (13) über in

$$(14) \quad -p! \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \binom{\varkappa-1}{0} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}},$$

$$-p! \sum_{\varkappa=2}^{p-1} \binom{\varkappa-1}{1} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}}, \ldots, \quad -p! \binom{p-2}{p-2} \frac{d_0^{(p)}}{p\binom{\varrho+p}{p}}, \; 0, \ldots, \; 0.$$

Dies zeigt, daß sowohl die Koeffizienten- als auch die Gleichungsmatrix von (11) höchstens den Rang $p-1$ hat; die folgenden Betrachtungen zeigen, daß der Rang genau $p-1$ ist.

Wir wenden uns nun vollends zur Auflösung der Gleichungen (11), von denen wir nur noch die $p-1$ ersten, $(\mu = 0, 1, \ldots, p-2)$, in Betracht zu ziehen brauchen. Dabei fixieren wir eine Lösung so, daß wir zunächst willkürlich $p-1$ Indizes $\varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_{p-1}$ aus $\eta m < \varrho \leqq m$ wählen und

$$\alpha_{\varrho}^{(m,\eta)} = 0 \quad \text{für} \quad \eta m < \varrho \leqq m, \ \varrho \neq \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{p-1}$$

setzen, so daß die restlichen Größen $\alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)}, \alpha_{\varrho_2}^{(m,\eta)}, \ldots, \alpha_{\varrho_{p-1}}^{(m,\eta)}$ den Gleichungen

$$(15) \qquad y_{m\mu}^{(p)} = \alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)} y_{\varrho_1 \mu}^{(p)} + \alpha_{\varrho_2}^{(m,\eta)} y_{\varrho_2 \mu}^{(p)} + \cdots + \alpha_{\varrho_{p-1}}^{(m,\eta)} y_{\varrho_{p-1}\mu}^{(p)}$$
$$(\mu = 0, 1, \ldots, p-2)$$

genügen müssen. Die Determinante dieses Gleichungssystems lautet, wenn gleich die dem Übergang von (12) zu (14) entsprechende Umformung vorgenommen und dann noch, mit der letzten Zeile beginnend, ein geeignetes Vielfaches jeder Zeile von den vorhergehenden abgezogen wird, einfach

$$D_p = (-1)^{p-1} (p!)^{p-2} d_{p-2}^{(p)} d_{p-3}^{(p)} \ldots d_0^{(p)} \begin{vmatrix} \frac{1}{\binom{\varrho_1+2}{2}} & \frac{1}{\binom{\varrho_2+2}{2}} & \cdots & \frac{1}{\binom{\varrho_{p-1}+2}{2}} \\ \frac{1}{\binom{\varrho_1+3}{3}} & \frac{1}{\binom{\varrho_2+3}{3}} & \cdots & \frac{1}{\binom{\varrho_{p-1}+3}{3}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\binom{\varrho_1+p}{p}} & \frac{1}{\binom{\varrho_2+p}{p}} & \cdots & \frac{1}{\binom{\varrho_{p-1}+p}{p}} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante läßt sich, indem die Elemente jeder Spalte auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden, noch umschreiben in

$$D_p = (-1)^{p-1} (p!)^{p-2} \frac{d_{p-2}^{(p)} d_{p-3}^{(p)} \cdots d_0^{(p)}}{\binom{p}{1}\binom{p}{2}\cdots\binom{p}{p-2}} \cdot \frac{\Delta_p}{\binom{\varrho_1+p}{p}\binom{\varrho_2+p}{p}\ldots\binom{\varrho_{p-1}+p}{p}}$$

mit

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} \binom{\varrho_1+p}{p-2} & \binom{\varrho_2+p}{p-2} & \cdots & \binom{\varrho_{p-1}+p}{p-2} \\ \binom{\varrho_1+p}{p-3} & \binom{\varrho_2+p}{p-3} & \cdots & \binom{\varrho_{p-1}+p}{p-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{\varrho_1+p}{0} & \binom{\varrho_2+p}{0} & \cdots & \binom{\varrho_{p-1}+p}{0} \end{vmatrix}$$

und Δ_p, indem man, mit der letzten Zeile beginnend, ein geeignetes Vielfaches jeder Zeile von den vorangehenden abzieht, schließlich in

$$\Delta_p = \frac{1}{1!\,2!\ldots(p-2)!} V_{p-1}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{p-1}),$$

wo $V_{p-1}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{p-1})$ die für die Größen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{p-1}$ gebildete VANDERMONDEsche Determinante bedeutet. Für die zu berechnenden Größen $\alpha_{\varrho_\lambda}^{(m,\eta)}$ ergibt sich damit sofort

$$\alpha_{\varrho_\lambda}^{(m\,\eta)} = \frac{\binom{\varrho_\lambda + p}{p}}{\binom{m+p}{p}} \cdot \frac{V_{p-1}(\varrho_1, \ldots, \varrho_{\lambda-1}, m, \varrho_{\lambda+1}, \ldots, \varrho_{p-1})}{V_{p-1}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{p-1})} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, p-1).$$

Die Größen $\alpha_{\varrho_\lambda}^{(m,\eta)}$ stimmen bis auf den Faktor $\frac{\varrho_\lambda + p}{m+p}$ mit den entsprechenden Größen der CESÀROschen Matrix (C_{p-1}) überein [vgl. § 1, (8)]. Ihre Abschätzung läßt sich daher in derselben Weise wie in § 1 durchführen. Sie zeigt, daß auch die Matrix $(H \to C)_p$ die Bedingung (IV) des Hauptsatzes erfüllt.

(Eingegangen am 9. April 1942.)

Über die Existenz periodischer Lösungen bei gewissen Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.

Herrn KONRAD KNOPP
zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

Max Müller in Tübingen.

Die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ kann, muß aber nicht Integrale mit der Periode ω besitzen, wenn die Funktion $f(x, y)$ die Periodizitätsbedingung

$$f(x + \omega, y) = f(x, y)$$

erfüllt. Das zeigen schon die allereinfachsten Beispiele:

Bei der Gleichung $y' = \cos x$ haben sämtliche Integrale $y = C + \sin x$ die Periode 2π; bei der Gleichung $y' = y$ hat für beliebiges $\omega > 0$ nur das Integral $y \equiv 0$ die Periode ω, während alle übrigen Integrale $y = Ce^x (C \neq 0)$ unperiodisch sind; die Differentialgleichung $y' = 1$ schließlich hat kein einziges periodisches Integral, obwohl ihre rechte Seite $f(x, y) \equiv 1$ die obige Periodizitätsbedingung für jedes $\omega > 0$ erfüllt.

Die Frage, wann eine Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, deren rechte Seite die genannte Periodizitätsbedingung befriedigt, wenigstens ein Integral besitzt, das ebenfalls die Periode ω hat, scheint in der Literatur noch nicht behandelt zu sein. Mir ist lediglich eine Arbeit von N. W. ADAMOFF bekannt, in der gezeigt wird, daß ein gewisses Iterationsverfahren unter gewissen Voraussetzungen, deren Erfülltsein überdies im Einzelfall nur mühsam festgestellt werden kann, ein Integral mit der Periode ω liefert, falls es überhaupt solche Integrale gibt[1]).

In der vorliegenden Arbeit soll — sogleich für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen — eine recht allgemeine Bedingung angegeben werden, die die Existenz mindestens eines periodischen Integrales sicherstellt. Dieses Integral wird mittels eines Verfahrens schrittweiser Näherungen gewonnen, das eine Verallgemeinerung des von Herrn ADAMOFF angegebenen Iterationsverfahrens ist.

---

[1]) N. W. ADAMOFF. Sur la recherche des solutions périodiques d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre par la méthode des approximations successives. Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS. 19 (1938), S. 17—22.

§ 1.

Der allgemeine Satz.

Wir werden folgenden Satz beweisen:

Die Funktionen $y_{10}(x), \ldots, y_{m0}(x)$ *sollen für* $-\infty < x < \infty$ *stetige Ableitungen erster Ordnung besitzen und die Periode* ω *haben. In dem Bereich*

$$\mathfrak{S}: -\infty < x < \infty,\ y_{\lambda 0}(x) - a \leqq y_\lambda \leqq y_{\lambda 0}(x) + a\ (\lambda = 1, \ldots, m;\ a > 0)$$

seien die Funktionen $f_1(x, y_1, \ldots, y_m), \ldots, f_m(x, y_1, \ldots, y_m)$ *stetig und den folgenden Bedingungen unterworfen:*

a) *Es sei*

$$f_\mu(x + \omega, y_1, \ldots, y_m) = f_\mu(x, y_1, \ldots, y_m) \quad (\mu = 1, \ldots, m). \tag{1}$$

b) *Es sei für je zwei Stellen* $(x, y_1, \ldots, y_m)$ *und* $(x, z_1, \ldots, z_m)$ *aus* $\mathfrak{S}$ *und* $\mu = 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned} &|f_\mu(x, y_1, \ldots, y_m) - f_\mu(x, z_1, \ldots, z_m) + p_\mu(x)\,(y_\mu - z_\mu)| \\ &\qquad \leqq l_\mu(x) \max_{\lambda = 1, \ldots, m} |y_\lambda - z_\lambda|, \end{aligned} \tag{2}$$

wobei $p_\mu(x)$ *für alle* x *stetig,* $l_\mu(x)$ *für alle* x *nicht negativ und über das Intervall* $0 \leqq x \leqq \omega$ *(wenigstens uneigentlich) integrierbar,*

$$p_\mu(x + \omega) = p_\mu(x), \quad l_\mu(x + \omega) = l_\mu(x), \tag{3}$$

$$\int_0^\omega p_\mu(t)\,dt \neq 0 \tag{4}$$

ist.

Es werde

$$P_\mu(x) = \int_0^x p_\mu(t)\,dt, \tag{5}$$

$$\alpha_\mu(x) = e^{-P_\mu(x)} \left\{ \int_0^x e^{P_\mu(t)}\, l_\mu(t)\,dt + \frac{1}{|e^{P_\mu(\omega)} - 1|} \int_0^\omega e^{P_\mu(t)}\, l_\mu(t)\,dt \right\}, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon = \max_{\mu = 1, \ldots, m} \max_{0 \leqq x \leqq \omega} \Bigg| e^{-P_\mu(x)} \Bigg\{ \int_0^x e^{P_\mu(t)} \left[f_\mu(t, y_{10}(t), \ldots, y_{m0}(t)) - y'_{\mu 0}(t) \right] dt + \\ + \frac{1}{e^{P_\mu(\omega)} - 1} \int_0^\omega e^{P_\mu(t)} \left[f_\mu(t, y_{10}(t), \ldots, y_{m0}(t)) - y'_{\mu 0}(t) \right] dt \Bigg\} \Bigg| \text{ [2]} \end{aligned} \tag{7}$$

gesetzt.

Gibt es dann eine Konstante q *derart, daß*

$$0 \leqq \alpha_\mu(x) \leqq q < 1 \quad \text{für } 0 \leqq x \leqq \omega,\ \mu = 1, 2, \ldots, m, \tag{8}$$

$$\frac{\varepsilon}{1 - q} \leqq a, \tag{9}$$

---

[2]) ε ist ein Maß dafür, wie gut bereits die Funktionen $y_{10}(x), \ldots, y_{m0}(x)$ das Differentialgleichungssystem (10) befriedigen.

so hat das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$y'_\mu = f_\mu(x, y_1, \ldots, y_m) \qquad (\mu = 1, \ldots, m) \tag{10}$$

mindestens ein Integral

$$y_1 = y_1(x), \ldots, y_m = y_m(x)$$

mit der Periodizitätseigenschaft

$$y_\mu(x + \omega) = y_\mu(x) \qquad (\mu = 1, \ldots, m). \tag{11}$$

Dasselbe verläuft in $\mathfrak{S}$ und wird aus den Funktionen $y_{10}(x), \ldots, y_{m0}(x)$ durch den Iterationsprozeß

$$y_{\mu,n+1}(x) = y_{\mu n}(x) + e^{-P_\mu(x)}\left\{\int_0^x e^{P_\mu(t)}\left[f_\mu(t, y_{1n}(t), \ldots, y_{mn}(t)) - y'_{\mu n}(t)\right]dt + \right. \tag{12}$$

$$\left. + \frac{1}{e^{P_\mu(\omega)} - 1}\int_0^\omega e^{P_\mu(t)}\left[f_\mu(t, y_{1n}(t), \ldots, y_{mn}(t)) - y'_{\mu n}(t)\right]dt\right\}$$

$$(\mu = 1, \ldots, m;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

gewonnen[3]).

Beweis. Wir überzeugen uns zunächst, daß die Funktionensysteme

$$\mathfrak{y}_n(x) = (y_{1n}(x), \ldots, y_{mn}(x)) \tag{13}$$

für alle Nummern n berechnet werden können und die folgenden Eigenschaften haben: Jedes $y_{\mu n}(x)$ ist für alle x stetig differentiierbar, hat die Periode ω und genügt der Ungleichung

$$y_{\mu 0}(x) - a \leqq y_{\mu n}(x) \leqq y_{\mu 0}(x) + a. \tag{14}$$

Für $n = 0$ trifft dies auf Grund der Voraussetzungen über die Funktionen $y_{\mu 0}(x)$ zu. Haben aber alle Funktionen $y_{\mu\nu}(x)$, deren zweite Fußmarke $\nu \leqq n$ ist, diese Eigenschaften, so sind nach (14) und (5) die Integranden in (12) definiert und stetig; da nach (4) der Nenner $e^{P_\mu(\omega)} - 1 \neq 0$ ist, können also die Funktionen $y_{\mu,n+1}(x)$ nach der Vorschrift (12) berechnet werden; sie sind für alle x stetig und auch stetig differentiierbar, weil nach Voraussetzung $P_\mu(x)$ die stetige Ableitung $p_\mu(x)$ hat.

Sie haben auch die Periode ω; denn wird zur Abkürzung

$$h_{\mu n} = \int_0^\omega e^{P_\mu(t)}\left[f_\mu(t, \mathfrak{y}_n(t)) - y'_{\mu n}(t)\right]dt$$

gesetzt und die aus (5) und (3) folgende Beziehung

$$P_\mu(x + \omega) = \int_0^\omega p_\mu(t)\,dt + \int_\omega^{\omega + x} p_\mu(t)\,dt = P_\mu(\omega) + \int_0^x p_\mu(t)\,dt = P_\mu(\omega) + P_\mu(x)$$

[3]) Das ADAMOFFsche Iterationsverfahren ist für $n = 1$ der Sonderfall $p(x) = k$, wo k eine positive Konstante ist, also $P(x) = kx$.

beachtet, so folgt aus den Induktionsannahmen und aus (1), daß

$$y_{\mu,n+1}(x+\omega)$$

$$= y_{\mu n}(x) + e^{-P_\mu(x)-P_\mu(\omega)}\left\{\int_0^{x+\omega} e^{P_\mu(t)}\left[f_\mu(t,\mathfrak{y}_n(t)) - y'_{\mu n}(t)\right]dt + \frac{h_{\mu n}}{e^{P_\mu(\omega)}-1}\right\}$$

$$= y_{\mu n}(x) + e^{-P_\mu(x)-P_\mu(\omega)}\left\{h_{\mu n} + \int_\omega^{\omega+x} e^{P_\mu(t)}\left[f_\mu(t,\mathfrak{y}_n(t)) - y'_{\mu n}(t)\right]dt + \frac{h_{\mu n}}{e^{P_\mu(\omega)}-1}\right\}$$

$$= y_{\mu n}(x) + e^{-P_\mu(x)-P_\mu(\omega)}\left\{\int_0^{x} e^{P_\mu(\tau+\omega)}\left[f_\mu(\tau+\omega,\mathfrak{y}_n(\tau+\omega)) - y'_{\mu n}(\tau+\omega)\right]d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{h_{\mu n}e^{P_\mu(\omega)}}{e^{P_\mu(\omega)}-1}\right\}$$

$$= y_{\mu n}(x) + e^{-P_\mu(x)}\left\{\int_0^{x} e^{P_\mu(\tau)}\left[f_\mu(\tau,\mathfrak{y}_n(\tau)) - y'_{\mu n}(\tau)\right]d\tau + \frac{h_{\mu n}}{e^{P_\mu(\omega)}-1}\right\}$$

$$= y_{\mu,n+1}(x).$$

Ferner ist nach (12) und (5) für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $\mu = 1, \ldots, m$

$$y'_{\mu,\nu+1}(x) = y_{\mu\nu}(x) + f_\mu(x,\mathfrak{y}_\nu(x)) - y'_{\mu\nu}(x) -$$

$$- P'_\mu(x)e^{-P_\mu(x)}\left\{\int_0^{x} e^{P_\mu(t)}\left[f_\mu(t,\mathfrak{y}_\nu(t)) - y'_{\mu\nu}(t)\right]dt + \frac{h_{\mu\nu}}{e^{P_\mu(\omega)}-1}\right\}$$

$$= f_\mu(x,\mathfrak{y}_\nu(x)) - p_\mu(x)\left[y_{\mu,\nu+1}(x) - y_{\mu\nu}(x)\right].$$

Ersetzt man hierin ν durch $\nu-1$, so ergibt sich, daß für $\nu = 1, 2, \ldots, n$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$

$$y'_{\mu\nu}(x) = f_\mu(x,\mathfrak{y}_{\nu-1}(x)) - p_\mu(x)\left[y_{\mu\nu}(x) - y_{\mu,\nu-1}(x)\right]. \tag{15}$$

Trägt man dies in (12) ein, so bekommt man

$$y_{\mu,\nu+1}(x) - y_{\mu\nu}(x)$$

$$= e^{-P_\mu(x)}\left\{\int_0^{x} e^{P_\mu(t)}\left[f_\mu(t,\mathfrak{y}_\nu(t)) - f_\mu(t,\mathfrak{y}_{\nu-1}(t)) + p_\mu(t)\left[y_{\mu\nu}(t) - y_{\mu,\nu-1}(t)\right]\right]dt + \right.$$

$$+ \frac{1}{e^{P_\mu(\omega)}-1}\int_0^{\omega} e^{P_\mu(t)}\left[f_\mu(t,\mathfrak{y}_\nu(t)) - f_\mu(t,\mathfrak{y}_{\nu-1}(t)) + \right.$$

$$\left.\left. + p_\mu(t)\left[y_{\mu\nu}(t) - y_{\mu,\nu-1}(t)\right]\right]dt\right\}.$$

Mit Rücksicht auf (2) ist also für $0 \leqq x \leqq \omega$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$|y_{\mu,\nu+1}(x) - y_{\mu\nu}(x)| \tag{16}$$

$$\leqq e^{-P_\mu(x)}\left\{\int_0^{x} e^{P_\mu(t)} l_\mu(t) \max_{\lambda=1,\ldots,m} |y_{\lambda\nu}(t) - y_{\lambda,\nu-1}(t)|\,dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{|e^{P_\mu(\omega)}-1|}\int_0^{\omega} e^{P_\mu(t)} l_\mu(t) \max_{\lambda=1,\ldots,m} |y_{\lambda\nu}(t) - y_{\lambda,\nu-1}(t)|\,dt\right\}.$$

Nun aber ist nach (12), angewandt für $n = 0$, und nach (7) für $0 \leqq x \leqq \omega$, $\lambda = 1, 2, \ldots, m$

$$|y_{\lambda 1}(x) - y_{\lambda 0}(x)| \leqq \varepsilon, \tag{17}$$

also nach (16), (6) und (8) für $0 \leqq x \leqq \omega$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$|y_{\mu,\nu+1}(x) - y_{\mu\nu}(x)| \leqq \varepsilon q^{\nu}, \tag{18}$$

mithin, wenn man (9) beachtet,

$$\begin{aligned} &|y_{\mu,n+1}(x) - y_{\mu 0}(x)| \\ &\leqq |y_{\mu 1}(x) - y_{\mu 0}(x)| + |y_{\mu 2}(x) - y_{\mu 1}(x)| + \cdots + |y_{\mu,n+1}(x) - y_{\mu n}(x)| \\ &\leqq \varepsilon (1 + q + \cdots + q^{n}) \leqq \frac{\varepsilon}{1-q} \leqq a, \end{aligned}$$

d. h. auch

$$y_{\mu 0}(x) - a \leqq y_{\mu,n+1}(x) \leqq y_{\mu 0}(x) + a$$

für $0 \leqq x \leqq \omega$. Weil alle auftretenden Funktionen die Periode ω haben, gilt diese Ungleichung nachträglich für alle x.

Die Funktionen $y_{\mu,n+1}(x)$ haben also ebenfalls die Eigenschaften, die wir beim Induktionsschluß benutzten. Daher können alle Funktionensysteme (13) berechnet werden; alle Funktionen $y_{\mu n}(x)$ sind für $-\infty < x < \infty$ stetig differentiierbar, haben die Periode ω und erfüllen die Ungleichungen (14). Überdies gilt nach (17) und (18) für alle x die Ungleichung

$$|y_{\mu n}(x) - y_{\mu,n-1}(x)| \leqq \varepsilon q^{n-1} \qquad (\mu = 1, \ldots, m;\ n = 1, 2, \ldots). \tag{19}$$

Aus (19) folgt jetzt weiter, weil $q < 1$ ist, daß jede der m Reihen

$$y_{\mu 0}(x) + [y_{\mu 1}(x) - y_{\mu 0}(x)] + [y_{\mu 2}(x) - y_{\mu 1}(x)] + \cdots$$

für alle x gleichmäßig konvergiert. Es existieren daher die Grenzfunktionen

$$\lim_{n \to \infty} y_{\mu n}(x) = y_{\mu}(x) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m); \tag{20}$$

sie sind stetig, haben die Periode ω und erfüllen nach (14) die Ungleichungen

$$y_{\mu 0}(x) - a \leqq y_{\mu}(x) \leqq y_{\mu 0}(x) + a \qquad (\mu = 1, \ldots, m). \tag{21}$$

Nach (15) ist

$$\begin{aligned} y_{\mu n}(x) = y_{\mu n}(0) &+ \int_0^x f_{\mu}(t, y_{1,n-1}(t), \ldots, y_{m,n-1}(t))\, dt - \\ &- \int_0^x p_{\mu}(t)\, [y_{\mu n}(t) - y_{\mu,n-1}(t)]\, dt. \end{aligned} \tag{22}$$

Da $p_{\mu}(t)$ stetig und periodisch, also beschränkt ist, und (19) gilt, ferner nach (14) für jede Nummer n die Stelle $(t, y_{1,n-1}(t), \ldots, y_{m,n-1}(t))$ und nach (21) auch

die Stelle $(t, y_1(t), \ldots, y_m(t))$ dem Gebiet $\mathfrak{S}$ angehört, in welchem infolge der Periodizitätsvoraussetzung (1) die Funktionen f_μ sogar gleichmäßig stetig sind, ergibt sich aus (22) beim Grenzübergang $n \to \infty$, daß

$$y_\mu(x) = y_\mu(0) + \int_0^x f_\mu(t, y_1(t), \ldots, y_m(t))\, dt \qquad (\mu = 1, \ldots, m).$$

Weil hier die Integranden stetig sind, sind die Funktionen $y_\mu(x)$ für alle x auch differentiierbar; es ist

$$y'_\mu(x) = f_\mu(x, y_1(x), \ldots, y_m(x)) \qquad (\mu = 1, \ldots, m);$$

die Funktionen $y_\mu(x)$ bilden also ein Integral des Differentialgleichungssystems (10) mit der Periodizitätseigenschaft (11).

Damit ist der Satz bewiesen.

§ 2.

Bemerkungen zu den Voraussetzungen und Sonderfälle.

Hat f_μ in $\mathfrak{S}$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, so ist für eine geeignet gewählte Zwischenstelle $(x, \eta_1, \ldots, \eta_m)$

$$f_\mu(x, y_1, \ldots, y_m) - f_\mu(x, z_1, \ldots, z_m) = \sum_{\lambda=0}^{m} \frac{\partial f_\mu}{\partial y_\lambda}(x, \eta_1, \ldots, \eta_m)\,(y_\lambda - z_\lambda),$$

also für jede stetige Funktion $p_\mu(x)$, die die Bedingungen (3) und (4) erfüllt,

$$f_\mu(x, y_1, \ldots, y_m) - f_\mu(x, z_1, \ldots, z_m) + p_\mu(x)\,(y_\mu - z_\mu)$$

$$= \sum_{\lambda \neq \mu} \frac{\partial f_\mu}{\partial y_\lambda}(x, \eta_1, \ldots, \eta_m)\,(y_\lambda - z_\lambda) + \left[\frac{\partial f_\mu}{\partial y_\mu}(x, \eta_1, \ldots, \eta_m) + p_\mu(x)\right](y_\mu - z_\mu).$$

Da die Funktion f_μ die Periodizitätseigenschaft (1) hat, kann man auch jedes $\eta_\lambda = \eta_\lambda(x, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_m)$ so wählen, daß es in bezug auf x die Periode ω hat. Daher gibt es eine Funktion $S_\mu(x)$, die stetig ist und die Periode ω hat, so daß

$$\left|\frac{\partial f_\mu}{\partial y_\lambda}(x, \eta_1, \ldots, \eta_m)\right| \leqq S_\mu(x) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, m;\ \lambda \neq \mu),$$

$$\left|\frac{\partial f_\mu}{\partial y_\mu}(x, \eta_1, \ldots, \eta_m) + p_\mu(x)\right| \leqq S_\mu(x)$$

und daher

$$|f_\mu(x, y_1, \ldots, y_m) - f_\mu(x, z_1, \ldots, z_m) + p_\mu(x)\,(y_\mu - z_\mu)|$$

$$\leqq S_\mu(x) \sum_{\lambda=1}^{m} |y_\lambda - z_\lambda| \leqq m S_\mu(x) \max_{\lambda=1,\ldots,m} |y_\lambda - z_\lambda|.$$

Die Voraussetzung (2) ist also gewiß mit $l_\mu(x) = m S_\mu(x)$ erfüllt. Damit möglichst auch die Voraussetzung (8) erfüllt ist, wird man die Funktion $p_\mu(x)$

hierbei so zu wählen suchen, daß das nach (6) berechnete $\alpha_\mu(x)$ möglichst klein bleibt.

Ist $p_\mu(x) \geqq 0$ und gibt es eine nicht-negative Konstante L_μ derart, daß

$$|f_\mu(x, y_1, \ldots, y_m) - f_\mu(x, z_1, \ldots, z_m) + p_\mu(x)(y_\mu - z_\mu)| \leqq L_\mu p_\mu(x) \operatorname*{Max}_{\lambda=1,\ldots,m} |y_\lambda - z_\lambda|,$$

so kann $l_\mu(x) = L_\mu p_\mu(x)$ gesetzt werden; es wird $\alpha_\mu(x) = L_\mu$; die Bedingung (8) bedeutet dann, daß $L_\mu < 1$ sein soll.

Ist aber $p_\mu(x) \leqq 0$ und gibt es eine nicht-negative Konstante L_μ derart, daß

$$|f_\mu(x, y_1, \ldots, y_m) - f_\mu(x, z_1, \ldots, z_m) + p_\mu(x)(y_\mu - z_\mu)| \leqq -L_\mu p_\mu(x) \operatorname*{Max}_{\lambda=1,\ldots,m} |y_\lambda - z_\lambda|,$$

so kann $l_\mu(x) = -L_\mu p_\mu(x)$ gesetzt werden; es wird

$$\alpha_\mu(x) = L_\mu(2\, e^{-P_\mu(x)} - 1),$$

und die Bedingung (8) ist erfüllt, wenn zwischen $p_\mu(x)$ und L_μ die Beziehung

$$L_\mu(2\, e^{-P_\mu(\omega)} - 1) < 1$$

besteht.

Für $n = 1$ kann die Bedingung (2) unter Weglassung entbehrlicher Fußmarken geschrieben werden:

$$|f(x, y) - f(x, z) + p(x)(y - z)| \leqq l(x)\,|y - z|;$$

sie besagt also, daß für $y \neq z$

$$-p(x) - l(x) \leqq \frac{f(x, y) - f(x, z)}{y - z} \leqq -p(x) + l(x) \tag{23}$$

sein soll. Da $l(x)$ nicht beschränkt zu sein braucht, verlangt sie in gewisser Hinsicht weniger als die übliche Lipschitz-Bedingung, die Beschränktheit des Differenzenquotienten bedeutet. In anderer Hinsicht verlangt die Bedingung (2) mehr als die gewöhnliche Lipschitz-Bedingung: Nach (23) muß

$$\frac{f(x, y) - f(x, z)}{y - z} = -p(x) + \theta(x, y, z)\, l(x)$$

sein, wo $|\theta(x, y, z)| \leqq 1$. Dabei sind $p(x)$ und $l(x)$ an die Bedingungen (4) und

$$e^{-P(x)} \left\{ \int_0^x e^{P(t)} l(t)\, dt + \frac{1}{|e^{P(\omega)} - 1|} \int_0^\omega e^{P(t)} l(t)\, dt \right\} \leqq q < 1 \tag{24}$$

gebunden. Man kann also im Fall $n = 1$ die Bedingungen (2), (4) und (8) so deuten: Der Differenzenquotient von $f(x, y)$ in bezug auf y soll „im Durchschnitt" [siehe (24)] nicht zu sehr abweichen von einer Funktion $-p(x)$, deren Mittelwert im Periodenintervall von Null verschieden ist [siehe (4)].

Für $p(x) \geqq 0$, $l(x) = Lp(x)$ geht (23) über in

$$-(1+L)\,p(x) \leqq \frac{f(x,y)-f(x,z)}{y-z} \leqq -(1-L)\,p(x). \tag{25}$$

Daraus folgt insbesondere: Ist $f(x, y)$ in der ganzen (x, y)-Ebene stetig, $f(x+\omega, y) = f(x, y)$, gibt es eine Konstante L mit $0 \leqq L < 1$ und eine stetige Funktion $p(x)$ mit der Periode ω, die (4) erfüllt, derart, daß (25) gilt, so hat die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mindestens ein Integral mit der Periode ω. Die Bedingung (25) besagt aber im wesentlichen, daß $f(x, y)$ einen beschränkten Differenzenquotienten in bezug auf y haben, eine nicht steigende Funktion von y und „im Mittel für alle x eines Periodenintervalles" sogar eine abnehmende Funktion von y sein soll.

Daß die Bedingung (4) nicht entbehrt werden kann, lehrt das dritte der eingangs erwähnten Beispiele; denn bei dieser Differentialgleichung $y' = 1$ sind mit $p(x) = l(x) = 0$ die Bedingungen (23) und (24), aber nicht die Bedingung (4) erfüllt. Dieses Beispiel zeigt aber auch, daß zur Bedingung (4) noch eine Bedingung über $l(x)$, wie etwa die Bedingung (24), hinzutreten muß, damit der Satz richtig bleibt; mit $p(x) = l(x) = |\sin x|$ sind nämlich die Bedingungen (23) und (4) erfüllt, ohne daß periodische Integrale vorhanden sind.

(Eingegangen am 21. Januar 1942.)

Über eine für die Invariantentheorie wichtige Funktionalgleichung.

Herrn Konrad Knopp
zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

Oskar Perron in München.

Bezeichnungen.

In dieser Arbeit sind n und ν zwei fest gegebene natürliche Zahlen. Mit großen lateinischen Buchstaben werden n-reihige quadratische Matrizes bezeichnet, mit den entsprechenden kleinen Buchstaben und zwei unteren Indizes ihre Elemente. Mit großen griechischen Buchstaben, die eventuell noch mit oberen Indizes versehen sind, werden ν-reihige quadratische Matrizes bezeichnet, mit den entsprechenden kleinen Buchstaben und zwei unteren Indizes ihre Elemente. Gelegentlich vorkommende Matrizes mit anderen Zeilen- und Spaltenzahlen, auch nichtquadratische, werden mit großen, und ihre Elemente mit den entsprechenden kleinen deutschen Buchstaben bezeichnet. Also z. B.:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{pq} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{pq} & \cdots & \alpha_{1\nu}^{pq} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\nu 1}^{pq} & \cdots & \alpha_{\nu\nu}^{pq} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_{11} & \cdots & \mathfrak{a}_{1\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathfrak{a}_{\nu 1} & \cdots & \mathfrak{a}_{\nu\nu} \end{pmatrix}.$$

Die Elemente aller Matrizes sind komplexe Zahlen.

Die n bzw. ν-reihige quadratische Einheitsmatrix wird mit E bzw. E, jede Nullmatrix, auch nichtquadratische, einfach durch das Zahlzeichen 0 bezeichnet, was zu keiner Verwechslung Anlaß geben wird. Entsprechend den Zeichen E und E sind unter e_{rs} und $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ Kroneckersymbole zu verstehen:

$$e_{rs} = \begin{cases} 1 \text{ für } r = s \\ 0 \text{ für } r \neq s \end{cases} \qquad (r, s = 1, \ldots, n),$$

$$\varepsilon_{\varrho\sigma} = \begin{cases} 1 \text{ für } \varrho = \sigma \\ 0 \text{ für } \varrho \neq \sigma \end{cases} \qquad (\varrho, \sigma = 1, \ldots, \nu).$$

Die Determinante einer quadratischen Matrix wird durch zwei Striche bezeichnet: $|X|$, $|\mathsf{A}^{pq}|$.

Das Zeichen $\Phi(X)$ bedeutet, daß die Matrix Φ eine Funktion der Matrix X ist, d. h., daß die ν^2 Elemente $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \ldots, \varphi_{\nu\nu}$ Funktionen der n^2 komplexen

Variabeln $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}$ sind. Kleine Buchstaben ohne oder mit nur *einem* unteren Index werden gelegentlich als Zahl- oder Funktionszeichen gebraucht; z. B. bedeutet $\varphi(X)$ eine Funktion der Matrix X, d. h. der n^2 Variabeln $x_{11}, \ldots, x_{nn}$.

§ 1.

Einleitung.

Wenn man eine n-äre Form durch eine Matrix X linear transformiert, entsteht eine neue Form. Bezeichnet man als Invariante der alten Form ein Polynom ihrer Koeffizienten, das nach Ersetzung der alten Koeffizienten durch die neuen sich mit einem lediglich von der Transformationsmatrix X abhängigen Faktor $\varphi(X)$ multipliziert, so muß dieser Faktor bekanntlich eine Potenz der Determinante $|X|$ sein. Man sieht das sofort ein, wenn man zwei lineare Transformationen hintereinander ausführt. Dann ergibt sich nämlich für $\varphi(X)$ die Funktionalgleichung

$$\varphi(Y)\,\varphi(X) = \varphi(XY). \tag{1}$$

Hieraus folgt zunächst für $Y = E$, da $\varphi(X)$ nicht identisch verschwindet,

$$\varphi(E) = 1 \tag{2}$$

und sodann für $Y = X^{-1}$

$$\varphi(X^{-1})\,\varphi(X) = \varphi(E) = 1 \tag{3}$$

Nun ist $\varphi(X)$ ein Polynom von $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}$, daher $|X|^r\varphi(X^{-1})$, wenn r genügend groß ist, ebenfalls ein Polynom dieser Variabeln. Somit folgt aus (3) nach Multiplikation mit $|X|^r$, daß $\varphi(X)$ ein Teiler von $|X|^r$, also wegen der Irreduzibilität von $|X|$ selbst eine Potenz von $|X|$ ist, multipliziert mit einer Konstanten, die wegen (2) gleich 1 sein muß. W. z. b. w. Aber auch, wenn man für $\varphi(X)$ nicht nur Polynome, sondern beliebige in der Umgebung von $X = E$ analytische Funktionen zuläßt, hat die Funktionalgleichung (1), wie wir sehen werden, keine anderen Lösungen als $\varphi(X) = |X|^\alpha$, wobei dann aber α eine beliebige komplexe Zahl sein darf (Satz 12).

Bezeichnet man allgemeiner als „Invarianzverein" der alten Form ein System von ν Polynomen ihrer Koeffizienten, das nach Ersetzung der alten Koeffizienten durch die neuen sich linear transformiert, wobei die ν-reihige Transformationsmatrix lediglich von der Matrix X abhängt, also eine Funktion $\Phi(X)$ ist[1]), so ergibt sich analog zu (1) die Funktionalgleichung

$$\Phi(Y)\Phi(X) = \Phi(XY). \tag{4}$$

---

[1]) Auf die noch nicht entwickelte Theorie der Invarianzvereine soll hier nicht weiter eingegangen werden. Als Beispiel sei nur erwähnt, daß die Koeffizienten einer Kovariante stets einen Invarianzverein bilden.

Nicht wesentlich davon verschieden ist die Funktionalgleichung

$$\Phi(X)\,\Phi(Y) = \Phi(X\,Y). \tag{5}$$

Denn bezeichnet man die zu Φ bzw. X transponierte Matrix mit Φ' bzw. X' und setzt man $\Phi(X) = \Psi(X')$, so ist (4) gleichbedeutend mit

$$\Phi'(X)\,\Phi'(Y) = \Phi'(X\,Y)$$

und auch mit

$$\Psi(Y')\,\Psi(X') = \Psi(Y'\,X') \text{ oder also mit } \Psi(X')\,\Psi(Y') = \Psi(X'\,Y').$$

Daher geht jede Lösung von (4) in eine Lösung von (5) über und umgekehrt, wenn man Φ durch Φ', also $\varphi_{\varrho\sigma}$ durch $\varphi_{\sigma\varrho}$ ersetzt; ebenso, wenn man X durch X', also $x_{\tau\varkappa}$ durch $x_{\varkappa\tau}$ ersetzt.

Die Funktionalgleichung (5) ist es, die wir im folgenden behandeln wollen. Da Φ eine ν-reihige Matrix ist, so handelt es sich in Wahrheit um ein System von ν^2 Funktionalgleichungen für die ν^2 Funktionen $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \ldots, \varphi_{\nu\nu}$. Für die Theorie der Invarianzvereine interessieren natürlich nur Lösungen, die Polynome von $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}$ sind, insbesondere homogene. Wir werden aber überhaupt Lösungen $\Phi(X)$ suchen, die in der Umgebung von $X = E$ analytisch sind, d. h., die sich nach Potenzen der n^2 Variabeln $x_{\varrho\sigma} - e_{\varrho\sigma}$ entwickeln lassen.

§ 2.

Triviale Lösungen. Reduzible und irreduzible Lösungen.

Satz 1. *Die Gleichung* (5) *hat unter anderen die konstanten Lösungen* $\Phi(X) = \mathsf{E}$ *und* $\Phi(X) = 0$.

Satz 2. *Ist* $\Phi(X)$ *eine Lösung der Gleichung* (5) *und* Γ *eine konstante Matrix mit* $|\Gamma| \neq 0$, *so ist* $\Gamma^{-1}\,\Phi(X)\,\Gamma$ *ebenfalls eine Lösung.*

Insbesondere ergibt sich, wenn man in einer Lösung $\Phi(X)$ die Zeilen und Spalten in gleicher Weise permutiert, wieder eine Lösung, weil ja jede solche Permutation durch hintere und vordere Multiplikation mit einer Matrix Γ und ihrer reziproken bewirkt werden kann.

Satz 3. *Ist* $\Phi(X)$ *eine Lösung der Gleichung* (5) *und* C *eine konstante Matrix mit* $|C| \neq 0$, *so ist* $\Phi(C^{-1}\,X\,C)$ *ebenfalls eine Lösung.*

Insbesondere ergibt sich, wenn man in einer Lösung $\Phi(X)$ die vorderen und hinteren Indizes der $x_{\varrho\sigma}$ in gleicher Weise permutiert, wieder eine Lösung.

Satz 4. *Ist* $\Phi(X)$ *eine Lösung von* (5), *so ist* $|X|^{\alpha}\,\Phi(X) = e^{\alpha \log |X|}\,\Phi(X)$, *wo* α *irgendeine komplexe Zahl ist, ebenfalls eine Lösung. Nach Satz* 1 *ist also insbesondere* $\Phi(X) = |X|^{\alpha}\,\mathsf{E}$ *eine Lösung.*

Satz 5. *Die Gleichung* (5) *hat u. a. die Lösung*

$$\Phi(X) = |X|^{\mathsf{A}} = e^{\mathsf{A}\log|X|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{A}\log|X|)^k}{k!},$$

wobei A *irgendeine konstante Matrix ist. Speziell für* $\mathsf{A} = \alpha\,\mathsf{E}$ *ist das die schon in Satz* 4 *angegebene Lösung.*

Die Beweise dieser Sätze sind evident.

Zwei Lösungen $\Phi^1(X)$ und $\Phi^2(X)$, die in der Beziehung $\Phi^2(X) = \Gamma^{-1}\Phi^1(X)\Gamma$ stehen (Satz 2), heißen *äquivalent*. Dieser Äquivalenzbegriff ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. Auch an Satz 3 läßt sich ein entsprechender Äquivalenzbegriff anschließen, den wir aber nicht gebrauchen werden.

Wir zerlegen jetzt ν irgendwie in zwei Summanden: $\nu = \varrho + \sigma$. Ist $\mathfrak{A}(X)$ eine ϱ-reihige, $\mathfrak{B}(X)$ eine σ-reihige quadratische Matrix und ist

$$\mathfrak{A}(X)\,\mathfrak{A}(Y) = \mathfrak{A}(XY), \qquad \mathfrak{B}(X)\mathfrak{B}(Y) = \mathfrak{B}(XY),$$

so stellt die ν-reihige Matrix

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}(X) & 0 \\ 0 & \mathfrak{B}(X) \end{pmatrix} \tag{6}$$

offenbar eine Lösung von (5) dar. Eine solche Lösung und jede damit äquivalente heißt *reduzibel*, jede andere heißt *irreduzibel*. Hiernach sind, wenn man für jede kleinere Reihenzahl als ν bereits alle Lösungen unserer Funktionalgleichung kennt, auch für ν Reihen bereits alle reduzibeln Lösungen bekannt, so daß nur noch die irreduzibeln interessieren.

Um die Gewinnung irreduzibler Lösungen vorzubereiten, setzen wir in (5) zuerst $Y = E$, sodann $X = E$; dadurch kommt

$$\Phi(X)\Phi(E) = \Phi(X), \qquad \Phi(E)\Phi(Y) = \Phi(Y), \tag{7}$$

also insbesondere auch

$$\Phi(E)\Phi(E) = \Phi(E). \tag{8}$$

Aus (7) folgt, wenn $\Phi(X)$ nicht identisch verschwindet, im Fall $\nu = 1$ die Gleichung (2) (mit Φ an Stelle von φ). Im Fall $\nu > 1$ braucht aber die analoge Gleichung $\Phi(E) = \mathsf{E}$ nicht zu gelten. Wenn man nämlich eine Lösung unserer Funktionalgleichung mit $\nu - 1$ an Stelle von ν betrachtet und wenn man diese $(\nu - 1)$-reihige Matrix durch Einschaltung einer in der Diagonale sich kreuzenden Zeile und Spalte mit lauter Nullen zu einer ν-reihigen Matrix $\Phi(X)$ ergänzt, so ist $\Phi(X)$ offenbar eine (reduzible) Lösung von (5), weil sie nach eventueller Permutation der Zeilen und Spalten die Form (6) mit $\mathfrak{B}(X) = 0$ annimmt. Dabei hat aber die Matrix $\Phi(E)$ in dem neu eingeschobenen Diagonalpunkt keinen Einser, sondern eine Null stehen, sie ist also nicht die Einheitsmatrix E. Wenn allgemeiner eine Lösung $\Phi(X)$ von (5) die Eigenschaft hat, daß eine damit äquivalente Lösung $\Gamma^{-1}\Phi(X)\Gamma$ in einer sich in

der Diagonale kreuzenden Zeile und Spalte lauter Nullen hat, so ist $\Gamma^{-1}\Phi(E)\Gamma \neq \mathsf{E}$, also auch $\Phi(E) \neq \mathsf{E}$. Wir wollen jetzt zeigen, daß abgesehen von diesem Fall, in dem also die Reihenzahl ν auf $\nu - 1$ reduziert werden kann, stets $\Phi(E) = \mathsf{E}$ ist, daß also der folgende Satz gilt:

Satz 6. *Wenn es zu einer Lösung $\Phi(X)$ von* (5) *keine äquivalente Lösung $\Gamma^{-1}\Phi(X)\Gamma$ gibt, die in einer sich in der Diagonale kreuzenden Zeile und Spalte lauter Nullen hat, also insbesondere, wenn $\Phi(X)$ irreduzibel ist, so ist $\Phi(E) = \mathsf{E}$.*

Zum Beweis setzen wir $\Phi(E) = \mathsf{A}$. Bekanntlich gibt es eine Matrix Γ derart, daß die Matrix $\mathsf{B} = \Gamma^{-1}\mathsf{A}\Gamma$ „Diagonalform" oder wenigstens „Kästchenform" hat, wobei sich längs der Diagonale Kästchen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \beta \end{pmatrix}$$

reihen und außerhalb dieser Kästchen lauter Nullen stehen[2]). Dabei ist die Reihenzahl r eines Kästchens gleich dem Exponenten des Elementarteilers $(\lambda - \beta)^r$ der Matrix $\mathsf{A} - \lambda\mathsf{E}$. Nach (8) ist nun $\mathsf{AA} = \mathsf{A}$, also auch $\mathsf{BB} = \mathsf{B}$. Daraus ergibt sich leicht, daß alle Elementarteiler den Exponenten 1 haben. Denn bei einem höheren Exponenten hat B, da man das entsprechende Kästchen links oben hin bringen kann, die Gestalt

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \dots \\ 1 & \beta & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \text{woraus folgt:} \quad \mathsf{BB} = \begin{pmatrix} \beta^2 & 0 & \dots \\ 2\beta & \beta^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Wegen $\mathsf{BB} = \mathsf{B}$ ist also $\beta^2 = \beta$, $2\beta = 1$, was sich widerspricht. Somit hat B reine Diagonalform:

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_r \end{pmatrix}.$$

Nach (7) ist $\Phi(X)\mathsf{A} = \mathsf{A}\,\Phi(X) = \Phi(X)$ und daher, wenn man die zu $\Phi(X)$ äquivalente Lösung $\Gamma^{-1}\Phi(X)\Gamma$ mit $\Psi(X)$ bezeichnet,

$$\Psi(X)\mathsf{B} = \mathsf{B}\Psi(X) = \Psi(X),$$

---

[2]) Man sehe etwa: M. Bôcher, Einführung in die höhere Algebra, 2. Aufl., 1925, § 100; oder L. E. Dickson-Bodewig, Höhere Algebra, 1929, § 53, 54; oder B. L. van der Waerden, Moderne Algebra, Bd. II (1931), § 109, 2. Auflage 1940, § 111.

oder ausführlicher

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \psi_{11}(X) & \dots & \beta_\nu \psi_{1\nu}(X) \\ \beta_1 \psi_{21}(X) & \dots & \beta_\nu \psi_{2\nu}(X) \\ \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots \\ \beta_1 \psi_{\nu 1}(X) & \dots & \beta_\nu \psi_{\nu\nu}(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \psi_{11}(X) & \dots & \beta_1 \psi_{1\nu}(X) \\ \beta_2 \psi_{21}(X) & \dots & \beta_2 \psi_{2\nu}(X) \\ \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots \\ \beta_\nu \psi_{\nu 1}(X) & \dots & \beta_\nu \psi_{\nu\nu}(X) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \psi_{11}(X) & \dots & \psi_{1\nu}(X) \\ \psi_{21}(X) & \dots & \psi_{2\nu}(X) \\ \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots \\ \psi_{\nu 1}(X) & \dots & \psi_{\nu\nu}(X) \end{pmatrix}.$$

Ist nun μ eine beliebige, aber zunächst festzuhaltende Zahl aus der Reihe $1, \dots, \nu$, so folgt hieraus

$$\beta_\mu \psi_{\lambda\mu}(X) = \psi_{\lambda\mu}(X) \quad \text{für } \lambda = 1, \dots, \nu,$$
$$\beta_\mu \psi_{\mu\lambda}(X) = \psi_{\mu\lambda}(X) \quad \text{für } \lambda = 1, \dots, \nu.$$

Da aber die hier auftretenden Funktionen $\psi_{\lambda\mu}(X)$ und $\psi_{\mu\lambda}(X)$ gerade die μ-te Spalte und Zeile füllen, so sind sie nach Voraussetzung nicht alle identisch gleich 0, und es ergibt sich $\beta_\mu = 1$. Da das für jede der Zahlen $\mu = 1, \dots, \nu$ gilt, so ist zunächst

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \mathsf{E}$$

und folglich auch $\mathsf{A} = \Gamma \mathsf{B} \Gamma^{-1} = \mathsf{E}$. W. z. b. w.

Nach Satz 6 bedeutet es keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir von jetzt an voraussetzen:

(9) $$\Phi(E) = \mathsf{E}.$$

§ 3.

Differentialgleichungen.

Wir suchen Lösungen $\Phi(X)$ von (5), welche in der Umgebung von $X = E$ analytisch sind. Unter der partiellen Ableitung $\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{pq}}$ verstehen wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x_{pq}} & \dots & \frac{\partial \varphi_{1\nu}}{\partial x_{pq}} \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ \frac{\partial \varphi_{\nu 1}}{\partial x_{pq}} & \dots & \frac{\partial \varphi_{\nu\nu}}{\partial x_{pq}} \end{pmatrix}.$$

Setzen wir zur Abkürzung $XY = Z$, so daß

$$z_{rq} = \sum_{p=1}^{n} x_{rp}\, y_{pq} \qquad (r, q = 1, \ldots, n)$$

ist, so folgt aus (5) durch partielle Ableitung nach y_{pq}

$$\Phi(X)\,\frac{\partial \Phi(Y)}{\partial y_{pq}} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \Phi(Z)}{\partial z_{rq}}\, x_{rp},$$

und wenn man hier speziell $Y = E$ setzt und die Abkürzung

$$\left\{\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{pq}}\right\}_{X=E} = \mathsf{A}^{pq} \tag{10}$$

einführt:

$$\Phi(X)\,\mathsf{A}^{pq} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{rq}}\, x_{rp} \qquad (p, q = 1, \ldots, n). \tag{11}$$

Nun ist

$$\sum_{p=1}^{n} x_{rp}\,\frac{\partial |X|}{\partial x_{sp}} = e_{rs}\,|X|, \qquad \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial |X|}{\partial x_{sp}}\, x_{st} = e_{pt}\,|X|. \tag{12}$$

Unter Anwendung der ersten dieser Formeln folgt aus (11) durch Multiplikation mit $\frac{\partial |X|}{\partial x_{sp}}$ und Summation nach p, wenn man noch die rechte und linke Seite vertauscht,

$$|X|\,\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{sq}} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial |X|}{\partial x_{sp}}\, \Phi(X)\,\mathsf{A}^{pq} \qquad (s, q = 1, \ldots, n), \tag{13}$$

und umgekehrt folgt aus (13) auch wieder (11), wenn man mit x_{st} multipliziert und nach s summiert, wobei die zweite der Formeln (12) anzuwenden ist. Damit ist bewiesen

Satz 7. *Jede in der Umgebung von $X = E$ analytische Lösung $\Phi(X)$ der Gleichung* (5) *genügt einem System von partiellen Differentialgleichungen der Form* (13), *wobei die A^{pq} gewisse konstante Matrizes sind.*

Es ist das ein System von n^2 Gleichungen für die Matrix Φ, also eigentlich ein System von $n^2 \nu^2$ Gleichungen für die ν^2 Funktionen $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \ldots, \varphi_{\nu\nu}$. Damit dieses System eine von der trivialen Lösung $\Phi(X) = 0$ verschiedene Lösung hat, müssen die Konstanten A^{pq} die „Integrabilitätsbedingungen" erfüllen, mit denen wir uns bald beschäftigen werden. Aber auch wenn die A^{pq} diese Bedingungen erfüllen, so braucht eine Lösung von (13) noch lange keine Lösung von (5) zu sein. Wenn aber auch die Bedingung (9) erfüllt ist, so trifft das zu; es gilt nämlich die folgende Umkehrung von Satz 7:

Satz 8. *Wenn das Differentialgleichungssystem* (13) *eine in der Umgebung von $X = E$ analytische Lösung $\Phi(X)$ hat, für die $\Phi(E) = \mathsf{E}$ ist, so ist $\Phi(X)$ auch eine Lösung der Gleichung* (5).

Beim Beweis sehen wir zunächst von der Nebenbedingung $\Phi(E) = \mathsf{E}$ ab und wollen zeigen, daß infolge des Systems (13) auch die folgende Gleichung gilt:

$$(14)\quad |X|^k \frac{\partial^k \Phi(X)}{\partial x_{s_1 q_1} \cdots \partial x_{s_k q_k}} = \sum_{p_1, \ldots, p_k} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_1 p_1}} \cdots \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_k p_k}} \Phi(X)\, \mathsf{A}^{p_1 q_1; \ldots; p_k q_k},$$

wo alle Summationsindizes von 1 bis n laufen und auch die übrigen Indizes die Werte 1, ..., n haben. Dabei sind die konstanten Matrizes $\mathsf{A}^{p_1 q_1; \ldots; p_k q_k}$ im Fall $k = 1$ die in (13) auftretenden und sind für $k > 1$ durch folgende Rekursionsformel definiert:

$$(15)\quad \mathsf{A}^{p_1 q_1; \ldots; p_k q_k; pq} = \mathsf{A}^{pq}\, \mathsf{A}^{p_1 q_1; \ldots; p_k q_k} - e_{p_1 q}\, \mathsf{A}^{pq_1; p_2 q_2; \ldots; p_k q_k} - \\ - e_{p_2 q}\, \mathsf{A}^{p_1 q_1; pq_2; \ldots; p_k q_k} - \ldots - e_{p_k q}\, \mathsf{A}^{p_1 q_1; \ldots; p_{k-1} q_{k-1}; pq_k}.$$

Für $k = 1$ ist (14) mit (13) identisch, also richtig. Den allgemeinen Nachweis führen wir durch vollständige Induktion; wir nehmen also (14) für einen gewissen Wert k als richtig an. Dann multiplizieren wir (14) mit $|X|^{-k}$ und differenzieren dann partiell nach x_{sq}. Die dabei auftretenden zweiten Ableitungen von $|X|$ drücken wir vermöge der Formel [3])

$$|X| \frac{\partial^2 |X|}{\partial x_{rp}\, \partial x_{sq}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{rp}} \frac{\partial |X|}{\partial x_{sq}} - \frac{\partial |X|}{\partial x_{rq}} \frac{\partial |X|}{\partial x_{sp}}$$

durch die ersten aus und erhalten dann nach Multiplikation mit $|X|^{k+1}$:

$$|X|^{k+1} \frac{\partial^{k+1} \Phi(X)}{\partial x_{s_1 q_1} \cdots \partial x_{s_k q_k}\, \partial x_{sq}} = \sum_{p_1, \ldots, p_k} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_1 p_1}} \cdots \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_k p_k}} |X| \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{sq}} \mathsf{A}^{p_1 q_1; \ldots; p_k q_k}$$

$$- \sum_{p_1, \ldots, p_k} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_1 q}} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s p_1}} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_2 p_2}} \cdots \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_k p_k}} \Phi(X)\, \mathsf{A}^{p_1 q_1; \ldots; p_k q_k}$$

$$\cdots\cdots\cdots

oder indem man die Summationsindizes p, p_1 mit p_1, p bezeichnet:

$$\sum_{p_1,\ldots,p_k,p} \frac{\partial|X|}{\partial x_{s_1 p_1}} \frac{\partial|X|}{\partial x_{s_2 p_2}} \cdots \frac{\partial|X|}{\partial x_{s_k p_k}} \frac{\partial|X|}{\partial x_{sp}} \Phi(X)\, e_{p_1 q}\, \mathsf{A}^{p q_1; p_2 q_2; \ldots; p_k q_k}.$$

In entsprechender Weise lassen sich auch die anderen Summen als $(k+1)$-fache Summen schreiben. Wenn man dann die sämtlichen $(k+1)$-fachen Summen unter ein einziges Summenzeichen zusammenfaßt, ergibt sich

$$|X|^{k+1} \frac{\partial^{k+1}\Phi(X)}{\partial x_{s_1 q_1} \cdots \partial x_{s_k q_k} \partial x_{sq}} = \sum_{p_1,\ldots,p_k,p} \frac{\partial|X|}{\partial x_{s_1 p_1}} \cdots \frac{\partial|X|}{\partial x_{s_k p_k}} \frac{\partial|X|}{\partial x_{sp}} \Phi(X)\, \mathsf{A}^{p_1 q_1; \ldots; p_k q_k; pq},$$

wobei $\mathsf{A}^{p_1 q_1; \ldots; p_k q_k; pq}$ gerade durch (15) gegeben ist. Das ist aber die Formel (14) mit $k+1$ an Stelle von k, womit (14) allgemein bewiesen ist.

Aus (14) folgt weiter, wenn man mit $x_{s_1 r_1} \ldots x_{s_k r_k}$ multipliziert und nach $s_1, \ldots, s_k$ summiert, unter Benutzung von (12):

$$\sum_{s_1,\ldots,s_k} \frac{\partial^k \Phi(X)}{\partial x_{s_1 q_1} \cdots \partial x_{s_k q_k}} x_{s_1 r_1} \cdots x_{s_k r_k} = \Phi(X)\, \mathsf{A}^{r_1 q_1; \ldots; r_k q_k}. \tag{16}$$

Nunmehr kann der Satz 8 leicht bewiesen werden. Zunächst ist wegen $\Phi(E) = \mathsf{E}$ die Gleichung $\Phi(X)\Phi(Y) = \Phi(XY)$ mindestens für $Y = E$ richtig. Wenn wir zeigen können, daß infolge des Gleichungssystems (13) und der Forderung $\Phi(E) = \mathsf{E}$ auch für alle partiellen Ableitungen die Formel

$$\left\{\frac{\partial^k[\Phi(X)\Phi(Y) - \Phi(XY)]}{\partial y_{r_1 q_1} \cdots \partial y_{r_k q_k}}\right\}_{Y=E} = 0 \tag{17}$$

gilt, so hat die Taylorentwicklung der Funktion $\Phi(X)\Phi(Y) - \Phi(XY)$ nach Potenzen der n^2 Größen $y_{rq} - e_{rq}$ lauter Koeffizienten 0, und damit wird der Satz 8 bewiesen sein. Nun ist die zu beweisende Formel (17), wenn wieder $XY = Z$ gesetzt wird, gleichbedeutend mit

$$\Phi(X)\left\{\frac{\partial^k \Phi(Y)}{\partial y_{r_1 q_1} \cdots \partial y_{r_k q_k}}\right\}_{Y=E} = \sum_{s_1,\ldots,s_k} \left\{\frac{\partial^k \Phi(Z)}{\partial z_{s_1 q_1} \cdots \partial z_{s_k q_k}}\right\}_{Y=E} x_{s_1 r_1} \cdots x_{s_k r_k},$$

oder also mit

$$\Phi(X)\left\{\frac{\partial^k \Phi(Y)}{\partial y_{r_1 q_1} \cdots \partial y_{r_k q_k}}\right\}_{Y=E} = \sum_{s_1,\ldots,s_k} \frac{\partial^k \Phi(X)}{\partial x_{s_1 q_1} \cdots \partial x_{s_k q_k}} x_{s_1 r_1} \cdots x_{s_k r_k}. \tag{18}$$

Aus (13) folgt aber, wie wir gesehen haben, die Formel (16) und aus dieser folgt für $X = E$ wegen $\Phi(E) = \mathsf{E}$:

$$\left\{\frac{\partial^k \Phi(X)}{\partial x_{r_1 q_1} \cdots \partial x_{r_k q_k}}\right\}_{X=E} = \mathsf{A}^{r_1 q_1; \ldots; r_k q_k}. \tag{19}$$

Wenn man diesen Wert von $\mathsf{A}^{r_1 q_1; \ldots; r_k q_k}$ in (16) einsetzt, ergibt sich genau die zu beweisende Formel (18), womit diese und folglich auch der Satz 8 bewiesen ist.

Auch die Integrabilitätsbedingungen des Systems (13) können jetzt leicht angegeben werden. Bekanntlich bestehen sie darin, daß die aus (13) berechneten zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_{s_1 q_1}\, \partial x_{s_2 q_2}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_{s_2 q_2}\, \partial x_{s_1 q_1}}$$

für alle Variabelnpaare $x_{s_1 q_1}$ und $x_{s_2 q_2}$ einander gleich sind; für die höheren Ableitungen trifft dann das Entsprechende von selbst zu. Nun lauten die Gleichungen (14) und (16) im Fall $k = 2$:

$$|X|^2 \frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_{s_1 q_1}\, \partial x_{s_2 q_2}} = \sum_{p_1, p_2} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_1 p_1}} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_2 p_2}} \Phi(X)\, \mathsf{A}^{p_1 q_1; p_2 q_2},$$

$$\sum_{s_1, s_2} \frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_{s_1 q_1}\, \partial x_{s_2 q_2}} x_{s_1 r_1}\, x_{s_2 r_2} = \Phi(X)\, \mathsf{A}^{r_1 q_1; r_2 q_2}.$$

Notwendig und hinreichend für die Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge in allen zweiten Ableitungen ist daher

$$\mathsf{A}^{p_1 q_1; p_2 q_2} = \mathsf{A}^{p_2 q_2; p_1 q_1}$$

und das besagt, wie die Formel (15) für $k = 1$ lehrt, soviel wie

$$\mathsf{A}^{p_2 q_2}\, \mathsf{A}^{p_1 q_1} - e_{p_1 q_2}\, \mathsf{A}^{p_2 q_1} = \mathsf{A}^{p_1 q_1}\, \mathsf{A}^{p_2 q_2} - e_{p_2 q_1}\, \mathsf{A}^{p_1 q_2}.$$

Indem wir statt p_1, q_1, p_2, q_2 einfacher p, q, r, s schreiben, gewinnen wir so den

Satz 9. *Die Integrabilitätsbedingungen des Differentialgleichungssystems* (13) *lauten*:

$$\mathsf{A}^{pq}\, \mathsf{A}^{rs} - \mathsf{A}^{rs}\, \mathsf{A}^{pq} = e_{rq}\, \mathsf{A}^{ps} - e_{ps}\, \mathsf{A}^{rq}$$

für $p, q, r, s = 1, \ldots, n$.

Die in der Umgebung von $X = E$ analytische, also nach Potenzen der n^2 Größen $x_{pq} - e_{pq}$ entwickelbare Lösung $\Phi(X)$ von (13) mit $\Phi(E) = \mathsf{E}$ ist nunmehr eindeutig bestimmt; nach dem Taylorschen Satz ist sie nämlich gleich

$$\Phi(X) = \mathsf{E} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \Bigg(\sum_{\substack{p_1, \ldots, p_k \\ q_1, \ldots, q_k}} \left\{ \frac{\partial^k \Phi(X)}{\partial x_{p_1 q_1} \ldots \partial x_{p_k q_k}} \right\}_{X = E} \times (x_{p_1 q_1} - e_{p_1 q_1}) \ldots (x_{p_k q_k} - e_{p_k q_k}) \Bigg). \tag{20}$$

Die dabei auftretenden k-ten Ableitungen für $X = E$ sind die Größen (19) (mit p an Stelle von r), welche sich nach der Rekursionsformel (15) berechnen.

Auf Grund dieser Formel kann man leicht einen Konvergenzbereich angeben. Wenn nämlich für die Elemente der in dem System (13) gegebenen Matrizes A^{pq} die Abschätzung

$$|\alpha_{\varrho\sigma}^{pq}| \leqq c, \quad \text{wo } c \geqq 1, \tag{21}$$

gilt, so gilt für die Elemente von $\mathsf{A}^{p_1q_1;\ \ldots;\ p_kq_k}$ die Abschätzung

$$|\alpha_{\varrho\sigma}^{p_1q_1;\ \ldots;\ p_kq_k}| \leqq \frac{(\nu+k-1)!}{(\nu-1)!}\, c^k. \tag{22}$$

Denn für $k = 1$ ist das nach (21) richtig, und wenn es für ein gewisses k richtig ist, so folgt aus (15)

$$\begin{aligned} |\alpha_{\varrho\sigma}^{p_1q_1;\ \ldots;\ p_kq_k;\ pq}| &\leqq \nu c \frac{(\nu+k-1)!}{(\nu-1)!} c^k + k \frac{(\nu+k-1)!}{(\nu-1)!} c^k \\ &\leqq \frac{(\nu+k)!}{(\nu-1)!} c^{k+1}. \end{aligned}$$

Daher gilt die Formel (22) allgemein, was mit Rücksicht auf (19) besagt, daß jedes Element der Matrix

$$\left| \frac{\partial^k \Phi(X)}{\partial x_{p_1q_1} \ldots \partial x_{p_kq_k}} \right|_{X=E}$$

absolut höchstens gleich der rechten Seite von (22) ist. Für die Reihe in (20) hat man also die Majorante

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{p_1, \ldots, p_k \\ q_1, \ldots, q_k}} \frac{(\nu+k-1)!}{(\nu-1)!} c^k |x_{p_1q_1} - e_{p_1q_1}| \ldots |x_{p_kq_k} - e_{p_kq_k}|$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\nu+k-1}{k} c^k \Big(\sum_{p,q} |x_{pq} - e_{pq}| \Big)^k = \Big(1 - c \sum_{p,q} |x_{pq} - e_{pq}|\Big)^{-\nu} - 1,$$

und es ergibt sich der

Satz 10. *Das Differentialgleichungssystem* (13) *hat, wenn die in Satz* 9 *angegebenen Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind, eine und nur eine in der Umgebung von* $X = E$ *analytische Lösung* $\Phi(X)$ *mit* $\Phi(E) = \mathsf{E}$, *und ihre Reihenentwicklung nach Potenzen der* n^2 *Größen* $x_{pq} - e_{pq}$ *konvergiert mindestens für*

$$\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} |x_{pq} - e_{pq}| < \frac{1}{c},$$

wobei c *die größte der* $n^2\nu^2 + 1$ *Zahlen* 1 *und* $|\alpha_{\varrho\sigma}^{pq}|$ *ist* ($p, q = 1, \ldots, n$; $\varrho, \sigma = 1, \ldots, \nu$).

Bemerkung. Statt die Funktionalgleichung (5) partiell nach y_{pq} zu differenzieren und dann $Y = E$ zu setzen, kann man ebensogut nach x_{pq}

differenzieren und dann $X = E$ setzen. Dadurch ergibt sich, wenn im Endresultat X statt Y geschrieben wird, analog zu (13) das System

$$|X| \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{ps}} = \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial |X|}{\partial x_{qs}} \mathsf{A}^{pq} \Phi(X) \qquad (p, s = 1, \ldots, n), \tag{23}$$

wo A^{pq} wieder durch (10) gegeben ist. Hieran lassen sich nun die entsprechenden Überlegungen anschließen wie an (13). Die Integrabilitätsbedingungen sind die gleichen, und die bei ihrem Erfülltsein eindeutig bestimmte in der Umgebung von $X = E$ analytische Lösung von (23) mit $\Phi(E) = \mathsf{E}$ ist auch Lösung der Gleichung (5). Im übrigen ist aber das System (23) keineswegs mit (13) gleichbedeutend, und das allgemeine Integral von (23) ist ein anderes als das allgemeine Integral von (13), wovon man sich schon im Fall $n = 1$ überzeugen kann[4]). Nur das Integral mit der Nebenbedingung $\Phi(E) = \mathsf{E}$ ist für beide Systeme dasselbe und ist Lösung der Gleichung (5).

§ 4.

Die Fälle $n = 1$ und $\nu = 1$.

Nachdem wir in § 3 bis zur Entwicklung der Lösung unserer Funktionalgleichung (5) in die Taylorsche Reihe nach den n^2 Größen $x_{pq} - e_{pq}$ vorgedrungen sind, ist das Problem im Prinzip bereits erledigt. Es handelt sich aber noch darum, die konstanten Matrizes A^{pq} explizit auf die allgemeinste Weise so anzugeben, daß die Integrabilitätsbedingungen von Satz 9 erfüllt sind, und dann die Lösung in einer handlicheren Form anzugeben als es die besagte Taylorsche Reihe ist.

Sehr einfach sind die Fälle $n = 1$ und $\nu = 1$.

I. Im Fall $n = 1$ hat die Matrix X nur das eine Element x_{11}, wofür wir einfach x schreiben. Ebenso gibt es nur eine Matrix A^{pq}, nämlich A^{11}, wofür wir einfach A schreiben. Das System (13) besteht dann nur aus der einen (gewöhnlichen) Differentialgleichung

$$x \frac{d\Phi(x)}{dx} = \Phi(x)\mathsf{A}, \tag{24}$$

bei der es natürlich keine Integrabilitätsbedingungen gibt; die in Satz 9 angegebenen reduzieren sich auf eine Identität. Das allgemeine Integral von (24) ist augenscheinlich

$$\Phi(x) = \Gamma x^{\mathsf{A}} = \Gamma e^{\mathsf{A} \log x} = \Gamma \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathsf{A} \log x)^k}{k!}, \tag{25}$$

[4]) Die allgemeine Lösung von (13) im Fall $n = 1$ ist in Formel (25) gegeben. Die allgemeine Lösung von (23) im Fall $n = 1$ unterscheidet sich davon dadurch, daß die konstante Matrix Γ nicht als vorderer, sondern als hinterer Faktor auftritt.

wo Γ eine willkürliche konstante Matrix ist. Die Forderung $\Phi(E) = \mathsf{E}$ gewinnt für $n = 1$ das Aussehen $\Phi(1) = \mathsf{E}$, und dann folgt aus (25): $\Gamma = \mathsf{E}$. Somit gewinnen wir den

Satz 11. *Die in der Umgebung von $x = 1$ analytischen Lösungen der Funktionalgleichung $\Phi(x)\,\Phi(y) = \Phi(xy)$ mit der Nebenbedingung $\Phi(1) = \mathsf{E}$ sind gegeben durch die Formel*

$$\Phi(x) = x^{\mathsf{A}} = e^{\mathsf{A}\log x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{A}\log x)^k}{k!},$$

wobei A eine willkürliche konstante Matrix ist.

II. Im Fall $\nu = 1$ hat die Matrix $\Phi(X)$ nur das eine Element $\varphi_{11}(X)$, wofür wir einfach $\varphi(X)$ schreiben. Ebenso hat A^{pq} nur das eine Element α_{11}^{pq}, wofür wir α^{pq} schreiben. Das System (13) lautet dann

$$|X| \frac{\partial \varphi(X)}{\partial x_{sq}} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial |X|}{\partial x_{sp}} \varphi(X)\,\alpha^{pq}. \tag{26}$$

Die Integrabilitätsbedingungen (Satz 9) reduzieren sich auf

$$e_{rq}\,\alpha^{ps} = e_{ps}\,\alpha^{rq} \qquad (p, q, r, s = 1, \ldots, n). \tag{27}$$

Speziell für $r = q = 1$ folgt hieraus

$$\alpha^{ps} = e_{ps}\,\alpha^{11} \qquad (p, s = 1, \ldots, n) \tag{28}$$

und umgekehrt folgt aus (28) sogleich auch wieder (27), so daß die Gleichungen (28) bereits die vollen Integrabilitätsbedingungen sind. Hiernach sind alle α^{ps} bereits durch das willkürlich bleibende α^{11} bestimmt, und die Differentialgleichungen (26) reduzieren sich, wenn wir statt α^{11} einfach α schreiben, auf

$$|X| \frac{\partial \varphi(X)}{\partial x_{sq}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{sq}} \varphi(X)\,\alpha \qquad (s, q = 1, \ldots, n).$$

Das besagt soviel wie

$$\frac{\partial \log [\varphi(X)\,|X|^{-\alpha}]}{\partial x_{sq}} = 0 \qquad (s, q = 1, \ldots, n).$$

Hiernach ist $\varphi(X)\,|X|^{-\alpha}$ eine Konstante, und da die Forderung $\Phi(E) = \mathsf{E}$ für $\nu = 1$ das Aussehen $\varphi(E) = 1$ hat, ist die Konstante gleich 1. Somit ergibt sich

Satz 12. *Die in der Umgebung von $X = E$ analytischen Lösungen der Funktionalgleichung $\varphi(X)\,\varphi(Y) = \varphi(XY)$ mit der Nebenbedingung $\varphi(E) = 1$ sind gegeben durch die Formel*

$$\varphi(X) = |X|^{\alpha} = e^{\alpha \log |X|},$$

wo α eine willkürliche Konstante ist.

§ 5.

Reduktion der Integrabilitätsbedingungen.

Im folgenden scheiden die erledigten Fälle $n = 1$ und $\nu = 1$ aus[5]). Die Integrabilitätsbedingungen lauten nach Satz 9

$$\mathfrak{A}^{pq}\mathfrak{A}^{rs} - \mathfrak{A}^{rs}\mathfrak{A}^{pq} = e_{rq}\mathfrak{A}^{ps} - e_{ps}\mathfrak{A}^{rq}. \tag{29}$$

Speziell für $p = s = 1$ folgt daraus

$$\text{I.}\qquad \mathfrak{A}^{rq} = \mathfrak{A}^{r1}\mathfrak{A}^{1q} - \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{r1} + e_{rq}\mathfrak{A}^{11} \qquad (r, q = 1, \ldots, n).$$

Dadurch sind alle n^2 Matrizes $\mathfrak{A}^{rq}$ bereits durch die $2n - 1$ Matrizes

$$\mathfrak{A}^{11}, \mathfrak{A}^{21}, \ldots, \mathfrak{A}^{n1},$$
$$\mathfrak{A}^{12}, \ldots, \mathfrak{A}^{1n}$$

ausgedrückt. Zwischen diesen bestehen aber noch Beziehungen. Zunächst folgt aus I für $q = 1$, $r > 1$ bzw. für $r = 1$, $q > 1$:

$$\text{II.}\qquad \mathfrak{A}^{r1} = \mathfrak{A}^{r1}\mathfrak{A}^{11} - \mathfrak{A}^{11}\mathfrak{A}^{r1} \qquad (r = 2, \ldots, n),$$

$$\text{III.}\qquad \mathfrak{A}^{1q} = \mathfrak{A}^{11}\mathfrak{A}^{1q} - \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{11} \qquad (q = 2, \ldots, n).$$

Die Formel I ist für $q = r = 1$ eine Identität; für $q = 1$, $r > 1$ bzw. für $q > 1$, $r = 1$ deckt sie sich mit II bzw. III, weshalb es in Satz 13 genügen wird, sie für $q > 1$, $r > 1$ aufzuschreiben.

Weiter folgt aus (29) für $q = s = 1$ bzw. für $p = r = 1$:

$$\text{IV.}\qquad \mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{r1} = \mathfrak{A}^{r1}\mathfrak{A}^{p1} \qquad (p, r = 2, \ldots, n),$$

$$\text{V.}\qquad \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{1s} = \mathfrak{A}^{1s}\mathfrak{A}^{1q} \qquad (q, s = 2, \ldots, n).$$

Die Beziehungen IV und V brauchen in Satz 13 aus Symmetriegründen nur für $p < r$ bzw. für $q < s$ vermerkt zu werden. Sie kommen dann natürlich nur im Fall $n \geqq 3$ in Betracht.

Schließlich folgt aus (29) für $s = 1$ bzw. für $r = 1$

$$\mathfrak{A}^{pq}\mathfrak{A}^{r1} - \mathfrak{A}^{r1}\mathfrak{A}^{pq} = e_{rq}\mathfrak{A}^{p1} \qquad (p, q, r = 2, \ldots, n)$$

$$\mathfrak{A}^{pq}\mathfrak{A}^{1s} - \mathfrak{A}^{1s}\mathfrak{A}^{pq} = -e_{ps}\mathfrak{A}^{1q} \qquad (p, q, s = 2, \ldots, n),$$

wofür man mit Rücksicht auf I auch schreiben kann:

$$(\mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{1q} - \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{p1} + e_{pq}\mathfrak{A}^{11})\,\mathfrak{A}^{r1} - \mathfrak{A}^{r1}(\mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{1q} - \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{p1} + e_{pq}\mathfrak{A}^{11}) = e_{rq}\mathfrak{A}^{p1},$$

$$(\mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{1q} - \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{p1} + e_{pq}\mathfrak{A}^{11})\,\mathfrak{A}^{1s} - \mathfrak{A}^{1s}(\mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{1q} - \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{p1} + e_{pq}\mathfrak{A}^{11}) = -e_{ps}\mathfrak{A}^{1q},$$

---

[5]) Für $\nu = 1$ bleibt allerdings die ganze Rechnung in Kraft. Sie besteht aber zum größten Teil aus Trivialitäten, weil für einreihige Matrizes trivialerweise das kommutative Gesetz der Multiplikation gilt.

und endlich mit Rücksicht auf II und III:

$$\text{VI.}\quad (\mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{1q} - \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{p1})\mathfrak{A}^{r1} - \mathfrak{A}^{r1}(\mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{1q} - \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{p1}) = e_{rq}\mathfrak{A}^{p1} + e_{pq}\mathfrak{A}^{r1} \quad (p, q, r = 2, \ldots, n),$$

$$\text{VII.}\quad \mathfrak{A}^{1s}(\mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{1q} - \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{p1}) - (\mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{1q} - \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{p1})\mathfrak{A}^{1s} = e_{ps}\mathfrak{A}^{1q} + e_{pq}\mathfrak{A}^{1s} \quad (p, q, s = 2, \ldots, n).$$

Weitere Beziehungen sind nicht erforderlich. Um das einzusehen, müssen wir zeigen, daß aus den Beziehungen I bis VII bereits die Gleichung (29) für beliebige Indizes folgt. Zu dem Zweck leiten wir zuerst einige Folgerungen aus I bis VII her. Aus II und III folgt für $q \geqq 2$, $r \geqq 2$

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}^{r1}\mathfrak{A}^{1q} &= (\mathfrak{A}^{r1}\mathfrak{A}^{11} - \mathfrak{A}^{11}\mathfrak{A}^{r1})\mathfrak{A}^{1q}\\ &= \mathfrak{A}^{r1}\mathfrak{A}^{11}\mathfrak{A}^{1q} - \mathfrak{A}^{11}\mathfrak{A}^{r1}\mathfrak{A}^{1q}\\ &= \mathfrak{A}^{r1}(\mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{11} + \mathfrak{A}^{1q}) - \mathfrak{A}^{11}\mathfrak{A}^{r1}\mathfrak{A}^{1q},\end{aligned}$$

oder also

$$\text{VIII.}\quad \mathfrak{A}^{r1}\mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{11} = \mathfrak{A}^{11}\mathfrak{A}^{r1}\mathfrak{A}^{1q} \quad (q, r = 2, \ldots, n),$$

und eine analoge Rechnung führt zu

$$\text{IX.}\quad \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{r1}\mathfrak{A}^{11} = \mathfrak{A}^{11}\mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{r1} \quad (q, r = 2, \ldots, n).$$

Nach I ist

$$\mathfrak{A}^{pq}\mathfrak{A}^{r1} - \mathfrak{A}^{r1}\mathfrak{A}^{pq} = (\mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{1q} - \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{p1} + e_{pq}\mathfrak{A}^{11})\mathfrak{A}^{r1} - \mathfrak{A}^{r1}(\mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{1q} - \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{p1} + e_{pq}\mathfrak{A}^{11}),$$

was für $p > 1$, $q > 1$, $r > 1$ nach VI und II gleich

$$e_{rq}\mathfrak{A}^{p1} + e_{pq}\mathfrak{A}^{r1} - e_{pq}\mathfrak{A}^{r1} = e_{rq}\mathfrak{A}^{p1},$$

dagegen für $p > 1$, $q > 1$, $r = 1$ wegen VIII und IX gleich 0 ist. Man hat also die beiden Folgerungen

$$\text{X.}\quad \mathfrak{A}^{pq}\mathfrak{A}^{r1} - \mathfrak{A}^{r1}\mathfrak{A}^{pq} = e_{rq}\mathfrak{A}^{p1} \quad (p, q, r = 2, \ldots, n)$$

$$\text{XI.}\quad \mathfrak{A}^{pq}\mathfrak{A}^{11} = \mathfrak{A}^{11}\mathfrak{A}^{pq} \quad (p, q = 2, \ldots, n).$$

Analog ist wegen I auch

$$\mathfrak{A}^{pq}\mathfrak{A}^{1s} - \mathfrak{A}^{1s}\mathfrak{A}^{pq} = (\mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{1q} - \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{p1} + e_{pq}\mathfrak{A}^{11})\mathfrak{A}^{1s} - \mathfrak{A}^{1s}(\mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{1q} - \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{p1} + e_{pq}\mathfrak{A}^{11}),$$

was für $p > 1$, $q > 1$, $s > 1$ nach VII und III gleich

$$-e_{ps}\mathfrak{A}^{1q} - e_{pq}\mathfrak{A}^{1s} + e_{pq}\mathfrak{A}^{1s} = -e_{ps}\mathfrak{A}^{1q}$$

ist. Man hat also die weitere Folgerung

$$\text{XII.}\quad \mathfrak{A}^{pq}\mathfrak{A}^{1s} - \mathfrak{A}^{1s}\mathfrak{A}^{pq} = -e_{ps}\mathfrak{A}^{1q} \quad (p, q, s = 2, \ldots, n).$$

Eine letzte Folgerung bekommt man, wenn man VI hinten mit $\mathfrak{A}^{1s}$ multipliziert, VII hinten mit $\mathfrak{A}^{r1}$, sodann VI vorn mit $-\mathfrak{A}^{1s}$, VII vorn mit $-\mathfrak{A}^{r1}$, worauf man die vier so entstehenden Gleichungen addiert. So ergibt sich

XIII. $$(\mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{1q} - \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{p1})(\mathfrak{A}^{r1}\mathfrak{A}^{1s} - \mathfrak{A}^{1s}\mathfrak{A}^{r1}) - (\mathfrak{A}^{r1}\mathfrak{A}^{1s} - \mathfrak{A}^{1s}\mathfrak{A}^{r1})(\mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{1q} - \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{p1}) = e_{rq}(\mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{1s} - \mathfrak{A}^{1s}\mathfrak{A}^{p1}) - e_{ps}(\mathfrak{A}^{r1}\mathfrak{A}^{1q} - \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{r1}).$$

Nunmehr genügt es, zu zeigen, daß (29) eine Folge der Formeln I bis XIII ist. Wir unterscheiden verschiedene Fälle.

1. Sind in (29) alle vier Indizes gleich 1, so ist (29) eine Identität, also nichts mehr zu beweisen.

2. Ist in (29) nur *ein* Index größer als 1, und zwar ein vorderer bzw. hinterer, so kann man aus Symmetriegründen annehmen, daß es der Index r bzw. q ist. Dann hat (29) das Aussehen

$$\mathfrak{A}^{11}\mathfrak{A}^{r1} - \mathfrak{A}^{r1}\mathfrak{A}^{11} = -\mathfrak{A}^{r1} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{11} - \mathfrak{A}^{11}\mathfrak{A}^{1q} = -\mathfrak{A}^{1q},$$

und das deckt sich mit II bzw. III.

3. Sind in (29) zwei Indizes größer als 1, und zwar die zwei vorderen bzw. die zwei hinteren, so hat (29) das Aussehen

$$\mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{r1} - \mathfrak{A}^{r1}\mathfrak{A}^{p1} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{1s} - \mathfrak{A}^{1s}\mathfrak{A}^{1q} = 0,$$

und das deckt sich mit IV bzw. V.

4. Sind in (29) zwei Indizes größer als 1, und zwar ein vorderer und ein hinterer, so kann man annehmen, daß es die Indizes r und q oder die Indizes p und q sind. Dann hat (29) das Aussehen

$$\mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{r1} - \mathfrak{A}^{r1}\mathfrak{A}^{1q} = e_{rq}\mathfrak{A}^{11} - \mathfrak{A}^{rq} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{A}^{pq}\mathfrak{A}^{11} - \mathfrak{A}^{11}\mathfrak{A}^{pq} = 0,$$

und das deckt sich mit I bzw. XI.

5. Ist in (29) nur *ein* Index gleich 1 und zwar ein vorderer bzw. hinterer, so kann man annehmen, daß es der Index r bzw. s ist. Dann hat (29) das Aussehen

$$\mathfrak{A}^{pq}\mathfrak{A}^{1s} - \mathfrak{A}^{1s}\mathfrak{A}^{pq} = -e_{ps}\mathfrak{A}^{1q} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{A}^{pq}\mathfrak{A}^{r1} - \mathfrak{A}^{r1}\mathfrak{A}^{pq} = e_{rq}\mathfrak{A}^{p1},$$

und das deckt sich mit XII bzw. X.

6. Jetzt bleibt nur noch der Fall, daß in (29) alle vier Indizes größer als 1 sind. Dann hat (29) wegen I das Aussehen

$$(\mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{1q} - \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{p1} + e_{pq}\mathfrak{A}^{11})(\mathfrak{A}^{r1}\mathfrak{A}^{1s} - \mathfrak{A}^{1s}\mathfrak{A}^{r1} + e_{rs}\mathfrak{A}^{11}) - (\mathfrak{A}^{r1}\mathfrak{A}^{1s} - \mathfrak{A}^{1s}\mathfrak{A}^{r1} + e_{rs}\mathfrak{A}^{11})(\mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{1q} - \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{p1} + e_{pq}\mathfrak{A}^{11}) = e_{rq}(\mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{1s} - \mathfrak{A}^{1s}\mathfrak{A}^{p1} + e_{ps}\mathfrak{A}^{11}) - e_{ps}(\mathfrak{A}^{r1}\mathfrak{A}^{1q} - \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{r1} + e_{rq}\mathfrak{A}^{11}).$$

Hier fällt nun $\mathfrak{A}^{11}$ mit Rücksicht auf VIII und IX völlig heraus und die dann verbleibende Formel deckt sich mit XIII.

Damit ist alles bewiesen, und wir gewinnen, wenn wir in den Formeln I bis VII die Indizes teilweise mit anderen Buchstaben bezeichnen, den

Satz 13. *Den in Satz 9 angegebenen Integrabilitätsbedingungen des Differentialgleichungssystems* (13) *läßt sich die folgende Gestalt geben: Die Bedingungen bestehen darin, daß durch die* $2n-1$ *Matrizes*

$$\mathfrak{A}^{11}, \mathfrak{A}^{21}, \ldots, \mathfrak{A}^{n1}, \quad \mathfrak{A}^{12}, \ldots, \mathfrak{A}^{1n}$$

die $(n-1)^2$ *anderen sich ausdrücken durch die Formel*

$$\text{I.} \qquad \mathfrak{A}^{pq} = \mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{1q} - \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{p1} + e_{pq}\mathfrak{A}^{11} \qquad (p, q = 2, \ldots, n),$$

und daß zwischen den $2n-1$ *erstgenannten Matrizes noch die folgenden Beziehungen bestehen:*

$$\text{II.} \qquad \mathfrak{A}^{p1} = \mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{11} - \mathfrak{A}^{11}\mathfrak{A}^{p1} \qquad (p = 2, \ldots, n),$$

$$\text{III.} \qquad \mathfrak{A}^{1p} = \mathfrak{A}^{11}\mathfrak{A}^{1p} - \mathfrak{A}^{1p}\mathfrak{A}^{11} \qquad (p = 2, \ldots, n),$$

$$\text{IV.} \qquad \mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{q1} = \mathfrak{A}^{q1}\mathfrak{A}^{p1} \qquad (1 < p < q \leqq n),$$

$$\text{V.} \qquad \mathfrak{A}^{1p}\mathfrak{A}^{1q} = \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{1p} \qquad (1 < p < q \leqq n),$$

$$\text{VI.} \qquad (\mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{1q} - \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{p1})\mathfrak{A}^{r1} - \mathfrak{A}^{r1}(\mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{1q} - \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{p1}) = e_{rq}\mathfrak{A}^{p1} + e_{pq}\mathfrak{A}^{r1} \qquad (p, q, r = 2, \ldots, n),$$

$$\text{VII.} \qquad \mathfrak{A}^{1r}(\mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{1q} - \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{p1}) - (\mathfrak{A}^{p1}\mathfrak{A}^{1q} - \mathfrak{A}^{1q}\mathfrak{A}^{p1})\mathfrak{A}^{1r} = e_{pr}\mathfrak{A}^{1q} + e_{pq}\mathfrak{A}^{1r} \qquad (p, q, r = 2, \ldots, n).$$

Bemerkung. Die Vorzugsstellung, die in Satz 13 dem Index 1 eingeräumt ist, kann man ebensogut jedem anderen der Indizes $1, 2, \ldots, n$ einräumen und dadurch zu entsprechenden anderen Formulierungen der Integrabilitätsbedingungen gelangen[6]).

§ 6.

Einige Folgerungen aus den Integrabilitätsbedingungen.

Es sei $\mathfrak{A}^{12} = 0$. Aus VII für $p = q = 2$ folgt dann

$$\mathfrak{A}^{1r} = 0 \qquad (r = 2, \ldots, n).$$

Aus VI für $p = q = 2$ folgt

$$e_{r2}\mathfrak{A}^{21} + \mathfrak{A}^{r1} = 0 \qquad (r = 2, \ldots, n),$$

also auch

$$\mathfrak{A}^{r1} = 0 \qquad (r = 2, \ldots, n).$$

---

[6]) Daß keiner der Indizes $1, 2, \ldots, n$ vor einem anderen eine Vorzugsstellung hat, ergibt sich aus Satz 3 und der unmittelbar daran angeschlossenen Bemerkung.

Aus I folgt dann weiter

$$\mathfrak{A}^{pq} = e_{pq}\,\mathfrak{A}^{11} \qquad (p, q = 2, \ldots, n).$$

Daher sind alle $\mathfrak{A}^{pq}$ für $p \neq q$ gleich 0 und alle $\mathfrak{A}^{pp}$ sind einander gleich. Wir hatten angenommen, daß $\mathfrak{A}^{12} = 0$ ist. Da aber das Indexpaar 1, 2 in keiner Weise vor einem anderen ausgezeichnet ist[7]), so können wir schließen, daß, wenn $\mathfrak{A}^{pq}$ für irgendein Paar verschiedener Indizes p, q gleich 0 ist, das für jedes Paar gilt und daß dann alle $\mathfrak{A}^{pp}$ einander gleich sind, etwa gleich $\mathfrak{A}$. Das System (13) lautet dann

$$|X|\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{\varrho\sigma}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{\varrho\sigma}}\,\Phi(X)\,\mathfrak{A}.$$

Dieses System besagt, wenn man

$$|X|^{\mathfrak{A}} = e^{\mathfrak{A}\log|X|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathfrak{A}\log|X|)^k}{k!} = \Psi(X),$$

also

$$|X|^{-\mathfrak{A}} = e^{-\mathfrak{A}\log|X|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mathfrak{A}\log|X|)^k}{k!} = [\Psi(X)]^{-1}$$

setzt, nach hinterer Multiplikation mit $[\Psi(X)]^{-1}$ soviel wie

$$|X|\frac{\partial\{\Phi(X)\,[\Psi(X)]^{-1}\}}{\partial x_{\varrho\sigma}} = 0.$$

Somit ist $\Phi(X)\,[\Psi(X)]^{-1}$ eine konstante Matrix Γ, also

$$\Phi(X) = \Gamma\,\Psi(X).$$

Wegen $\Phi(E) = \mathfrak{E}$ muß $\Gamma = \mathfrak{E}$ sein, und man gewinnt mit Rücksicht auf die in (10) gegebene Bedeutung der $\mathfrak{A}^{pq}$ den

Satz 14. *Wenn für eine in der Umgebung von $X = E$ analytische Lösung der Gleichung* (5) $\Phi(E) = \mathfrak{E}$ *ist und wenn die Matrix*

$$\mathfrak{A}^{pq} = \left\{\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{pq}}\right\}_{X=E}$$

für ein Paar verschiedener Indizes p, q gleich 0 ist, so ist $\Phi(X)$ notwendig die bereits in Satz 5 angegebene Lösung

$$\Phi(X) = |X|^{\mathfrak{A}} = e^{\mathfrak{A}\log|X|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathfrak{A}\log|X|)^k}{k!} \quad \textit{mit} \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{11}.$$

Nunmehr wollen wir die Gestalt der Matrizes $\mathfrak{A}^{pq}$ auf Grund der in Satz 13 ihnen auferlegten Bedingungen näher untersuchen. Wenn wir statt

[7]) Das ergibt sich aus der ursprünglichen Formulierung der Integrabilitätsbedingungen in Satz 9 oder auch aus Satz 3 und der unmittelbar daran angeschlossenen Bemerkung.

der Lösung $\Phi(X)$ von (5) die äquivalente Lösung $\Gamma^{-1}\Phi(X)\Gamma$ betrachten, so tritt an Stelle von $\mathfrak{A}^{pq} = \left\{\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{pq}}\right\}_{X=E}$ die Matrix

$$\Gamma^{-1}\left\{\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{pq}}\right\}_{X=E}\Gamma = \Gamma^{-1}\mathfrak{A}^{pq}\Gamma.$$

Nun läßt sich Γ so wählen, daß etwa $\Gamma^{-1}\mathfrak{A}^{11}\Gamma$ eine den Elementarteilern von $\mathfrak{A}^{11} - \lambda\mathfrak{E}$ entsprechende Kästchenmatrix ist, bei einfachen Elementarteilern also eine reine Diagonalmatrix. Es bedeutet daher keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir $\mathfrak{A}^{11}$ von vornherein als Kästchenmatrix annehmen; das wollen wir tun. Sind[8])

$$(\lambda - \alpha_1)^{\nu_1},\quad (\lambda - \alpha_2)^{\nu_2},\ \ldots,\ (\lambda - \alpha_\mu)^{\nu_\mu}$$

die Elementarteiler von $\mathfrak{A}^{11} - \lambda\mathfrak{E}$, wobei dann $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_\mu = \nu$ ist, so setzen wir demgemäß

$$\mathfrak{A}^{11} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathfrak{A}^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathfrak{A}^\mu \end{pmatrix}, \tag{30}$$

wo die Nullen für rechteckige Nullmatrizes stehen und wo $\mathfrak{A}^\varrho$ im Fall $\nu_\varrho = 1$ einfach die einreihige Matrix α_ϱ, für $\nu_\varrho > 1$ aber die folgende ν_ϱ-reihige Matrix ist:

$$\mathfrak{A}^\varrho = \begin{pmatrix} \alpha_\varrho & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_\varrho & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_\varrho & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & \alpha_\varrho \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Machen wir dementsprechend für $p = 2, \ldots, n$ den Ansatz

$$\mathfrak{A}^{p1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}^{p11} & \ldots & \mathfrak{B}^{p1\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{B}^{p\mu 1} & \ldots & \mathfrak{B}^{p\mu\mu} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{A}^{1p} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}^{p11} & \ldots & \mathfrak{C}^{p1\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{C}^{p\mu 1} & \ldots & \mathfrak{C}^{p\mu\mu} \end{pmatrix}, \tag{32}$$

wo $\mathfrak{B}^{p\varrho\sigma}$ und $\mathfrak{C}^{p\varrho\sigma}$ Matrizes mit ν_ϱ Zeilen und ν_σ Spalten sind, so nehmen die Bedingungen II und III in Satz 13 die folgende Gestalt an:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{B}^{p11} & \ldots & \mathfrak{B}^{p1\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{B}^{p\mu 1} & \ldots & \mathfrak{B}^{p\mu\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}^{p11}\mathfrak{A}^1 & \ldots & \mathfrak{B}^{p1\mu}\mathfrak{A}^\mu \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{B}^{p\mu 1}\mathfrak{A}^1 & \ldots & \mathfrak{B}^{p\mu\mu}\mathfrak{A}^\mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^1\mathfrak{B}^{p11} & \ldots & \mathfrak{A}^1\mathfrak{B}^{p1\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{A}^\mu\mathfrak{B}^{p\mu 1} & \ldots & \mathfrak{A}^\mu\mathfrak{B}^{p\mu\mu} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{C}^{p11} & \ldots & \mathfrak{C}^{p1\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{C}^{p\mu 1} & \ldots & \mathfrak{C}^{p\mu\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^1\mathfrak{C}^{p11} & \ldots & \mathfrak{A}^1\mathfrak{C}^{p1\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{A}^\mu\mathfrak{C}^{p\mu 1} & \ldots & \mathfrak{A}^\mu\mathfrak{C}^{p\mu\mu} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathfrak{C}^{p11}\mathfrak{A}^1 & \ldots & \mathfrak{C}^{p1\mu}\mathfrak{A}^\mu \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{C}^{p\mu 1}\mathfrak{A}^1 & \ldots & \mathfrak{C}^{p\mu\mu}\mathfrak{A}^\mu \end{pmatrix}.$$

[8]) Die α_ϱ brauchen natürlich keineswegs alle voneinander verschieden zu sein.

Also ist

$$\mathfrak{B}^{\varrho\sigma} = \mathfrak{B}^{\varrho\sigma}\mathfrak{A}^{\sigma} - \mathfrak{A}^{\varrho}\mathfrak{B}^{\varrho\sigma} \qquad (\varrho, \sigma = 1, \ldots, \mu), \tag{33}$$

$$\mathfrak{C}^{\varrho\sigma} = \mathfrak{A}^{\varrho}\mathfrak{C}^{\varrho\sigma} - \mathfrak{C}^{\varrho\sigma}\mathfrak{A}^{\sigma} \qquad (\varrho, \sigma = 1, \ldots, \mu). \tag{34}$$

Geht man von den Matrizes zu ihren Elementen über, so besagen diese Formeln

$$\mathfrak{b}_{\varkappa\lambda}^{\varrho\sigma} = \mathfrak{b}_{\varkappa\lambda}^{\varrho\sigma}\alpha_{\sigma} + \mathfrak{b}_{\varkappa,\lambda+1}^{\varrho\sigma} - \mathfrak{b}_{\varkappa-1,\lambda}^{\varrho\sigma} - \alpha_{\varrho}\mathfrak{b}_{\varkappa\lambda}^{\varrho\sigma},$$

$$\mathfrak{c}_{\varkappa\lambda}^{\varrho\sigma} = \mathfrak{c}_{\varkappa-1,\lambda}^{\varrho\sigma} + \alpha_{\varrho}\mathfrak{c}_{\varkappa\lambda}^{\varrho\sigma} - \mathfrak{c}_{\varkappa\lambda}^{\varrho\sigma}\alpha_{\sigma} - \mathfrak{c}_{\varkappa,\lambda+1}^{\varrho\sigma},$$

oder etwas anders geschrieben:

$$(1-\alpha_{\sigma}+\alpha_{\varrho})\,\mathfrak{b}_{\varkappa\lambda}^{\varrho\sigma} = \mathfrak{b}_{\varkappa,\lambda+1}^{\varrho\sigma} - \mathfrak{b}_{\varkappa-1,\lambda}^{\varrho\sigma} \quad (\varkappa = 1, \ldots, \nu_{\varrho};\ \lambda = 1, \ldots, \nu_{\sigma}), \tag{35}$$

$$(1-\alpha_{\varrho}+\alpha_{\sigma})\,\mathfrak{c}_{\varkappa\lambda}^{\varrho\sigma} = \mathfrak{c}_{\varkappa-1,\lambda}^{\varrho\sigma} - \mathfrak{c}_{\varkappa,\lambda+1}^{\varrho\sigma} \quad (\varkappa = 1, \ldots, \nu_{\varrho};\ \lambda = 1, \ldots, \nu_{\sigma}). \tag{36}$$

Dabei sind auf der rechten Seite diejenigen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, bei denen der erste untere Index gleich 0 oder der zweite untere Index gleich $\nu_{\sigma}+1$ ist, durch 0 zu ersetzen.

Wenn nun $\alpha_{\sigma} - \alpha_{\varrho} \neq 1$ ist, was insbesondere für $\sigma = \varrho$ zutrifft, so ist nach (35) zunächst $\mathfrak{b}_{1\nu_{\sigma}}^{\varrho\sigma} = 0$, und dann folgt aus (35) weiter der Reihe nach

$$\mathfrak{b}_{2\nu_{\sigma}}^{\varrho\sigma} = 0, \quad \ldots, \quad \mathfrak{b}_{\nu_{\varrho}\nu_{\sigma}}^{\varrho\sigma} = 0,$$

$$\mathfrak{b}_{1,\nu_{\sigma}-1}^{\varrho\sigma} = 0, \quad \mathfrak{b}_{2,\nu_{\sigma}-1}^{\varrho\sigma} = 0, \quad \ldots, \quad \mathfrak{b}_{\nu_{\varrho},\nu_{\sigma}-1}^{\varrho\sigma} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathfrak{b}_{11}^{\varrho\sigma} = 0, \quad \mathfrak{b}_{21}^{\varrho\sigma} = 0, \quad \ldots, \quad \mathfrak{b}_{\nu_{\varrho}1}^{\varrho\sigma} = 0.$$

Das besagt aber

$$\mathfrak{B}^{\varrho\sigma} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha_{\sigma} - \alpha_{\varrho} \neq 1. \tag{37}$$

Analog folgt aus (36)

$$\mathfrak{C}^{\varrho\sigma} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha_{\varrho} - \alpha_{\sigma} \neq 1. \tag{38}$$

Insbesondere sind also die in den Formeln (32) in der Diagonale stehenden Matrizes $\mathfrak{B}^{\varrho\varrho}$ und $\mathfrak{C}^{\varrho\varrho}$ lauter Nullmatrizes.

Nun kommen wir zum Fall $\alpha_{\sigma} - \alpha_{\varrho} = 1$. Die Formel (35) besagt dann

$$\mathfrak{b}_{\varkappa,\lambda+1}^{\varrho\sigma} = \mathfrak{b}_{\varkappa-1,\lambda}^{\varrho\sigma} \quad \text{für} \quad \alpha_{\sigma} - \alpha_{\varrho} = 1. \tag{39}$$

Daher hängt $\mathfrak{b}_{\varkappa\lambda}^{\varrho\sigma}$ nur von der Differenz $\varkappa - \lambda$ ab, und man kann setzen:

$$\mathfrak{b}_{\varkappa\lambda}^{\varrho\sigma} = b_{\varkappa-\lambda}^{\varrho\sigma} \quad \text{für} \quad \alpha_{\sigma} - \alpha_{\varrho} = 1. \tag{40}$$

Nach (39) ist dann aber speziell

$$\mathfrak{b}_{1,\lambda+1}^{\varrho\sigma} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda = 1, 2, \ldots, \nu_{\sigma} - 1,$$

$$\mathfrak{b}_{\varkappa-1,\nu_{\sigma}}^{\varrho\sigma} = 0 \quad \text{für} \quad \varkappa = 2, 3. \ldots, \nu_{\varrho}.$$

Nach (40) kann man dafür schreiben

$$b_{-\lambda}^{p\varrho\sigma} = 0 \quad \text{für } \lambda = 1, 2, \ldots, \nu_\sigma - 1,$$

$$b_{\varkappa-1-\nu_\sigma}^{p\varrho\sigma} = 0 \quad \text{für } \varkappa = 2, 3, \ldots, \nu_\varrho,$$

oder beide Formeln zusammenfassend:

$$b_\iota^{p\varrho\sigma} = 0 \quad \text{für } 1 - \nu_\sigma \leqq \iota \leqq \text{Max}\,(-1, \nu_\varrho - 1 - \nu_\sigma). \tag{41}$$

Die anderen $b_\iota^{p\varrho\sigma}$, also die für

$$\text{Max}\,(-1, \nu_\varrho - 1 - \nu_\sigma) < \iota \leqq \nu_\varrho - 1,$$

bleiben willkürlich. Ihre Anzahl ist bei festem p, ϱ, σ gleich Min $(\nu_\varrho, \nu_\sigma)$.

Analog schließt man aus (36)

$$c_{\varkappa\lambda}^{p\varrho\sigma} = c_{\varkappa-\lambda}^{p\varrho\sigma} \quad \text{für } \alpha_\varrho - \alpha_\sigma = 1,$$

wobei dann

$$c_\iota^{p\varrho\sigma} = 0 \quad \text{für } 1 - \nu_\sigma \leqq \iota \leqq \text{Max}\,(-1, \nu_\varrho - 1 - \nu_\sigma)$$

ist, während die anderen $c_\iota^{p\varrho\sigma}$, also die für

$$\text{Max}\,(-1, \nu_\varrho - 1 - \nu_\sigma) < \iota \leqq \nu_\varrho - 1$$

willkürlich bleiben; ihre Anzahl ist bei festem p, ϱ, σ gleich Min $(\nu_\varrho, \nu_\sigma)$.

Somit gewinnen wir den

Satz 15. *Nimmt man* $\mathfrak{A}^{11}$ *als Kästchenmatrix an*:

$$\mathfrak{A}^{11} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathfrak{A}^\mu \end{pmatrix},$$

bezeichnet man mit α_ϱ *und* ν_ϱ *das Diagonalelement und die Zeilenzahl des Kästchens* $\mathfrak{A}_\varrho$ *und setzt dementsprechend*

$$\mathfrak{A}^{p1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}^{p11} & \ldots & \mathfrak{B}^{p1\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{B}^{p\mu 1} & \ldots & \mathfrak{B}^{p\mu\mu} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{A}^{1p} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}^{p11} & \ldots & \mathfrak{C}^{p1\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{C}^{p\mu 1} & \ldots & \mathfrak{C}^{p\mu\mu} \end{pmatrix},$$

wo die $\mathfrak{B}^{p\varrho\sigma}$ *und* $\mathfrak{C}^{p\varrho\sigma}$ *Matrizes mit* ν_ϱ *Zeilen und* ν_σ *Spalten sind, so nehmen die Bedingungen II, III von Satz* 13 *die folgende Form an*:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^{p\varrho\sigma} &= 0 && \text{für } \alpha_\sigma - \alpha_\varrho \neq 1, \\ \mathfrak{b}_{\varkappa\lambda}^{p\varrho\sigma} &= b_{\varkappa-\lambda}^{p\varrho\sigma} && \text{für } \alpha_\sigma - \alpha_\varrho = 1, \\ \mathfrak{C}^{p\varrho\sigma} &= 0 && \text{für } \alpha_\varrho - \alpha_\sigma \neq 1, \\ \mathfrak{c}_{\varkappa\lambda}^{p\varrho\sigma} &= c_{\varkappa-\lambda}^{p\varrho\sigma} && \text{für } \alpha_\varrho - \alpha_\sigma = 1. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$b_\iota^{p\varrho\sigma} = 0,\ c_\iota^{p\varrho\sigma} = 0 \quad \textit{für } 1 - \nu_\sigma \leqq \iota \leqq \text{Max}\,(-1, \nu_\varrho - 1 - \nu_\sigma),$$

während die anderen $b_i^{p\varrho\sigma}$ *und* $c_i^{p\varrho\sigma}$ *willkürlich bleiben. Bei festem* p, ϱ, σ *mit* $\alpha_\sigma - \alpha_\varrho = 1$ *ist die Anzahl der willkürlich bleibenden* $b_i^{p\varrho\sigma}$ *gleich* $\operatorname{Min}(\nu_\varrho, \nu_\sigma)$ *und ebenso groß ist für* $\alpha_\varrho - \alpha_\sigma = 1$ *die Anzahl der willkürlich bleibenden* $c_i^{p\varrho\sigma}$.

Nun müssen nach Satz 13 die Matrizes A^{p1}, A^{1p} außer II und III noch weitere Bedingungen erfüllen. Diese ergeben für die zunächst noch willkürlich gebliebenen $b_i^{p\varrho\sigma}$, $c_i^{p\varrho\sigma}$ gewisse Einschränkungen, die wir für $\nu = 2$ und $\nu = 3$ in den folgenden Paragraphen vollständig diskutieren werden. Hier soll nur eine wichtige allgemeine Folgerung daraus gezogen werden. Setzt man[9])

$$\sum_{\alpha_\sigma - \alpha_\varrho = 1} \operatorname{Min}(\nu_\varrho, \nu_\sigma) = g$$

und ist $g < n - 1$, so gibt es $n - 1$ Zahlen $u_2, u_3, \ldots, u_n$, die nicht sämtlich verschwinden und so beschaffen sind, daß

$$\sum_{p=2}^{n} u_p \mathsf{A}^{p1} = 0$$

ist. Denn diese Gleichung bedeutet nach Satz 15 für die $n - 1$ Größen u_p ein System von nur g linearen homogenen Bedingungsgleichungen

$$\sum_{p=2}^{n} u_p b_i^{p\varrho\sigma} = 0,$$

ist also stets erfüllbar. Nunmehr folgt aber aus der Bedingung VII von Satz 13 für $r = q$, wenn man mit u_p multipliziert und nach p summiert,

$$0 = \sum_{p=2}^{n} u_p e_{pq} \mathsf{A}^{1q} = u_q \mathsf{A}^{1q}.$$

Da nun die u_q nicht sämtlich verschwinden, so ist wenigstens ein A^{1q} gleich 0, und aus Satz 14 folgt dann, daß $\Phi(X)$ die in Satz 5 angegebene Lösung ist. Also gilt

Satz 16. *Wenn für eine in der Umgebung von* $X = E$ *analytische Lösung der Gleichung* (5) *mit* $\Phi(E) = \mathsf{E}$ *die Matrix*

$$\mathsf{A}^{11} - \lambda \mathsf{E} = \left\{\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{11}}\right\}_{X=E} - \lambda \mathsf{E}$$

die Elementarteiler

$$(\lambda - \alpha_1)^{\nu_1}, \ (\lambda - \alpha_2)^{\nu_2}, \ \ldots, \ (\lambda - \alpha_\mu)^{\nu_\mu}$$

hat und wenn

$$\sum_{\alpha_\sigma - \alpha_\varrho = 1} \operatorname{Min}(\nu_\varrho, \nu_\sigma) < n - 1$$

---

[9]) Wenn $\alpha_\sigma - \alpha_\varrho$ für kein Indexpaar ϱ, σ gleich 1 ist, so ist die folgende Summe leer, also $g = 0$ zu setzen.

ist, so ist $\Phi(X)$ *notwendig die bereits in Satz* 5 *angegebene Lösung*

$$\Phi(X) = |X|^{\mathsf{A}} = e^{\mathsf{A}\log|X|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{A}\log|X|)^k}{k!} \quad \text{mit} \quad \mathsf{A} = \mathsf{A}^{11}.$$

Bei der Formulierung dieses Satzes durfte die seither gemachte Voraussetzung, daß A^{11} eine Kästchenmatrix ist, weggelassen werden, weil sie überflüssig ist. Betrachtet man nämlich statt $\Phi(X)$ die äquivalente Lösung $\Gamma^{-1}\Phi(X)\Gamma$ und wählt Γ so, daß $\Gamma^{-1}\mathsf{A}^{11}\Gamma$ eine Kästchenmatrix ist (wobei natürlich $\Gamma^{-1}\mathsf{A}^{11}\Gamma - \lambda\mathsf{E}$ dieselben Elementarteiler wie $\mathsf{A}^{11} - \lambda\mathsf{E}$ hat), so ist nach dem Bewiesenen

$$\Gamma^{-1}\Phi(X)\Gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Gamma^{-1}\mathsf{A}^{11}\Gamma\log|X|)^k}{k!} = \Gamma^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{A}^{11}\log|X|)^k}{k!}\Gamma,$$

also auch

$$\Phi(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{A}^{11}\log|X|)^k}{k!},$$

wie behauptet.

Nun seien $\beta_1, \ldots, \beta_r$ die charakteristischen Wurzeln der Matrix A^{11}, d. h. die Wurzeln der Gleichung $|\mathsf{A}^{11} - \lambda\mathsf{E}| = 0$. Sie decken sich natürlich mit den Zahlen

$$\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_1}_{\nu_1}, \quad \underbrace{\alpha_2, \ldots, \alpha_2}_{\nu_2}, \quad \ldots, \quad \underbrace{\alpha_\mu, \ldots, \alpha_\mu}_{\nu_\mu} \tag{42}$$

in der seitherigen Bezeichnung. Von den Differenzen $\beta_\lambda - \beta_\varkappa$ mögen genau h den Wert 1 haben. Nach dem im nächsten Paragraphen bewiesenen Hilfssatz ist

$$h \leqq \frac{\nu^2}{4}.$$

Für ein gewisses Indexpaar ϱ, σ sei $\alpha_\sigma - \alpha_\varrho = 1$. Da nun α_ϱ bzw. α_σ genau ν_ϱ- bzw. ν_σ-mal in der Reihe (42) aufgeschrieben ist, so liefert das Indexpaar ϱ, σ genau $\nu_\varrho \cdot \nu_\sigma$ Indexpaare $\varkappa, \lambda$, für die $\beta_\lambda - \beta_\varkappa = 1$ ist. Folglich ist

$$h = \sum_{\alpha_\sigma - \alpha_\varrho = 1} (\nu_\varrho \nu_\sigma),$$

also gewiß

$$\frac{\nu^2}{4} \geqq h \geqq \sum_{\alpha_\sigma - \alpha_\varrho = 1} \mathrm{Min}\,(\nu_\varrho, \nu_\sigma).$$

Aus Satz 16 folgt daher

Satz 17. *Für* $\frac{\nu^2}{4} < n - 1$ *hat die Gleichung* (5) *keine anderen in der Umgebung von* $X = E$ *analytischen Lösungen, für die* $\Phi(E) = \mathsf{E}$ *ist, als die in Satz* 5 *angegebenen.*

§ 7.

Beweis eines in § 6 benutzten Hilfssatzes.

Hilfssatz. *Für $k = 2, 3, 4, \ldots$ sei eine Funktion $f(k)$ folgendermaßen definiert: Es gibt k (vielleicht teilweise einander gleiche) Zahlen $\varrho_1, \ldots, \varrho_k$ derart, daß von den Differenzen $\varrho_m - \varrho_l$ genau $f(k)$ den Wert 1 haben; es gibt aber keine k Zahlen derart, daß mehr als $f(k)$ Differenzen den Wert 1 haben. Dann ist*[10]) $f(k) = \left[\frac{k^2}{4}\right]$.

Beweis. Für $k = 2r$ betrachte man die k Zahlen

$$\varrho_1 = 0, \ldots, \varrho_r = 0, \quad \varrho_{r+1} = 1, \ldots, \varrho_{2r} = 1.$$

Hier gibt es r^2 Differenzen $\varrho_m - \varrho_l$, die gleich 1 sind, nämlich die für

$$l = 1, 2, \ldots, r; \quad m = r+1, r+2, \ldots, 2r.$$

Also ist $f(2r) \geqq r^2$. Für $k = 2r+1$ betrachte man die k Zahlen

$$\varrho_1 = 0, \ \ldots, \ \varrho_r = 0, \ \varrho_{r+1} = 1, \ \ldots, \ \varrho_{2r+1} = 1.$$

Hier gibt es $r(r+1)$ Differenzen $\varrho_m - \varrho_l$, die gleich 1 sind; also ist $f(2r+1) \geqq r(r+1)$. Beide Resultate zusammenfassend erhält man

$$f(k) \geqq \left[\frac{k^2}{4}\right]. \tag{I}$$

Nun seien die k Zahlen $\varrho_1, \ldots, \varrho_k$ so gewählt, daß $f(k)$ Differenzen gleich 1 sind. Für jede Zahl λ aus der Reihe $1, \ldots, k$ betrachte man die Menge M_λ derjenigen Indizes $\varkappa$, für welche $\varrho_\varkappa$ den Wert ϱ_λ oder $\varrho_\lambda + 2$ hat. Sei etwa M_1 die größte dieser Mengen oder *eine* der größten, falls es mehrere gleich große maximale gibt. Bei verschiedenen zulässigen Wahlen der Zahlen $\varrho_1, \ldots, \varrho_k$ kann die so definierte Menge M_1 vielleicht verschieden groß ausfallen. Wir denken uns $\varrho_1, \ldots, \varrho_k$ so gewählt, daß M_1 auch in dieser Hinsicht maximal ist. Für s ($\geqq 1$) Indizes $\varkappa$ aus M_1 sei $\varrho_\varkappa$ gleich ϱ_1, für t ($\geqq 0$) Indizes $\varkappa$ aus M_1 sei $\varrho_\varkappa$ gleich $\varrho_1 + 2$. Die k Zahlen $\varrho_\varkappa$ sind dann bei geeigneter Numerierung die folgenden:

$$\underbrace{\varrho_1, \ldots, \varrho_1}_{s}, \quad \underbrace{\varrho_1 + 2, \ldots, \varrho_1 + 2}_{t}, \quad \varrho_{s+t+1}, \ldots, \varrho_k$$

Wenn nun etwa $\varrho_{s+t+1} \neq \varrho_1 + 1$ ist, so ersetze man ϱ_{s+t+1} durch $\varrho_1 + 1$. Dadurch werden $s + t$ Differenzen gewonnen, die gleich 1 sind, andererseits aber auch höchstens $s + t$ solche Differenzen verloren, nämlich diejenigen, die mit ϱ_{s+t+1} und den etwaigen $\varrho_\varkappa$, die gleich $\varrho_{s+t+1} \pm 1$ sind und deren Anzahl, weil M_1 maximal gewählt war, höchstens gleich $s + t$ ist, gebildet waren. Durch diese Operation ist daher die Anzahl der fraglichen

[10]) Das Zeichen $[m]$ bedeutet hier die größte in m enthaltene ganze Zahl.

Differenzen nicht verkleinert worden, sie ist also immer noch gleich $f(k)$. Nun kann man ebenso $\varrho_{s+t+2}, \ldots, \varrho_k$ sämtlich durch $\varrho_1 + 1$ ersetzen; die Anzahl der fraglichen Differenzen bleibt, weil M_1 in doppelter Hinsicht maximal war, immer gleich $f(k)$. Man hat dann schließlich die folgende Menge gewonnen:

$$\underbrace{\varrho_1, \ldots, \varrho_1}_{s}, \quad \underbrace{\varrho_1 + 2, \ldots, \varrho_1 + 2}_{t}, \quad \underbrace{\varrho_1 + 1, \ldots, \varrho_1 + 1}_{k-s-t}.$$

Hier kann man augenscheinlich $(k - s - t)(s + t)$ Differenzen bilden, die gleich 1 sind. Daher ist

$$\text{(II)} \qquad f(k) = (k - s - t)(s + t) = \frac{k^2}{4} - \left(\frac{k}{2} - s - t\right)^2 \leqq \frac{k^2}{4}.$$

Mit (I) und (II) ist der Hilfssatz bewiesen.

§ 8.

Der Fall $\nu = 2$.

Vorbemerkung. Betrachtet man an Stelle der Lösung $\Phi(X)$ mit $\Phi(E) = \mathsf{E}$ die Lösung $\Psi(X) = |X|^\alpha \Phi(X)$ (Satz 4), so tritt an Stelle der Matrix A^{pq} die folgende:

$$\left\{\frac{\partial \Psi(X)}{\partial x_{pq}}\right\}_{X=E} = \left\{|X|^\alpha \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{pq}} + \alpha |X|^{\alpha-1} \frac{\partial |X|}{\partial x_{pq}} \Phi(X)\right\}_{X=E} = \mathsf{A}^{pq} + \alpha e_{pq} \mathsf{E}.$$

Daher bleibt A^{pq} für $p \neq q$ unverändert, während an Stelle von A^{pp} die Matrix $\mathsf{A}^{pp} + \alpha \mathsf{E}$ tritt, deren charakteristische Wurzeln um α größer sind als die von A^{pp}. Man kann daher insbesondere durch geeignete Wahl von α eine beliebige der charakteristischen Wurzeln von A^{11} zu 0 machen. Außerdem darf A^{11} natürlich als Kästchenmatrix angenommen werden.

Wir wollen jetzt für kleine Werte von ν die in der Umgebung von $X = E$ analytischen, aber in Satz 5 nicht enthaltenen irreduziblen Lösungen der Gleichung (5) vollständig ermitteln. Nach Satz 6 ist dabei $\Phi(E) = \mathsf{E}$.

Sei zunächst $\nu = 2$. Nach Satz 17 kommt dann, nachdem der Fall $n = 1$ bereits in § 4 erledigt ist, wobei sich keine in Satz 5 nicht enthaltene Lösung ergab (Satz 11), nur der Fall $n = 2$ in Frage, und für die charakteristischen Wurzeln α_1, α_2 der Matrix A^{11} muß nach Satz 16 bei passender Anordnung die Beziehung gelten: $\alpha_1 - \alpha_2 = 1$. Nach der Vorbemerkung kann man $\alpha_2 = 0$, also $\alpha_1 = 1$ annehmen, so daß A^{11} als Kästchenmatrix die folgende ist:

$$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 15 ist dann weiter

$$\mathfrak{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{A}^{21}\mathfrak{A}^{12} - \mathfrak{A}^{12}\mathfrak{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cb & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix},$$

und daher gehen die Bedingungen VI, VII von Satz 13 über in[11])

$$\begin{pmatrix} -cb & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -cb & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

das heißt $bcb = b$,

$$\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -cb & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -cb & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

das heißt $cbc = c$.

Nun ist $b \neq 0$, $c \neq 0$, weil es sich andernfalls nach Satz 14 um die jetzt ausgeschlossene in Satz 5 angegebene Lösung handeln würde. Die letzten beiden Formeln sind daher gleichbedeutend und besagen: $bc = 1$. Infolgedessen ist

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Phi(X)\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine zu $\Phi(X)$ äquivalente Lösung, und wenn man zu dieser übergeht und sie wieder mit $\Phi(X)$ bezeichnet, dann gehen $\mathfrak{A}^{21}$ und $\mathfrak{A}^{12}$ über in

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

während $\mathfrak{A}^{11}$ unverändert bleibt. Man darf daher von vornherein

$$\mathfrak{A}^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

annehmen, und aus Formel I in Satz 13 folgt dann

$$\mathfrak{A}^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Differentialgleichungen (13) lauten daher

$$|X|\frac{\partial \Phi}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}}\Phi \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}}\Phi \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|X|\frac{\partial \Phi}{\partial x_{s2}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}}\Phi \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}}\Phi \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

[11]) Die Formeln IV, V in Satz 13 kommen für $n = 2$ nicht in Betracht.

oder wenn man von den Matrizes zu ihren Elementen übergeht,

$$|X|\frac{\partial \varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}}\varphi_{\varrho 1} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}}\varphi_{\varrho 2}, \quad \frac{\partial \varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s1}} = 0, \tag{43}$$

$$\frac{\partial \varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s2}} = 0, \quad |X|\frac{\partial \varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s2}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}}\varphi_{\varrho 1} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}}\varphi_{\varrho 2}. \tag{44}$$

Nach der ersten Gleichung (44) und der zweiten Gleichung (43) ist

$$\varphi_{\varrho 1} = \varphi_{\varrho 1}(x_{11}, x_{21}), \quad \varphi_{\varrho 2} = \varphi_{\varrho 2}(x_{12}, x_{22}). \tag{45}$$

Ferner folgt aus der ersten Gleichung (43) und der zweiten Gleichung (44)

$$\sum_{s=1}^{2} x_{s1}\frac{\partial \varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s1}} = \varphi_{\varrho 1}, \quad \sum_{s=1}^{2} x_{s2}\frac{\partial \varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s2}} = \varphi_{\varrho 2}, \tag{46}$$

$$\frac{\partial \varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial \varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s2}}. \tag{47}$$

In (47) ist wegen (45) die linke Seite frei von x_{12}, x_{22} und die rechte Seite frei von x_{11}, x_{21}; also ist

$$\frac{\partial \varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial \varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s2}} = \alpha^{\varrho s} = \text{konst.}$$

Hieraus folgt durch Integration, weil $\varphi_{\varrho 1}$ und $\varphi_{\varrho 2}$ wegen (46) homogene Funktionen ihrer Argumente sind,

$$\varphi_{\varrho 1} = \alpha^{\varrho 1}x_{11} + \alpha^{\varrho 2}x_{21}, \quad \varphi_{\varrho 2} = \alpha^{\varrho 1}x_{12} + \alpha^{\varrho 2}x_{22}.$$

Da nun $\Phi(E) = \mathsf{E}$ sein soll, muß

$$\alpha^{11} = 1, \quad \alpha^{21} = 0, \quad \alpha^{12} = 0, \quad \alpha^{22} = 1$$

sein und man erhält

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = X. \tag{48}$$

Diese (übrigens ohne weiteres als Lösung erkennbare) Lösung von (5) ist irreduzibel. Denn wenn es eine konstante Matrix Γ gäbe derart, daß $\Gamma^{-1}X\Gamma$ eine Diagonalmatrix ist, so müßten in der Diagonale einerseits lineare Polynome der x_{pq} stehen, andererseits aber die charakteristischen Wurzeln der Matrix X, was sich widerspricht. Somit gewinnen wir den

Satz 18. *Im Fall $\nu = 2$ hat die Gleichung* (5) *in der Umgebung von $X = E$ analytische, in Satz* 5 *aber nicht enthaltene irreduzible Lösungen nur für $n = 2$; und zwar sind es dann die Lösungen*

$$\Phi(X) = |X|^{\alpha}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = |X|^{\alpha}X$$

und die damit äquivalenten.

§ 9.

Der Fall $\nu = 3$.

Sei jetzt $\nu = 3$. Im Fall eines dreifachen Elementarteilers von $\mathfrak{A}^{11} - \lambda\mathfrak{E}$ ist die Summe in Satz 16 leer, so daß die Lösung die in Satz 5 angegebene Form hat. Im Fall eines zweifachen Elementarteilers muß, damit die Summe nicht abermals leer ist, bei passender Numerierung der charakteristischen Wurzeln $\alpha_1 - \alpha_2 = 1$ sein, so daß man für die Kästchenmatrix $\mathfrak{A}^{11}$ die folgenden beiden Möglichkeiten hat:

$$\begin{pmatrix} \alpha_2+1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_2+1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \alpha_2+1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Im ersten bzw. zweiten Fall ist nach Satz 15

$$\mathfrak{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ b&0&0 \end{pmatrix},\ \mathfrak{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&c \\ 0&0&0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \mathfrak{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ b&0&0 \end{pmatrix},\ \mathfrak{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0&c&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}.$$

In beiden Fällen erweist sich die für $p = q = r = 2$ ausgerechnete linke Seite der Formel VI in Satz 13 als 0. Daher ist $\mathfrak{A}^{21} = 0$, so daß nach Satz 14 die Lösung wieder die in Satz 5 angegebene Form hat.

Somit bleibt nur der Fall von drei einfachen Elementarteilern. Damit die Summe in Satz 16 nicht leer ist, muß es zwei charakteristische Wurzeln α_ϱ, α_σ geben, für die $\alpha_\varrho - \alpha_\sigma = 1$ ist. Nach der Vorbemerkung zu § 8 darf man eine beliebige charakteristische Wurzel gleich 0 annehmen und darf daher die Kästchenmatrix $\mathfrak{A}^{11}$ in einer der folgenden vier Gestalten ansetzen, wobei wir jedesmal auch die Matrizes $\mathfrak{A}^{p1}$, $\mathfrak{A}^{1p}$, deren Gestalt durch Satz 15 bestimmt ist, angegeben haben:

A) $$\mathfrak{A}^{11} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&\alpha \end{pmatrix},\quad \mathfrak{A}^{p1} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ b^p&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix},\quad \mathfrak{A}^{1p} = \begin{pmatrix} 0&c^p&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix};$$

B) $$\mathfrak{A}^{11} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix},\quad \mathfrak{A}^{p1} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ b_1^p&0&0 \\ b_2^p&0&0 \end{pmatrix},\quad \mathfrak{A}^{1p} = \begin{pmatrix} 0&c_1^p&c_2^p \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix};$$

C) $$\mathfrak{A}^{11} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix},\quad \mathfrak{A}^{p1} = \begin{pmatrix} 0&b_2^p&b_3^p \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix},\quad \mathfrak{A}^{1p} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ c_2^p&0&0 \\ c_3^p&0&0 \end{pmatrix};$$

D) $$\mathfrak{A}^{11} = \begin{pmatrix} 2&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix},\quad \mathfrak{A}^{p1} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ b_1^p&0&0 \\ 0&b_2^p&0 \end{pmatrix},\quad \mathfrak{A}^{1p} = \begin{pmatrix} 0&c_1^p&0 \\ 0&0&c_2^p \\ 0&0&0 \end{pmatrix}.$$

In den Fällen B), C), D) hat die Summe in Satz 16 den Wert 2, so daß nach diesem Satz nur die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ interessieren. Im Fall A) ist $\alpha \neq -1, 0, 1, 2$ zu denken; die Summe in Satz 16 hat den Wert 1, so daß nur der Fall $n = 2$ interessiert. Aber auch bei den ausgeschlossenen Werten von α bleibt die folgende Überlegung gültig und sie wird erlauben, bei den Fällen B), C), D) einige Rechnung zu sparen.

Im Fall A) hat, weil $n = 2$ ist, auch p nur den einen Wert 2, so daß wir den Index p bei b und c weglassen können. Die Formel VI in Satz 13 ergibt dann bei Ausrechnung: $bcb = b$. Da aber $b \neq 0$, weil sonst $\mathfrak{A}^{21} = 0$ wäre, so daß es sich nach Satz 14 um die jetzt ausgeschlossene in Satz 5 angegebene Lösung handeln würde, so ist $bc = 1$. Nun hat die Gleichung (5) gewiß die reduzible Lösung (vgl. Satz 18)

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & |X|^{\alpha} \end{pmatrix}$$

und daher auch die wegen $bc = 1$ damit äquivalente Lösung

$$\Phi^{1}(X) = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & |X|^{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & cx_{12} & 0 \\ bx_{21} & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & |X|^{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Für diese sind aber $\mathfrak{A}^{11}$, $\mathfrak{A}^{21}$, $\mathfrak{A}^{12}$ gerade die oben in A) angegebenen Matrizes, und da auch $\mathfrak{A}^{22}$ dadurch nach Satz 13, Formel I eindeutig bestimmt ist, so sind die Differentialgleichungen für unsere gesuchte Funktion $\Phi(X)$ dieselben wie die für die Funktion $\Phi^{1}(X)$. Wegen Satz 10 ist daher $\Phi(X) = \Phi^{1}(X)$. Somit liefert der Fall A) keine irreduzible Lösung.

Wir kommen zum Fall B). Die (nur für $n = 3$ in Betracht kommenden) Bedingungen IV, V in Satz 13 sind dann von selbst erfüllt, da die ausgerechneten Matrixprodukte beiderseits gleich 0 sind. Die Bedingungen VI, VII liefern bei Ausrechnung

$$(49) \quad \begin{cases} b_1^p (c_1^q b_1^r + c_2^q b_2^r) + b_1^r (c_1^q b_1^p + c_2^q b_2^p) = e_{rq} b_1^p + e_{pq} b_1^r, \\ b_2^p (c_1^q b_1^r + c_2^q b_2^r) + b_2^r (c_1^q b_1^p + c_2^q b_2^p) = e_{rq} b_2^p + e_{pq} b_2^r, \\ (c_1^r b_1^p + c_2^r b_2^p) c_1^q + (c_1^q b_1^p + c_2^q b_2^p) c_1^r = e_{pr} c_1^q + e_{pq} c_1^r, \\ (c_1^r b_1^p + c_2^r b_2^p) c_2^q + (c_1^q b_1^p + c_2^q b_2^p) c_2^r = e_{pr} c_2^q + e_{pq} c_2^r. \end{cases}$$

Die ersten beiden Formeln ergeben speziell für $r = p$:

$$b_1^p (c_1^q b_1^p + c_2^q b_2^p - e_{pq}) = 0, \quad b_2^p (c_1^q b_1^p + c_2^q b_2^p - e_{pq}) = 0.$$

Nun sind b_1^p, b_2^p nicht beide gleich 0 (wieder wegen Satz 14). Daher muß

$$(50) \quad c_1^q b_1^p + c_2^q b_2^p = e_{pq}$$

sein, und damit sind dann alle Formeln (49) von selbst erfüllt.

Wegen (50) ist $b_1^2 c_1^2 + b_2^2 c_2^2 = 1$. Daher ist zur gesuchten Matrix $\Phi(X)$ die folgende äquivalent:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1^2 & c_2^2 \\ 0 & -b_2^2 & b_1^2 \end{pmatrix} \Phi(X) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1^2 & -c_2^2 \\ 0 & b_2^2 & c_1^2 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen zu dieser übergehen und sie fortan mit $\Phi(X)$ bezeichnen. Dann gehen $\mathfrak{A}^{11}, \mathfrak{A}^{21}, \ldots$ wegen (50) über in

$$\mathfrak{A}^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{A}^{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(nur für } n = 3\text{)},$$

wobei

$$\beta = b_1^2 b_2^3 - b_1^3 b_2^2, \quad \gamma = c_1^2 c_2^3 - c_1^3 c_2^2$$

ist, also nach (50)

$$\beta\gamma = \begin{vmatrix} b_1^2 & b_2^2 \\ b_1^3 & b_2^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1^2 & c_2^2 \\ c_1^3 & c_2^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Im Fall $n = 2$ fällt das unter die Formeln A) mit $\alpha = 0$, so daß nach dem Bewiesenen keine irreduzible Lösung herauskommt.

Im Fall $n = 3$ gehen wir abermals zu einer äquivalenten Lösung über, nämlich zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \Phi(X) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \text{(äquivalent wegen } \gamma\beta = 1\text{)}$$

und bezeichnen diese fortan mit $\Phi(X)$. Dann gehen $\mathfrak{A}^{11}, \mathfrak{A}^{21}, \ldots$ über in

$$\mathfrak{A}^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{A}^{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und die Formel I in Satz 13 liefert weiter

$$\mathfrak{A}^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Differentialgleichungen (13) lauten daher

$$|X|\frac{\partial\Phi}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial|X|}{\partial x_{s1}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \frac{\partial|X|}{\partial x_{s2}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \frac{\partial|X|}{\partial x_{s3}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$|X|\frac{\partial\Phi}{\partial x_{s2}} = \frac{\partial|X|}{\partial x_{s1}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \frac{\partial|X|}{\partial x_{s2}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \frac{\partial|X|}{\partial x_{s3}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$|X|\frac{\partial\Phi}{\partial x_{s3}} = \frac{\partial|X|}{\partial x_{s1}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \frac{\partial|X|}{\partial x_{s2}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} + \frac{\partial|X|}{\partial x_{s3}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

oder, indem man von den Matrizes zu ihren Elementen übergeht,

$$|X|\frac{\partial\varphi_{\varrho1}}{\partial x_{s1}} = \sum_{q=1}^{3}\frac{\partial|X|}{\partial x_{sq}}\varphi_{\varrho q},\quad \frac{\partial\varphi_{\varrho2}}{\partial x_{s1}} = 0,\quad \frac{\partial\varphi_{\varrho3}}{\partial x_{s1}} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi_{\varrho1}}{\partial x_{s2}} = 0,\quad |X|\frac{\partial\varphi_{\varrho2}}{\partial x_{s2}} = \sum_{q=1}^{3}\frac{\partial|X|}{\partial x_{sq}}\varphi_{\varrho q},\quad \frac{\partial\varphi_{\varrho3}}{\partial x_{s2}} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi_{\varrho1}}{\partial x_{s3}} = 0,\quad \frac{\partial\varphi_{\varrho2}}{\partial x_{s3}} = 0,\quad |X|\frac{\partial\varphi_{\varrho3}}{\partial x_{s3}} = \sum_{q=1}^{3}\frac{\partial|X|}{\partial x_{sq}}\varphi_{\varrho q}.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich sofort:

$$(51)\qquad \begin{cases}\varphi_{\varrho1} = \varphi_{\varrho1}(x_{11}, x_{21}, x_{31}),\\ \varphi_{\varrho2} = \varphi_{\varrho2}(x_{12}, x_{22}, x_{32}),\\ \varphi_{\varrho3} = \varphi_{\varrho3}(x_{13}, x_{23}, x_{33}),\end{cases}$$

$$(52)\qquad \sum_{s=1}^{3}x_{s1}\frac{\partial\varphi_{\varrho1}}{\partial x_{s1}} = \varphi_{\varrho1},\quad \sum_{s=1}^{3}x_{s2}\frac{\partial\varphi_{\varrho2}}{\partial x_{s2}} = \varphi_{\varrho2},\quad \sum_{s=1}^{3}x_{s3}\frac{\partial\varphi_{\varrho3}}{\partial x_{s3}} = \varphi_{\varrho3},$$

$$(53)\qquad \frac{\partial\varphi_{\varrho1}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial\varphi_{\varrho2}}{\partial x_{s2}} = \frac{\partial\varphi_{\varrho3}}{\partial x_{s3}}.$$

Aus (53) und (51) folgt dann

$$\frac{\partial\varphi_{\varrho1}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial\varphi_{\varrho2}}{\partial x_{s2}} = \frac{\partial\varphi_{\varrho3}}{\partial x_{s3}} = \alpha^{\varrho s} = \text{konst.}$$

Hieraus erhält man durch Integration, weil $\varphi_{\varrho1}$, $\varphi_{\varrho2}$, $\varphi_{\varrho3}$ nach (52) homogene Funktionen ihrer Argumente sind,

$$\varphi_{\varrho\sigma} = \sum_{s=1}^{3}\alpha^{\varrho s}x_{s\sigma}.$$

Speziell für $X = E$ ergibt sich daraus, weil $\Phi(E) = \mathsf{E}$ sein soll,

$$\varepsilon_{\varrho\sigma} = \sum_{s=1}^{3}\alpha^{\varrho s}e_{s\sigma} = \alpha^{\varrho\sigma}.$$

Daher ist $\alpha^{\varrho\sigma} = \varepsilon_{\varrho\sigma} = e_{\varrho\sigma}$, und man erhält:

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = X. \tag{54}$$

Diese Lösung ist irreduzibel. Denn wenn es eine konstante Matrix Γ gäbe derart, daß

$$\Gamma^{-1} X \Gamma = \begin{pmatrix} \psi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{22} & \psi_{23} \\ 0 & \psi_{32} & \psi_{33} \end{pmatrix}$$

ist, dann müßte ψ_{11} einerseits ein lineares Polynom der x_{pq} sein, andererseits aber auch eine charakteristische Wurzel der Matrix X, was sich widerspricht.

Wir kommen zum Fall C). Die Bedingungen IV, V in Satz 13 sind wieder von selbst erfüllt. Die Bedingungen VI, VII liefern bei Ausrechnung

$$\begin{cases} (b_2^p c_2^q + b_3^p c_3^q)\, b_2^r + (b_2^r c_2^q + b_3^r c_3^q)\, b_2^p = e_{rq}\, b_2^p + e_{pq}\, b_2^r, \\ (b_2^p c_2^q + b_3^p c_3^q)\, b_3^r + (b_2^r c_2^q + b_3^r c_3^q)\, b_3^p = e_{rq}\, b_3^p + e_{pq}\, b_3^r, \\ c_2^r (b_2^p c_2^q + b_3^p c_3^q) + c_2^q (b_2^p c_2^r + b_3^p c_3^r) = e_{pr}\, c_2^q + e_{pq}\, c_2^r, \\ c_3^r (b_2^p c_2^q + b_3^p c_3^q) + c_3^q (b_2^p c_2^r + b_3^p c_3^r) = e_{pr}\, c_3^q + e_{pq}\, c_3^r. \end{cases} \tag{55}$$

Die ersten beiden Formeln ergeben speziell für $r = p$

$$(b_2^p c_2^q + b_3^p c_3^q - e_{pq})\, b_2^p = 0, \quad (b_2^p c_2^q + b_3^p c_3^q - e_{pq})\, b_3^p = 0.$$

Nun sind b_2^p, b_3^p nicht beide gleich 0 (wieder wegen Satz 14). Daher muß

$$b_2^p c_2^q + b_3^p c_3^q = e_{pq} \tag{56}$$

sein, und damit sind dann alle Formeln (55) von selbst erfüllt.

Wegen (56) ist $b_2^2 c_2^2 + b_3^2 c_3^2 = 1$. Daher ist zur gesuchten Matrix $\Phi(X)$ die folgende äquivalent:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b_2^2 & -b_3^2 \\ 0 & c_3^2 & -c_2^2 \end{pmatrix} \Phi(X) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2^2 & b_3^2 \\ 0 & -c_3^2 & -b_2^2 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen zu dieser übergehen und sie fortan mit $\Phi(X)$ bezeichnen. Dann gehen $\mathfrak{A}^{11}$, $\mathfrak{A}^{21}$, ... unter Berücksichtigung von (56) über in

$$\mathfrak{A}^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{A}^{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(nur für } n = 3\text{)},$$

wobei

$$\beta = b_2^2 b_3^3 - b_2^3 b_3^2, \quad \gamma = c_2^2 c_3^3 - c_2^3 c_3^2$$

ist, also unter Benutzung von (56)

$$\beta\gamma = \begin{vmatrix} b_2^2 & b_3^2 \\ b_2^3 & b_3^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_2^2 & c_3^2 \\ c_2^3 & c_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Im Fall $n = 2$ fällt das, wenn man durch Vertauschung der ersten zwei Zeilen und Spalten zu einer äquivalenten Lösung übergeht, unter die Formeln A) mit $\alpha = 1$, so daß wieder keine irreduzible Lösung herauskommt.

Im Fall $n = 3$ gehen wir ebenfalls zu einer äquivalenten Lösung über, nämlich zu

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi(X) \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{äquivalent wegen } \gamma\beta = 1)$$

und bezeichnen diese fortan mit $\Phi(X)$. Dann gehen $\mathfrak{A}^{11}, \mathfrak{A}^{21}, \ldots$ über in

$$\mathfrak{A}^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{A}^{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und die Formel I in Satz 13 liefert weiter

$$\mathfrak{A}^{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Integration der Differentialgleichungen wollen wir diesmal durch einen Kunstgriff umgehen. Man sieht nämlich ohne weiteres (für beliebiges ν und n), daß mit $\Phi(X)$ stets auch $\Phi(|X|X'^{-1})$, wo X' die transponierte Matrix von X ist, eine irreduzible Lösung von (5) ist. Aus der in (54) gegebenen Lösung $\Phi(X) = X$ entsteht so die Lösung

$$(57)\ \Phi^1(X) = |X|X'^{-1} = \begin{pmatrix} x_{22}x_{33} - x_{23}x_{32} & x_{23}x_{31} - x_{21}x_{33} & x_{21}x_{32} - x_{22}x_{31} \\ x_{32}x_{13} - x_{33}x_{12} & x_{33}x_{11} - x_{31}x_{13} & x_{31}x_{12} - x_{32}x_{11} \\ x_{12}x_{23} - x_{13}x_{22} & x_{13}x_{21} - x_{11}x_{23} & x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} \end{pmatrix}.$$

Bildet man nun von dieser Lösung die Matrizes $\mathfrak{A}^{pq}$, so sind es genau die oben erhaltenen. Die Differentialgleichungen für die gesuchte Matrix $\Phi(X)$ sind

daher dieselben wie für die Matrix $\Phi^1(X)$ und folglich ist nach Satz 10 $\Phi(X) = \Phi^1(X)$.

Schließlich kommen wir zum Fall D). Bei diesem liefern die Bedingungen VI, VII in Satz 13 bei Ausrechnung

$$(58)\quad \begin{cases} (b_1^p c_1^q - b_2^p c_2^q)\, b_1^r + b_1^r c_1^q b_1^p = e_{rq} b_1^p + e_{pq} b_1^r, \\ b_2^p c_2^q b_2^r - b_2^r (b_1^p c_1^q - b_2^p c_2^q) = e_{rq} b_2^p + e_{pq} b_2^r, \\ c_1^r (b_1^p c_1^q - b_2^p c_2^q) + b_1^p c_1^q c_1^r = e_{pr} c_1^q + e_{pq} c_1^r, \\ c_2^r b_2^p c_2^q - (b_1^p c_1^q - b_2^p c_2^q) c_2^r = e_{pr} c_2^q + e_{pq} c_2^r. \end{cases}$$

Die ersten beiden Formeln für $r = p$ und die letzten beiden für $r = q$ besagen speziell

$$(59)\quad \begin{cases} (2\, b_1^p c_1^q - b_2^p c_2^q - 2\, e_{pq})\, b_1^p = 0, \\ (2\, b_2^p c_2^q - b_1^p c_1^q - 2\, e_{pq})\, b_2^p = 0, \\ (2\, b_1^p c_1^q - b_2^p c_2^q - 2\, e_{pq})\, c_1^q = 0, \\ (2\, b_2^p c_2^q - b_1^p c_1^q - 2\, e_{pq})\, c_2^q = 0. \end{cases}$$

Nun dürfen b_1^p, b_2^p für kein p beide zugleich verschwinden, ebenso c_1^p, c_2^p (wieder wegen Satz 14). Daraus läßt sich folgern, daß nur der Fall $n = 2$ möglich ist. Denn angenommen, es sei $n = 3$. Wenn dann erstens $b_1^2 = 0$, $b_2^2 \neq 0$, so folgt aus der zweiten Gleichung (59) für $p = 2$, $q = 3$: $c_2^3 = 0$; sodann aus der zweiten Gleichung (58) für $p = 2$, $q = r = 3$: $0 = b_2^2$ im Widerspruch mit der Voraussetzung. Wenn zweitens $b_1^2 \neq 0$, $b_2^2 = 0$, so folgt aus der ersten Gleichung (59) für $p = 2$, $q = 3$: $c_1^3 = 0$; sodann aus der dritten Gleichung (58) für $q = 2$, $p = r = 3$: $0 = c_1^2$, wodurch sich ein Widerspruch gegen die erste Gleichung (59) für $p = q = 2$ ergibt. Wenn schließlich $b_1^2 \neq 0$, $b_2^2 \neq 0$, so folgt aus den ersten beiden Gleichungen (59) für $p = 2$, $q = 3$:

$$2\, b_1^2 c_1^3 - b_2^2 c_2^3 = 0, \quad 2\, b_2^2 c_2^3 - b_1^2 c_1^3 = 0,$$

also $c_1^3 = 0$, $c_2^3 = 0$, was ausgeschlossen war.

Somit bleibt in der Tat nur die Möglichkeit $n = 2$ übrig. Wir unterscheiden drei Fälle:

a) $\quad b_1^2 = 0, \quad b_2^2 \neq 0,$

b) $\quad b_1^2 \neq 0, \quad b_2^2 = 0,$

c) $\quad b_1^2 \neq 0, \quad b_2^2 \neq 0.$

Im Fall a) folgt aus der zweiten und dritten Gleichung (59)

$$b_2^2 c_2^2 = 1, \ (b_2^2 c_2^2 + 2)\, c_1^2 = 0; \quad \text{also } c_1^2 = 0.$$

Daher läuft dieser Fall, wenn man dadurch zu einer äquivalenten Lösung übergeht, daß man die erste Zeile und Spalte durch zyklische Vertauschung zur letzten macht, auf den Fall A) mit $\alpha = 2$ hinaus. Er liefert also keine irreduzible Lösung.

Im Fall b) folgt aus der ersten und letzten Gleichung (59)

$$b_1^2 c_1^2 = 1, \quad (b_1^2 c_1^2 + 2) c_2^2 = 0, \quad \text{also } c_2^2 = 0.$$

Daher läuft dieser Fall, wenn man zur Lösung $|X|^{-1} \Phi(X)$ übergeht, wodurch sich die Diagonalelemente von $\mathfrak{A}^{11}$ um 1 vermindern, während $\mathfrak{A}^{21}$ und $\mathfrak{A}^{12}$ unverändert bleiben (siehe Vorbemerkung zu §8), auf den Fall A) mit $\alpha = -1$ hinaus; er liefert also wieder keine irreduzible Lösung.

Somit bleibt nur der Fall c). Die ersten beiden Gleichungen (59) besagen dann

$$2 b_1^2 c_1^2 - b_2^2 c_2^2 - 2 = 0, \quad 2 b_2^2 c_2^2 - b_1^2 c_1^2 - 2 = 0, \quad \text{also } b_1^2 c_1^2 = b_2^2 c_2^2 = ?,$$

wodurch die letzten beiden von selbst erfüllt sind. Wir gehen nun von $\Phi(X)$ zu der äquivalenten Lösung

$$\begin{pmatrix} b_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2^2 \end{pmatrix} \Phi(X) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} c_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} b_2^2 \end{pmatrix}$$

über und bezeichnen diese fortan mit $\Phi(X)$. Dann gehen $\mathfrak{A}^{11}, \ldots$ über in

$$\mathfrak{A}^{11} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und die Formel I in Satz 13 liefert noch

$$\mathfrak{A}^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Differentialgleichungen (13) lauten daher

$$|X| \frac{\partial \Phi}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}} \Phi \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}} \Phi \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|X| \frac{\partial \Phi}{\partial x_{s2}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}} \Phi \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}} \Phi \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt sogleich

$$(60)\qquad \sum_{s=1}^{2}\left(x_{s1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_{s1}} + x_{s2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_{s2}}\right) = \Phi \cdot 2\,\mathsf{E} = 2\,\Phi.$$

Außerdem ergeben sich, wenn man von den Matrizes zu ihren Elementen übergeht, u. a. die Formeln

$$(61)\qquad \frac{\partial \varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s2}} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_{\varrho 3}}{\partial x_{s1}} = 0,$$

$$(62)\qquad \frac{\partial \varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial \varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s2}}, \qquad \frac{\partial \varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial \varphi_{\varrho 3}}{\partial x_{s2}}.$$

Wegen (61) ist

$$\varphi_{\varrho 1} = \varphi_{\varrho 1}(x_{11}, x_{21}), \quad \varphi_{\varrho 3} = \varphi_{\varrho 3}(x_{12}, x_{22})$$

und sodann wegen (62)

$$\frac{\partial^2 \varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s1}\,\partial x_{t1}} = \frac{\partial^2 \varphi_{\varrho 3}}{\partial x_{s2}\,\partial x_{t1}} = \frac{\partial^2 \varphi_{\varrho 3}}{\partial x_{s2}\,\partial x_{t2}} = 2\,\alpha_{\varrho}^{st} = 2\,\alpha_{\varrho}^{ts} = \text{konst.}$$

Hieraus erhält man durch Integration, weil $\varphi_{\varrho 1}$, $\varphi_{\varrho 2}$, $\varphi_{\varrho 3}$ wegen (60) homogene Funktionen ihrer Argumente sind,

$$\varphi_{\varrho 1} = \sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2}\alpha_{\varrho}^{st}\,x_{s1}\,x_{t1},$$

$$\varphi_{\varrho 2} = 2\sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2}\alpha_{\varrho}^{st}\,x_{s2}\,x_{t1},$$

$$\varphi_{\varrho 3} = \sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2}\alpha_{\varrho}^{st}\,x_{s2}\,x_{t2}.$$

Da nun $\Phi(E) = \mathsf{E}$ sein soll, ergibt sich speziell für $X = E$

$$\varepsilon_{\varrho 1} = \sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2}\alpha_{\varrho}^{st}\,e_{s1}\,e_{t1} = \alpha_{\varrho}^{11},$$

$$\varepsilon_{\varrho 2} = 2\sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2}\alpha_{\varrho}^{st}\,e_{s2}\,e_{t1} = 2\,\alpha_{\varrho}^{21} = 2\,\alpha_{\varrho}^{12},$$

$$\varepsilon_{\varrho 3} = \sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2}\alpha_{\varrho}^{st}\,e_{s2}\,e_{t2} = \alpha_{\varrho}^{22}.$$

Dadurch sind die Konstanten α_{ϱ}^{st} bestimmt, und man erhält

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} x_{11}^2 & 2\,x_{11}x_{12} & x_{12}^2 \\ x_{11}x_{21} & x_{11}x_{22} + x_{12}x_{21} & x_{12}x_{22} \\ x_{21}^2 & 2\,x_{21}x_{22} & x_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

Diese Lösung ist wieder irreduzibel, wie man genau wie in den früheren Fällen erkennt.

Die verschiedenen Resultate dieses Paragraphen fassen wir zusammen in

Satz 19. *Im Fall $\nu = 3$ hat die Gleichung (5) in der Umgebung von $X = E$ analytische, in Satz 5 aber nicht enthaltene irreduzible Lösungen nur, wenn $n = 2$ oder $n = 3$ ist. Für $n = 2$ sind es die Lösungen*

$$|X|^a \begin{pmatrix} x_{11}^2 & 2\,x_{11}x_{12} & x_{12}^2 \\ x_{11}x_{21} & x_{11}x_{22} + x_{12}x_{21} & x_{12}x_{22} \\ x_{21}^2 & 2\,x_{21}x_{22} & x_{22}^2 \end{pmatrix}$$

und die damit äquivalenten. Für $n = 3$ sind es die Lösungen

$$|X|^a \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = |X|^a X,$$

$$|X|^a \begin{pmatrix} x_{22}x_{33} - x_{23}x_{32} & x_{23}x_{31} - x_{21}x_{33} & x_{21}x_{32} - x_{22}x_{31} \\ x_{32}x_{13} - x_{33}x_{12} & x_{33}x_{11} - x_{31}x_{13} & x_{31}x_{12} - x_{32}x_{11} \\ x_{12}x_{23} - x_{13}x_{22} & x_{13}x_{21} - x_{11}x_{23} & x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} \end{pmatrix} = |X|^{a+1} X'^{-1}$$

und die damit äquivalenten.

(Eingegangen am 29. Oktober 1941.)

Zur asymptotischen Integration von Differentialgleichungen.

Herrn Konrad Knopp
zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

H. Seifert in Braunschweig.

Eine Differentialgleichung

$$y'' + p(x)\,y' - \left(\varrho^2 q(x) + r(x)\right) y = 0$$

pflegt man für große Werte von ϱ angenähert mit dem Ansatze

$$y = e^{\varrho\, g(x)} \left(h(x) + \frac{1}{\varrho}\, h_1(x) + \frac{1}{\varrho^2}\, h_2(x) + \cdots + \frac{1}{\varrho^m}\, h_m(x)\right)$$

zu integrieren. Die Differentialgleichung läßt sich durch geeignete Wahl der Funktionen g, h, h_1, ..., h_m genau bis auf ein Glied der Größenordnung $\varrho^{-m} \cdot e^{\varrho\, g(x)}$ erfüllen, wofür man auch sagt, asymptotisch integrieren. — Je nach dem Vorzeichen von q haben ihre Lösungen ganz verschiedenen Charakter: In Intervallen, in denen $q > 0$ ist, verlaufen sie aperiodisch, in solchen, in denen $q < 0$ ist, oszillatorisch. Wo zwei solche Intervalle zusammenstoßen, liegt eine singuläre Stelle der asymptotischen Lösungen, während die von der asymptotischen Lösung approximierte exakte Lösung im allgemeinen regulär ist. Ein und dieselbe Lösung der Differentialgleichung wird also auf beiden Seiten der Nullstelle von $q(x)$ durch ganz verschiedenartige Funktionen asymptotisch dargestellt, und es erhebt sich die Frage, welcher Zusammenhang zwischen diesen Funktionen besteht.

Diese Frage ist von H. Jeffreys [6], S. Goldstein [7] und R. E. Langer [8] behandelt worden. Die beiden ersten Autoren benutzen eine Methode, die mir mathematisch nicht zureichend zu sein scheint. Sie besteht darin, daß man in der gegebenen Differentialgleichung, in der $p(x) = r(x) \equiv 0$ angenommen wird, die Funktion $q(x)$ in der Umgebung ihrer Nullstelle durch das Anfangsglied ihrer Taylor-Entwicklung ersetzt. Die so abgeänderte Differentialgleichung läßt sich durch Besselsche Funktionen integrieren, und es wird behauptet, daß die bekannten asymptotischen Formeln für die Besselschen Funktionen den gewünschten Zusammenhang zwischen den asymptotischen Lösungen der gegebenen Differentialgleichung liefern.

R. E. Langer legt die Lösung der Differentialgleichung durch Funktionswert und Ableitung an einer Nullstelle von q fest und gibt auf beiden Seiten der Nullstelle asymptotische Darstellungen dieser Lösung.

Die Frage, die nachstehend behandelt wird, lautet folgendermaßen: Es sei eine Lösung $y(x, \varrho)$ der Differentialgleichung in einem Punkte x_0 asymptotisch bekannt. Was kann man daraus über das asymptotische Verhalten von $y(x, \varrho)$ in einem anderen Punkte x_1 schließen, insbesondere dann, wenn x_0 und x_1 verschiedenartigen Intervallen angehören? Wir beschränken uns dabei auf einfache Nullstellen von $q(x)$.

Die Veranlassung zu der vorliegenden mathematischen Untersuchung gab ein Problem der Praxis, das auf eine Differentialgleichung der obigen Art führte. Ich verdanke den Hinweis auf diese Differentialgleichung Herrn Dr. G. Guderley, der sie unabhängig von den genannten Autoren asymptotisch integriert hat mit Methoden, die den ihren ähnlich sind.

§ 1.

Der Bereich der Gültigkeit von asymptotischen Darstellungen.

In der Differentialgleichung

$$L(y) \equiv y'' + p(x)\, y' - (\varrho^2 q(x) + r(x)) y = 0 \tag{1}$$

seien p, q, r reguläre analytische Funktionen in einem gewissen einfach zusammenhängenden Gebiete $\mathfrak{G}$ der komplexen x-Ebene und ϱ ein positiver Parameter. Wir setzen überdies voraus, daß

$$q(x) \neq 0$$

überall in $\mathfrak{G}$ ist.

Um die Differentialgleichung (1) für große Werte von ϱ asymptotisch zu integrieren, macht man für y den formalen Ansatz

$$y = e^{\varrho g(x)} (h(x) + \varrho^{-1} h_1(x) + \varrho^{-2} h_2(x) + \cdots). \tag{2}$$

Wenn man damit in die Differentialgleichung (1) hineingeht, nach Potenzen von ϱ ordnet und alle Koeffizienten dieser formalen Potenzreihenentwicklung $= 0$ setzt, so ergeben sich die folgenden Differentialgleichungen erster Ordnung zur Bestimmung von g, h, h_1, h_2, ...

$$\begin{cases} g'^2 - q = 0 \\ 2g'h' + (g'' + pg')h = 0 \\ 2g'h_1' + (g'' + pg')h_1 + (h'' + ph' - rh) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2g'h_n' + (g'' + pg')h_n + (h_{n-1}'' + ph_{n-1}' - rh_{n-1}) = 0. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{3}$$

Dabei wurde $h(x) \not\equiv 0$ angenommen, was offenbar keine wesentliche Einschränkung ist. Aus (3) folgt

$$g = \int \sqrt{q}\, dx, \tag{4}$$

ferner

$$h = \frac{c}{\sqrt[4]{q}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\int p\,dx} \qquad (c \neq 0). \tag{5}$$

h verschwindet also nirgends in $\mathfrak{G}$.

Die durch die Integration in g, h, h_1, h_2, ... eingehenden Integrationskonstanten und die in $\mathfrak{G}$ zu benutzenden Zweige dieser mehrdeutigen Funktionen seien ein für allemal fest gewählt. Da $q \neq 0$ in $\mathfrak{G}$ ist, so folgt aus den Differentialgleichungen (3), daß g, h, h_1, ... in $\mathfrak{G}$ überall regulär analytisch sind. Die so bestimmte Reihe (2) ist bekanntlich im allgemeinen für keinen Wert von ϱ konvergent.

Wir betrachten nun eine Partialsumme von (2)

$$\mathfrak{y}(x, \varrho) = e^{\varrho g}(h + \varrho^{-1} h_1 + \varrho^{-2} h_2 + \cdots + \varrho^{-m} h_m) \qquad (m \geqq 0). \tag{6}$$

Da wir den Index m ein für allemal festhalten, bringen wir ihn in dem Symbol $\mathfrak{y}(x, \varrho)$ nicht besonders zum Ausdruck.

Wir sagen, *daß eine Lösung $y(x, \varrho)$ von* (1) *in einem Punkte x_0 von $\mathfrak{G}$ asymptotisch durch $\mathfrak{y}(x, \varrho)$ dargestellt wird, wenn für Funktionswert und Ableitung Gleichungen von der Form bestehen*[1])

$$\begin{aligned} y(x_0, \varrho) &= \mathfrak{y}(x_0, \varrho) + \varrho^{-m-1} \cdot e^{\varrho g(x_0)} \cdot O(1), \\ y'(x_0, \varrho) &= \mathfrak{y}'(x_0, \varrho) + \varrho^{-m} \cdot e^{\varrho g(x_0)} \cdot O(1); \end{aligned} \tag{7}$$

die Striche an y und $\mathfrak{y}$ bezeichnen Ableitungen nach x. m ist die in (6) definierte ganze Zahl. Es wird also nur verlangt, daß die Gleichungen (7) für die m-te Partialsumme (6) und nicht etwa notwendig für sämtliche Partialsummen von (2) gelten. Z. B. kann man diejenige Lösung $y(x, \varrho)$ von (1) betrachten, die durch die „Anfangswerte" $y(x_0, \varrho) = \mathfrak{y}(x_0, \varrho)$, $y'(x_0, \varrho) = \mathfrak{y}'(x_0, \varrho)$ festgelegt ist. In diesem Falle sind die beiden Funktionen $O(1)$ identisch 0.

Wenn $y(x, \varrho)$ im Punkte x_0 asymptotisch durch $\mathfrak{y}(x, \varrho)$ dargestellt wird, so fragt es sich, in welchen anderen Punkten das auch noch der Fall ist. Darüber gilt der

Satz I. *Wenn $y(x, \varrho)$ im Punkte x_0 durch $\mathfrak{y}(x, \varrho)$ asymptotisch dargestellt wird, so auch in jedem Punkte x_1 von $\mathfrak{G}$, den man von x_0 aus auf einer*

---

[1]) Dabei bezeichnen wir wie üblich mit $O(1)$ *jede* Funktion von ϱ, die beschränkt bleibt für alle genügend großen ϱ. Es ist also $f(\varrho) = O(1)$, wenn zwei positive Konstanten ϱ_0 und H existieren, so daß $|f(\varrho)| < H$ für alle $\varrho > \varrho_0$.

in $\mathfrak{G}$ verlaufenden rektifizierbaren Kurve C erreichen kann, längs der der Realteil $\Re(g)$ von g nirgends abnimmt. Genauer gelten Relationen der folgenden Art

$$\begin{aligned} y(x,\varrho) &= \eta(x,\varrho) + \varrho^{-m-1}\cdot e^{\varrho g(x)}\cdot O(1), \\ y'(x,\varrho) &= \eta'(x,\varrho) + \varrho^{-m}\cdot e^{\varrho g(x)}\cdot O(1) \end{aligned} \tag{8}$$

gleichmäßig[2]) *für alle x von C.*

Insbesondere gilt hiernach die asymptotische Darstellung in allen Punkten x_1 der durch x_0 hindurchgehenden Kurve $\Re(g) = \text{const}$. Da $g' = \sqrt{q}$ in $\mathfrak{G}$ von Null verschieden ist, so geht durch jeden Punkt von $\mathfrak{G}$ genau eine Kurve $\Re(g) = \text{const}$ hindurch.

Wenn x_1 von x_0 aus nicht auf einem Wege der im Satz genannten Art erreichbar ist, so läßt sich von vornherein nicht entscheiden, ob y in x_1 durch η asymptotisch dargestellt wird oder nicht. Da es auf Grund von Satz I in jedem hinreichend kleinen Teilgebiet von G eine Lösung $y(x,\varrho)$ der Differentialgleichung (1) gibt, die in diesem Teilgebiete asymptotisch durch $\eta(x,\varrho)$ dargestellt wird, so ist es sinnvoll, $\eta(x,\varrho)$ als eine *asymptotische Lösung* von (1) zu bezeichnen.

Der Beweis von Satz I benutzt einen Kunstgriff von Liouville [1], der von Birkhoff [3] und Blumenthal [4] für Beweise ähnlicher Sätze ausgebaut worden ist. — Wir betrachten zunächst den Fall $m = 0$. Alsdann lautet die asymptotische Lösung

$$\eta(x,\varrho) = h(x)\, e^{\varrho g(x)}.$$

$y(x,\varrho)$ sei diejenige Lösung von (1), die im Punkte x_0 dieselben Anfangswerte hat wie η; d. h. es sei

$$y(x_0,\varrho) = h(x_0)\, e^{\varrho g(x_0)};\quad y'(x_0,\varrho) = (\varrho h(x_0) g'(x_0) + h'(x_0)) e^{\varrho g(x_0)}. \tag{9}$$

Wir führen außer der gegebenen Differentialgleichung $L(y) = 0$ die Differentialgleichung

$$\Lambda(\eta) \equiv \eta'' + p\eta' - \left[\varrho^2 q + \frac{h' p}{h} + \frac{h''}{h}\right]\eta = 0 \tag{10}$$

ein, die dadurch charakterisiert ist, daß

$$h\, e^{\varrho g} \quad \text{und} \quad h\, e^{-\varrho g}$$

ein System linear unabhängiger Lösungen sind. Die Differenz

$$\eta(x,\varrho) = y(x,\varrho) - \eta(x,\varrho)$$

---

[2]) Wir sagen, eine Relation $f(x,\varrho) = w(x,\varrho)\cdot O(1)$ gelte *gleichmäßig* für alle Punkte x einer gewissen Menge $\mathfrak{M}$, wenn die darin auftretende Funktion $O(1) = \varphi(x,\varrho)$ gleichmäßig beschränkt ist für alle x auf $\mathfrak{M}$ und alle genügend großen ϱ; genauer: Es gibt zwei positive Zahlen H und ϱ_0, so daß $|\varphi(x,\varrho)| < H$ für alle x auf $\mathfrak{M}$ und alle $\varrho > \varrho_0$.

genügt dann der Differentialgleichung

$$\Lambda(\eta) = \left(r - \frac{h'}{h}p - \frac{h''}{h}\right)y, \tag{11}$$

wie man durch Subtraktion von (1) und (10) erkennt. Da von der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ein fundamentales Lösungssystem, nämlich $h e^{\varrho g}$ und $h e^{-\varrho g}$ bekannt ist, ergibt sich für die Lösung von (11) nach der Methode der Variation der Konstanten, wenn man zur Abkürzung

$$s(x) = \frac{1}{g'}\left(r - \frac{h'p}{h} - \frac{h''}{h}\right)$$

setzt,

$$\eta(x,\varrho) = \frac{1}{2\varrho}\Big\{h(x)\,e^{\varrho g(x)}\Big[\int_{x_0}^{x} s(\xi)\,y(\xi,\varrho)\,h^{-1}(\xi)\,e^{-\varrho g(\xi)}\,d\xi + c_1(\varrho)\Big] - \tag{12}$$

$$- h(x)\,e^{-\varrho g(x)}\Big[\int_{x_0}^{x} s(\xi)\,y(\xi,\varrho)\,h^{-1}(\xi)\,e^{\varrho g(\xi)}\,d\xi + c_2(\varrho)\Big]\Big\}.$$

Die Ableitung hiervon lautet

$$\eta'(x,\varrho) = \frac{1}{2\varrho}\Big\{\big(\varrho h(x)g'(x) + h'(x)\big)e^{\varrho g(x)}\Big[\int_{x_0}^{x} s\,y\,h^{-1}e^{-\varrho g}\,d\xi + c_1(\varrho)\Big] - \tag{12'}$$

$$-\big(-\varrho h(x)g'(x) + h'(x)\big)e^{-\varrho g(x)}\Big[\int_{x_0}^{x} s\,y\,h^{-1}e^{\varrho g}\,d\xi + c_2(\varrho)\Big]\Big\}.$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten c_1 und c_2 setzen wir in diesen Gleichungen $x = x_0$. Da nach (9)

$$\eta(x_0,\varrho) = \eta'(x_0,\varrho) = 0$$

ist, so folgt

$$c_1(\varrho) = c_2(\varrho) = 0. \tag{13}$$

Wenn wir in (12) für die linke Seite wieder $y - \mathfrak{y}$ schreiben und die Gleichung mit $h^{-1}e^{-\varrho g}$ multiplizieren, so ergibt sich

$$y(x)\,h^{-1}(x)\,e^{-\varrho g(x)} \tag{14}$$

$$= 1 + \frac{1}{2\varrho}\Big\{\int_{x_0}^{x} s\,y\,h^{-1}\,e^{-\varrho g(\xi)}\,d\xi - e^{-2\varrho g(x)}\int_{x_0}^{x} s\,y\,h^{-1}\,e^{-\varrho g(\xi)}\cdot e^{2\varrho g(\xi)}\,d\xi\Big\}.$$

Es sei nun $M = M(\varrho)$ das Maximum, das $|y(x)h^{-1}(x)e^{-\varrho g(x)}|$ auf dem von x_0 nach x_1 führenden Wege C des Satzes I annimmt, und zwar möge es im Punkte X angenommen werden. Bildet man (14) insbesondere für $x = X$, indem man die Integrale von x_0 bis X längs C nimmt, so folgt, weil

$$|e^{2\varrho g(\xi)}| = e^{2\varrho\,\Re(g(\xi))}$$

nach der Annahme des Satzes I im Endpunkte X des Integrationsweges sein Maximum annimmt,

$$M \leqq 1 + \frac{1}{2\varrho}\left\{M\int_{x_0}^{X}|s(\xi)\,d\xi| + M\int_{x_0}^{X}|s(\xi)\,d\xi|\right\}$$

und daher

$$M(\varrho) = O(1).$$

Geht man mit dieser Abschätzung von M nochmals in die Gleichung (12) hinein, so ergibt sich

$$y(x,\varrho) = h(x)\,e^{\varrho g(x)} + \vartheta(x,\varrho)\cdot\varrho^{-1}\cdot e^{\varrho g(x)} \tag{15}$$

mit

$$|\vartheta(x,\varrho)| = \tfrac{1}{2}|h(x)|\cdot\Big|\int_{x_0}^{x} s(\xi)\,y(\xi,\varrho)\,h^{-1}(\xi)\,e^{-\varrho g(\xi)}\,d\xi -$$

$$- e^{-2\varrho g(x)}\cdot\int_{x_0}^{x} s(\xi)\,y(\xi,\varrho)\,h^{-1}(\xi)\,e^{-\varrho g(\xi)}\cdot e^{2\varrho g(\xi)}\,d\xi\Big|$$

$$\leqq \tfrac{1}{2}|h(x)|\,2M\int_{x_0}^{x_1}|s(\xi)\,d\xi|.$$

Es gilt also $\vartheta(x,\varrho) = O(1)$ gleichmäßig für alle x auf C.

Eine der Formel (15) entsprechende Formel gilt für die Ableitung $y'(x,\varrho)$. Wir gehen auf (12′) zurück und finden

$$y'(x,\varrho) = \big(h(x)\,e^{\varrho g(x)}\big)' + \tau(x,\varrho)\,e^{\varrho g(x)} \tag{16}$$

mit

$$|\tau(x,\varrho)| = \tfrac{1}{2}\varrho^{-1}\Big|\big(h'(x) + \varrho h(x)\,g'(x)\big)\int_{x_0}^{x} s(\xi)\,y(\xi,\varrho)\,h^{-1}(\xi)e^{-\varrho g(\xi)}\,d\xi -$$

$$- \big(h'(x) - \varrho h(x)\,g'(x)\big)\,e^{-2\varrho g(x)}\cdot\int_{x_0}^{x} s(\xi)\,y(\xi,\varrho)\,h^{-1}(\xi)\,e^{-\varrho g(\xi)}\cdot e^{2\varrho g(\xi)}\,d\xi\Big|$$

$$\leqq \tfrac{1}{2}\varrho^{-1}\Big\{|h'(x) + \varrho\,h(x)\,g'(x)|\,M\int_{x_0}^{x_1}|s(\xi)\,d\xi| +$$

$$+ |h'(x) - \varrho h(x)g'(x)|\,M\int_{x_0}^{x_1}|s(\xi)\,d\xi|\Big\}.$$

Somit gilt $\tau(x,\varrho) = O(1)$ gleichmäßig für alle x auf C.

Nach dem bisher Bewiesenen gibt es eine Lösung $y = y^{+}(x,\varrho)$ unserer Differentialgleichung (1), die längs C durch $he^{\varrho g}$ asymptotisch dargestellt wird, d. h. es gilt gleichmäßig in x auf C

$$\begin{aligned} y^{+}(x,\varrho) &= h(x)\,e^{\varrho g(x)} + \varrho^{-1}\,e^{\varrho g(x)}\cdot O(1),\\ y^{+\prime}(x,\varrho) &= \big(h'(x) + \varrho h(x)\,g'(x)\big)\,e^{\varrho g(x)} + e^{\varrho g(x)}\cdot O(1). \end{aligned} \tag{17}$$

Hätten wir in $g = \int \sqrt{q}\, dx$ das andere Vorzeichen der Wurzel gewählt, so wären wir durch Betrachtung der rückwärts, von x_1 nach x_0 durchlaufenen Kurve C zu einer Lösung $y^-(x, \varrho)$ der Differentialgleichung (1) gelangt, die längs C durch $he^{-\varrho g}$ asymptotisch dargestellt wird:

$$\begin{aligned} y^-(x, \varrho) &= h(x)\, e^{-\varrho g(x)} + \varrho^{-1} e^{-\varrho g(x)} \cdot O(1), \\ y^{-\prime}(x, \varrho) &= (h'(x) - \varrho h(x)\, g'(x))\, e^{-\varrho g(x)} + e^{-\varrho g(x)} \cdot O(1). \end{aligned} \tag{18}$$

Es sei nun $\mathfrak{y}$ die Funktion (6)

$$\mathfrak{y}(x, \varrho) = e^{\varrho g(x)} (h(x) + \varrho^{-1} h_1(x) + \cdots + \varrho^{-m} h_m(x)).$$

$\mathfrak{y}$ genügt nicht der Differentialgleichung $L(\mathfrak{y}) = 0$, sondern es wird nach (3)

$$L(\mathfrak{y}) = -\varrho^{-m} e^{\varrho g(x)} \cdot F(x) \tag{19}$$

mit

$$F(x) = -(h_m'' + p h_m' - r h_m).$$

$y(x, \varrho)$ sei jetzt eine Lösung der Differentialgleichung (1), die durch $\mathfrak{y}$ im Punkte x_0 asymptotisch dargestellt wird:

$$\begin{aligned} y(x_0, \varrho) &= \mathfrak{y}(x_0, \varrho) + \varrho^{-m-1} \cdot e^{\varrho g(x_0)} \cdot O(1), \\ y'(x_0, \varrho) &= \mathfrak{y}'(x_0, \varrho) + \varrho^{-m} \cdot e^{\varrho g(x_0)} \cdot O(1). \end{aligned} \tag{20}$$

Setzt man wieder

$$\eta(x, \varrho) = y(x, \varrho) - \mathfrak{y}(x, \varrho),$$

so ergibt Subtraktion von $L(y) = 0$ und (19)

$$L(\eta) = \varrho^{-m} \cdot e^{\varrho g(x)} \cdot F(x). \tag{21}$$

Von der zugehörigen homogenen Differentialgleichung kennt man die beiden linear unabhängigen Lösungen y^+ und y^-. Somit erhält man nach der Methode der Variation der Konstanten für die Lösung η von (21)

$$\eta(x, \varrho) = \varrho^{-m} \left\{ y^-(x, \varrho) \left[\int_{x_0}^{x} \frac{y^+(\xi, \varrho)}{D(\xi, \varrho)} \cdot e^{\varrho g(\xi)} \cdot F(\xi)\, d\xi + \gamma_1(\varrho) \right] - \right. \tag{22}$$

$$\left. - y^+(x, \varrho) \left[\int_{x_0}^{x} \frac{y^-(\xi, \varrho)}{D(\xi, \varrho)} \cdot e^{\varrho g(\xi)} \cdot F(\xi)\, d\xi + \gamma_2(\varrho) \right] \right\},$$

worin

$$D = \begin{vmatrix} y^+ & y^- \\ y^{+\prime} & y^{-\prime} \end{vmatrix}$$

die Wronskische Determinante der beiden Lösungen y^+ und y^- bezeichnet und γ_1, γ_2 Integrationskonstanten bedeuten. Aus (22) folgt durch Differentiation nach x

$$(23)\qquad \eta'(x,\varrho) = \varrho^{-m}\Big\{y^{-\prime}(x,\varrho)\Big[\int_{x_0}^{x}\frac{y^+(\xi,\varrho)}{D(\xi,\varrho)}\cdot e^{\varrho g(\xi)}\cdot F(\xi)\,d\xi + \gamma_1(\varrho)\Big] - y^{+\prime}(x,\varrho)\Big[\int_{x_0}^{x}\frac{y^-(\xi,\varrho)}{D(\xi,\varrho)}\cdot e^{\varrho g(\xi)}\cdot F(\xi)\,d\xi + \gamma_2(\varrho)\Big]\Big\}.$$

Insbesondere ist für $x = x_0$

$$\varrho^m\eta(x_0,\varrho) = \gamma_1 y^-(x_0,\varrho) - \gamma_2 y^+(x_0,\varrho),$$
$$\varrho^m\eta'(x_0,\varrho) = \gamma_1 y^{-\prime}(x_0,\varrho) - \gamma_2 y^{+\prime}(x_0,\varrho);$$

hieraus folgt durch Auflösen unter Benutzung der Relationen (17), (18), (20)

$$\gamma_1(\varrho) = \frac{\varrho^m}{D}\cdot\begin{vmatrix} y^+ & \eta \\ y^{+\prime} & \eta'\end{vmatrix} = \varrho^m\cdot\frac{\begin{vmatrix} e^{\varrho g(x_0)}\cdot O(1) & \varrho^{-m-1}e^{\varrho g(x_0)}O(1)\\ \varrho e^{\varrho g(x_0)}\cdot O(1) & \varrho^{-m}e^{\varrho g(x_0)}O(1)\end{vmatrix}}{-2\varrho h^2(x_0)g'(x_0)+O(1)} = \varrho^{-1}\cdot e^{2\varrho g(x_0)}\cdot O(1);$$

$$\gamma_2(\varrho) = -\frac{\varrho^m}{D}\begin{vmatrix}\eta & y^-\\ \eta' & y^{-\prime}\end{vmatrix} = -\varrho^m\cdot\frac{\begin{vmatrix}\varrho^{-m-1}\cdot e^{\varrho g(x_0)}\cdot O(1) & e^{-\varrho g(x_0)}\cdot O(1)\\ \varrho^{-m}\cdot e^{\varrho g(x_0)}\cdot O(1) & \varrho e^{-\varrho g(x_0)}\cdot O(1)\end{vmatrix}}{-2\varrho h^2(x_0)g'(x_0)+O(1)} = \frac{1}{\varrho}O(1).$$

Somit wird aus (22) für x auf C:

$$\eta(x,\varrho) = \varrho^{-m}\Big\{e^{-\varrho g(x)}\cdot a_1(x,\varrho)\cdot\Big[\int_{x_0}^{x}\frac{e^{2\varrho g(\xi)}}{\varrho}\cdot b_1(\xi,\varrho)\,d\xi + \frac{e^{2\varrho g(x_0)}}{\varrho}c_1(\varrho)\Big] - e^{\varrho g(x)}\cdot a_2(x,\varrho)\Big[\int_{x_0}^{x}\frac{b_2(\xi,\varrho)}{\varrho}d\xi + \frac{c_2(\varrho)}{\varrho}\Big]\Big\},$$

worin a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 für x auf C und hinreichend große ϱ gleichmäßig beschränkte Funktionen sind, die nicht näher bezeichnet zu werden brauchen. Bedenkt man nun wieder, daß

$$|e^{\varrho g(\xi)}| = e^{\varrho\,\Re(g(\xi))}$$

längs C nicht abnimmt, so folgt ähnlich wie oben

$$|\eta(x,\varrho)| \leqq A\,\varrho^{-m-1}\cdot|e^{\varrho g(x)}|.$$

Darin ist A eine von x und ϱ unabhängige Konstante und die Ungleichung gilt für alle x auf C und alle genügend großen ϱ. Ebenso folgt aus (23)

$$|\eta'(x,\varrho)| \leqq A'\varrho^{-m}\cdot|e^{\varrho g(x)}| \qquad (A' = \text{const}),$$

womit Satz 1 bewiesen ist.

Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$y'' + py' - (\varrho^2 x + r)y = 0, \tag{24}$$

in der $p(x)$, $r(x)$ in der ganzen x-Ebene regulär analytisch seien; es ist hier $q(x) = x$. Als Gebiet $\mathfrak{G}$ können wir die x-Ebene betrachten, aus der die negative reelle Achse einschließlich des Nullpunktes herausgenommen ist. Man hat

$$g = \int \sqrt{x}\, dx = \pm \tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

und

$$h = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\, e^{-\frac{1}{2}\int p\, dx}.$$

Brechen wir die asymptotische Entwicklung nach dem ersten Gliede ab, so ergeben sich die beiden asymptotischen Lösungen

$$\mathfrak{y}^+(x, \varrho) = h \cdot e^{\frac{2}{3}\varrho x^{\frac{3}{2}}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{y}^-(x, \varrho) = h \cdot e^{-\frac{2}{3}\varrho x^{\frac{3}{2}}},$$

wobei wir von den mehrdeutigen Funktionen $x^{\frac{3}{2}}$ und $\sqrt[4]{x}$ in der aufgeschnittenen x-Ebene diejenigen Zweige benutzen wollen, die auf der positiven reellen Achse positiv sind. — Die Kurven $\Re(g) = \text{const}$ zeigt die Fig. 1. Weiß man von einer Lösung $y = y^+(x, \varrho)$ der Differentialgleichung (24), daß sie in einem Punkte $x_0 > 0$ asymptotisch durch $\mathfrak{y}^+(x, \varrho)$ dargestellt wird, so ist dies nach Satz 1 zugleich für alle Punkte x der Fall, für die

$$\Re(\tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}) \geqq \Re(\tfrac{2}{3} x_0^{\frac{3}{2}})$$

ist, das sind die auf der gestrichelten Kurve und rechts von ihr liegenden Punkte. Dagegen wird eine Lösung $y^-(x, \varrho)$, die in x_0 asymptotisch durch $\mathfrak{y}^-(x, \varrho)$ dargestellt wird, zugleich in allen Punkten x von $\mathfrak{G}$ dargestellt, für die

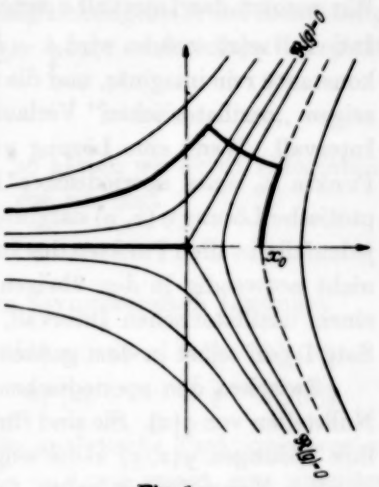

Fig. 1.

$$\Re(-\tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}) \geqq \Re(-\tfrac{2}{3} x_0^{\frac{3}{2}})$$

ist; das sind die auf der gestrichelten Kurve und links davon liegenden Punkte. Auf Kurven, auf denen $\Re(-\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}})$ niemals abnimmt, kann man von x_0 aus in beliebige Nähe der negativen reellen Achse gelangen, wie die in Fig. 1 stark ausgezogene, aus Stücken von Niveaulinien und Fallinien von $\Re(x^{\frac{3}{2}})$

bestehende Kurve zeigt. Dagegen kann man die negative Achse selbst auf solchen Kurven nicht erreichen (auch wenn sie zu $\mathfrak{G}$ gehörte, was durch Abänderung des Schnittes sich bewirken läßt). Denn an die negative reelle Achse schließt sich in beiden Halbebenen ein Gebiet an, in dem $\Re(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}) > 0$ ist; auf der negativen Achse aber ist $\Re(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}) = 0$. In der Tat werden wir in § 2 sehen, daß das asymptotische Verhalten von $y^-(x, \varrho)$ auf der negativen Achse ein ganz anderes als in beliebiger Nähe der negativen Achse ist.

§ 2.

Differentialgleichungen mit reellen Koeffizienten.

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß die Koeffizienten $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ der Differentialgleichung (1) für reelle x reellwertige analytische Funktionen sind. Ist dann in einem abgeschlossenen Intervalle der reellen Achse $q(x) > 0$, so wird $g = \int \sqrt{q}\, dx$ bei geeigneter Wahl der Integrationskonstante reell. Dann haben die reellen Lösungen der Differentialgleichung (1), wie der Faktor $e^{\varrho g}$ in der asymptotischen Lösung zeigt, „aperiodische" Gestalt. Wir nennen das Intervall *aperiodisch*. Ist dagegen in einem abgeschlossenen Intervall $q(x) < 0$, so wird $g = \int \sqrt{q}\, dx$ bei geeigneter Wahl der Integrationskonstante rein imaginär, und die reellen Lösungen der Differentialgleichung (1) zeigen „oszillatorischen" Verlauf. Wir sprechen von einem *oszillatorischen* Intervall. Wenn eine Lösung $y(x, \varrho)$ der Differentialgleichung (1) in einem Punkte x_0 eines aperiodischen Intervalles asymptotisch durch eine asymptotische Lösung $\mathfrak{y}(x, \varrho)$ dargestellt wird, so gilt nach Satz I diese Darstellung jedenfalls in allen Punkten des Intervalles, in denen $g(x) \geqq g(x_0)$ ist, dagegen nicht notwendig in den übrigen Punkten des Intervalles. Liegt aber x_0 in einem oszillatorischen Intervall, so gilt die asymptotische Darstellung nach Satz I von selbst in dem ganzen Intervall, da in ihm $\Re(g) = \text{const} = 0$ ist.

Zwischen den aperiodischen und den oszillatorischen Intervallen liegen Nullstellen von $q(x)$. Sie sind für die Differentialgleichung und daher auch für ihre Lösungen $y(x, \varrho)$ keine singulären Stellen, wohl aber singuläre Stellen, nämlich Verzweigungspunkte, für die asymptotischen Lösungen $\mathfrak{y}(x, \varrho)$, wie die Ausdrücke (4) und (5) für g und h zeigen.

Wenn $y(x, \varrho)$ in einem Punkte der reellen Achse asymptotisch durch $\mathfrak{y}(x, \varrho)$ dargestellt wird, so erhebt sich die Frage, wie $y(x, \varrho)$ in einem anderen Punkte der reellen Achse dargestellt werden kann, der von ersterem durch eine Nullstelle von $q(x)$ getrennt ist. Diese Frage soll im folgenden behandelt werden.

Wir setzen voraus: Die Koeffizienten $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ der Differentialgleichung (1) sind in einer Umgebung des Nullpunktes $x = 0$ reguläre und

für reelle x reellwertige analytische Funktionen. $q(x)$ habe im Punkte $x = 0$ eine einfache Nullstelle:

$$q(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

wobei $a_1 > 0$ vorausgesetzt werden kann; denn durch Ersetzen von x durch $-x$ ist das immer erreichbar.

Um Satz I anwenden zu können, führen wir zunächst das dort zugrunde gelegte Gebiet $\mathfrak{G}$ ein. $\mathfrak{G}$ entstehe aus einem den Nullpunkt enthaltenden konvexen Gebiete durch Entfernen der negativen imaginären Achse einschließlich des Nullpunktes und sei so klein gewählt, daß p, q, r in $\mathfrak{G}$ keine singuläre Stelle haben und q nirgends in $\mathfrak{G}$ verschwindet. Die Integrationskonstante in (4) legen wir dadurch fest, daß wir $x = 0$ zum Anfangspunkt der Integration machen. Den beiden möglichen Vorzeichen der Wurzel in (4) entsprechend unterscheiden wir die beiden Funktionen

$$g^+ = \int_0^x \sqrt{q(\xi)}\, d\xi \quad \text{und} \quad g^- = -g^+. \tag{25}$$

In g^+ ist dabei die Wurzel positiv gewählt für $\xi > 0$. Damit wird auch $g^+(x) > 0$ für $x > 0$. Für g^+ schreiben wir der Einfachheit halber zumeist g, für g^- ebenso $-g$. Die aus den Differentialgleichungen (3) bei Benutzung von g^+ zu bestimmenden Funktionen h, h_1, h_2, ... bezeichnen wir jetzt genauer mit

$$h^+,\ h_1^+,\ h_2^+,\ \ldots$$

Hätten wir in (3) die Funktion g^- benutzt, so hätten wir durch Integration andere Funktionen h, h_1, h_2, ... erhalten, die wir mit

$$h^-,\ h_1^-,\ h_2^-,\ \ldots$$

bezeichnen. Wir gelangen so zu den beiden asymptotischen Lösungen

$$(26^+) \quad \mathfrak{y}^+ = \mathfrak{y}^+(x, \varrho) = e^{\varrho g(x)} \left(h^+(x) + \varrho^{-1} h_1^+(x) + \cdots + \varrho^{-m} h_m^+(x)\right)$$

$$(26^-) \quad \mathfrak{y}^- = \mathfrak{y}^-(x, \varrho) = e^{-\varrho g(x)} \left(h^-(x) + \varrho^{-1} h_1^-(x) + \cdots + \varrho^{-m} h_m^-(x)\right).$$

Sie sind für jedes positive ϱ in ganz $\mathfrak{G}$ regulär analytische Funktionen von x. Dagegen ist der nicht zu $\mathfrak{G}$ gehörige Punkt $x = 0$, wie gesagt, eine singuläre Stelle.

Da wir die für reelle x reellwertigen Lösungen der Differentialgleichung (1) untersuchen wollen, so werden wir auch von den asymptotischen Lösungen $\mathfrak{y}^+$ und $\mathfrak{y}^-$ voraussetzen, daß sie für positive x reellwertig sind. Diese Voraussetzung ist deshalb erfüllbar, weil für $x > 0$ die Funktionen p, q, r, g und damit die Koeffizienten in den zur Bestimmung von h, h_1, h_2, ... dienenden Differentialgleichungen (3) reell sind. Für $x < 0$ sind dann $\mathfrak{y}^+$ und $\mathfrak{y}^-$ sicher nicht reell, da g rein imaginär wird.

Wir wählen nun auf der positiven reellen Achse einen Punkt x_p und auf der negativen reellen Achse einen Punkt x_n. Selbstverständlich sollen diese wie alle im folgenden eingeführten Punkte zum Gebiete $\mathfrak{G}$ gehören. Über den Zusammenhang zwischen den asymptotischen Darstellungen einer bestimmten Lösung von (1) in den Punkten x_n und x_p gelten folgende Sätze.

Satz II. *Es sei* $\mathfrak{y}^-(x, \varrho)$ *die für* $x > 0$ *reellwertige asymptotische Lösung* (26$^-$) *und* $y^-(x, \varrho)$ *eine für reelle* x *reellwertige Lösung der Differentialgleichung* (1), *die im Punkte* x_p *asymptotisch durch* $\mathfrak{y}^-(x, \varrho)$ *darstellbar ist:*

$$\begin{aligned} y^-(x_p, \varrho) &= \mathfrak{y}^-(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g(x_p)} O(1), \\ y^{-\prime}(x_p, \varrho) &= \mathfrak{y}^{-\prime}(x_p, \varrho) + \varrho^{-m} e^{-\varrho g(x_p)} O(1), \end{aligned} \tag{27}$$

dann gilt im Punkte x_n *die Darstellung*

$$\begin{aligned} y^-(x_n, \varrho) &= 2\,\Re\left(\mathfrak{y}^-(x_n, \varrho)\right) + \varrho^{-m-1} O(1), \\ y^{-\prime}(x_n, \varrho) &= 2\,\Re\left(\mathfrak{y}^{-\prime}(x_n, \varrho)\right) + \varrho^{-m} O(1). \end{aligned} \tag{28}$$

Beweis in § 3.

Das Gegenstück zu diesem Satze ist der

Satz III: *Es sei* $\mathfrak{y}^+(x, \varrho)$ *die für* $x > 0$ *reellwertige asymptotische Lösung* (26$^+$) *und* $y^+(x, \varrho)$ *eine für reelle* x *reellwertige Lösung der Differentialgleichung* (1), *die im Punkte* x_n *die Darstellung besitzt*

$$\begin{aligned} y^+(x_n, \varrho) &= \Re\left(\mathfrak{y}^+(x_n, \varrho)\right) + \varrho^{-m-1} O(1), \\ y^{+\prime}(x_n, \varrho) &= \Re\left(\mathfrak{y}^{+\prime}(x_n, \varrho)\right) + \varrho^{-m} O(1), \end{aligned} \tag{29}$$

dann gilt im Punkte x_p *die Darstellung*

$$\begin{aligned} y^+(x_p, \varrho) &= \mathfrak{y}^+(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x_p)} O(1), \\ y^{+\prime}(x_p, \varrho) &= \mathfrak{y}^{+\prime}(x_p, \varrho) + \varrho^{-m} e^{\varrho g(x_p)} O(1). \end{aligned} \tag{30}$$

Beweis in § 4.

Man bemerke, daß der Faktor 2, der in (28) auftritt, in (29) fehlt.

Für die Aussage des Satzes II ist es wesentlich, daß die Lösung der Differentialgleichung (1) im Punkte x_p durch $\mathfrak{y}^-$ und nicht etwa durch $\mathfrak{y}^+$ asymptotisch dargestellt wird. Betrachtet man eine Lösung $y(x, \varrho)$, für die im Punkte x_p gilt,

$$\begin{aligned} y(x_p, \varrho) &= \mathfrak{y}^+(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x_p)} O(1), \\ y'(x_p, \varrho) &= \mathfrak{y}^{+\prime}(x_p, \varrho) + \varrho^{-m} e^{\varrho g(x_p)} O(1), \end{aligned} \tag{31}$$

so kann man daraus noch nicht auf eine asymptotische Darstellung im Punkte x_n schließen. Z. B. erfüllt die Funktion $y^+(x, \varrho)$ des Satzes III die Relationen (31), aber auch die Funktion

$$y^+(x, \varrho) + \varrho^N y^-(x, \varrho),$$

wenn y^- die im Satze II genannte Funktion und N eine positive Zahl ist. Denn es ist nach (30), (27) und (26)

$$\begin{aligned} y^+(x_p, \varrho) + \varrho^N y^-(x_p, \varrho) &= \mathfrak{y}^+(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x_p)} O(1) + \\ &\quad + \varrho^N \{\mathfrak{y}^-(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g(x_p)} O(1)\} \\ &= \mathfrak{y}^+(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x_p)} O(1), \end{aligned}$$

und entsprechendes gilt für die Ableitung. Das Zusatzglied $\varrho^N y^-$ macht also asymptotisch im Punkte x_p nichts aus, wohl aber im Punkte x_n. Denn dort ist wegen (29) und (28)

$$\begin{aligned} y^+(x_n, \varrho) + \varrho^N y^-(x_n, \varrho) &= \Re\left(\mathfrak{y}^+(x_n, \varrho)\right) + \varrho^{-m-1} O(1) + \\ &\quad + \varrho^N \{2\,\Re\left(\mathfrak{y}^-(x_n, \varrho)\right) + \varrho^{-m-1} O(1)\}. \end{aligned}$$

Jetzt nimmt das Zusatzglied $\varrho^N y^-$ für unendlich wachsendes ϱ beliebig große Werte an, während y^+ beschränkt bleibt.

Ebenso ist es für die Aussage des Satzes III wesentlich, daß die Lösung der Differentialgleichung (1) im Punkte x_n asymptotisch durch $\Re(\mathfrak{y}^+(x_n, \varrho))$ und nicht etwa durch $\Re(\mathfrak{y}^-(x_n, \varrho))$ dargestellt wird. Betrachtet man eine Lösung, für die im Punkte x_n gilt

$$\begin{aligned} y(x_n, \varrho) &= \Re\left(\mathfrak{y}^-(x_n, \varrho)\right) + \varrho^{-m-1} O(1), \\ y'(x_n, \varrho) &= \Re\left(\mathfrak{y}^{-\prime}(x_n, \varrho)\right) + \varrho^{-m} O(1), \end{aligned} \tag{32}$$

so kann man daraus noch nicht auf eine asymptotische Darstellung im Punkte x_p schließen. Z. B. erfüllt die Funktion $\frac{1}{2} y^-(x, \varrho)$ des Satzes II die Relationen (32), aber auch die Funktion $\frac{1}{2} y^- + \varrho^{-N} y^+$, wo y^+ die im Satze III genannte Funktion und N eine positive Zahl $\geqq m+1$ ist. Denn es ist nach (28) und (29)

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} y^-(x_n, \varrho) + \varrho^{-N} y^+(x_n, \varrho) &= \Re\left(\mathfrak{y}^-(x_n, \varrho)\right) + \varrho^{-m-1} O(1) + \\ &\quad + \varrho^{-N} \{\Re\left(\mathfrak{y}^+(x_n, \varrho)\right) + \varrho^{-m-1} O(1)\} \\ &= \Re\left(\mathfrak{y}^-(x_n, \varrho)\right) + \varrho^{-m-1} O(1), \end{aligned}$$

und entsprechendes gilt für die Ableitung. Das Zusatzglied $\varrho^{-N} y^+$ macht also asymptotisch im Punkte x_n nichts aus, wohl aber im Punkte x_p. Denn dort ist wegen (27) und (30)

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} y^-(x_p, \varrho) + \varrho^{-N} y^+(x_p, \varrho) &= \tfrac{1}{2} \mathfrak{y}^-(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g(x_p)} O(1) \\ &\quad + \varrho^{-N} \{\mathfrak{y}^+(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x_p)} O(1)\}. \end{aligned}$$

Jetzt geht wegen (26) das Zusatzglied $\varrho^{-N} y^+(x_p, \varrho)$ nach ∞, während $\frac{1}{2} y^-(x_p, \varrho)$ nach 0 konvergiert.

In Satz I haben wir aus der Gültigkeit einer asymptotischen Darstellung in einem Punkte auf ihre Gültigkeit längs der Kurve C geschlossen. Ein ähnlicher Satz besteht für die asymptotischen Relationen der Art (28) und (29) für Intervalle der negativen reellen Achse:

Satz IV. *Sei* $\mathfrak{y}(x, \varrho)$ *eine der beiden asymptotischen Lösungen* (26^+) *und* (26^-), *die für* $x > 0$ *reell sind, und* $y(x, \varrho)$ *eine Lösung der Differentialgleichung* (1), *die in einem einzigen Punkte* $x_n < 0$ *dargestellt wird durch*

$$\begin{aligned} y(x, \varrho) &= \Re(\mathfrak{y}(x, \varrho)) + \varrho^{-m-1} O(1) \\ y'(x, \varrho) &= \Re(\mathfrak{y}'(x, \varrho)) + \varrho^{-m} O(1); \end{aligned} \tag{33}$$

dann gelten solche Relationen gleichmäßig (im Sinne der Fußnote 2 von S. 176) für alle x *in jedem abgeschlossenen, den Nullpunkt nicht enthaltenden und selbstverständlich zum Gebiete* $\mathfrak{G}$ *gehörigen Intervalle* n *der negativen reellen Achse.*

Beweis in § 5.

§ 3.

Beweis von Satz II.

Wenn man die in $\mathfrak{G}$ definierte Funktion $\mathfrak{y}^-(x, \varrho)$ analytisch fortsetzt, indem man die negative imaginäre Achse von rechts nach links überschreitet, so gelangt man in einen anderen Zweig dieser Funktion, den wir mit $\mathfrak{z}^+(x, \varrho)$ bezeichnen wollen. Da $\mathfrak{y}^-$ auf der positiven reellen Achse reell ist, so sind $\mathfrak{y}^-$ und $\mathfrak{z}^+$ auf der negativen reellen Achse konjugiert komplex. Natürlich ist die Funktion $\mathfrak{z}^+$, da sie nur ein anderer Zweig von $\mathfrak{y}^-$ ist, ebenfalls asymptotische Lösung von (1) im Sinne von § 1 (6). Der in $\mathfrak{z}^+$ auftretende Exponentialfaktor heißt aber $e^{+\varrho g}$ und nicht $e^{-\varrho g}$ wie in $\mathfrak{y}^-$. Denn wir befinden uns in dem anderen Blatte der zweiwertigen Funktion g. $\mathfrak{z}^+$ hat also die Gestalt

$$\mathfrak{z}^+(x, \varrho) = e^{\varrho g(x)} \left(k^+(x) + \varrho^{-1} k_1^+(x) + \varrho^{-2} k_2^+(x) + \cdots + \varrho^{-m} k_m^+(x)\right). \tag{34}$$

Die Funktionen $k^+, k_1^+, k_2^+, \ldots, k_m^+$ entstehen durch die genannte analytische Fortsetzung aus $h^-, h_1^-, h_2^-, \ldots, h_m^-$. — Es vereinfacht den Beweis des Satzes II, wenn man die asymptotische Lösung $\mathfrak{z}^+$ an Stelle der in (26^+) eingeführten $\mathfrak{y}^+$ verwendet. Da k^+ wegen des in (5) auftretenden Faktors $\sqrt[4]{q}$ für $x > 0$ rein imaginär wird, so stimmt $\mathfrak{z}^+$ jedenfalls nicht mit $\mathfrak{y}^+$ überein.

Wir bemerken weiter, daß man in der oberen Halbebene einen so kleinen Halbkreis $\overset{\frown}{x_l x_r}$ mit dem Mittelpunkte $x = 0$ ziehen kann, daß bei seiner Durchlaufung $\Re(g)$ bis zu einem gewissen Punkte x_0 abnimmt und von da an

wieder zunimmt (Fig. 2). Dies erkennt man leicht durch Entwicklung von $g(x)$ in der Umgebung des Nullpunktes:

$$g(x) = \tfrac{2}{3}\sqrt{a_1}\, x^{\frac{3}{2}}(1 + x\,\mathfrak{P}(x));$$

$\mathfrak{P}(x)$ steht abkürzend für eine Potenzreihe in x. Der Halbkreis sei überdies so klein, daß $x_n < x_l$, $x_r < x_p$ wird. Wir bezeichnen den Linienzug $x_p x_r x_0 x_l x_n$, der in der Fig. 2 stark ausgezogen ist, mit C_{pn} und seine beiden Teile, in die er durch den Punkt x_0 zerlegt wird, mit C_{p0} und C_{0n}.

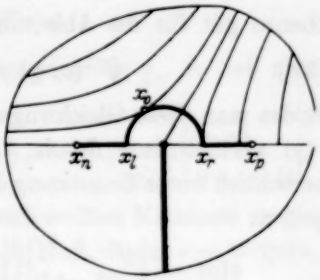

Fig. 2.

Da $\Re(g^-) = \Re(-g)$ längs C_{p0} dauernd zunimmt, gelten nach Satz I für die Funktion y^- des Satzes II gleichmäßig für alle Punkte x auf C_{p0} Relationen von der Form (27)

$$(35)\qquad \left.\begin{aligned} y^-(x,\varrho) &= \mathfrak{y}^-(x,\varrho) + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g(x)} O(1) \\ y^{-\prime}(x,\varrho) &= \mathfrak{y}^{-\prime}(x,\varrho) + \varrho^{-m} e^{-\varrho g(x)} O(1) \end{aligned}\right\} x \text{ auf } C_{p0}.$$

Weiter sei y_n^- eine Lösung der Differentialgleichung (1), die im Punkte x_n und damit auf ganz C_{0n} asymptotisch durch $\mathfrak{y}^-$ dargestellt wird. Für sie gelten die Relationen

$$(36)\qquad \left.\begin{aligned} y_n^-(x,\varrho) &= \mathfrak{y}^-(x,\varrho) + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g(x)} O(1) \\ y_n^{-\prime}(x,\varrho) &= \mathfrak{y}^{-\prime}(x,\varrho) + \varrho^{-m} e^{-\varrho g(x)} O(1) \end{aligned}\right\} x \text{ auf } C_{0n},$$

und zwar gleichmäßig für alle x auf C_{0n}.

Schließlich sei z^+ eine Lösung von (1), die im Punkte x_0 und damit auf ganz C_{pn} durch die eben eingeführte asymptotische Lösung $\mathfrak{z}^+$ dargestellt wird:

$$(37)\qquad \left.\begin{aligned} z^+(x,\varrho) &= \mathfrak{z}^+(x,\varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x)} O(1) \\ z^{+\prime}(x,\varrho) &= \mathfrak{z}^{+\prime}(x,\varrho) + \varrho^{-m} e^{\varrho g(x)} O(1) \end{aligned}\right\} x \text{ auf } C_{pn},$$

wieder gleichmäßig für alle x auf C_{pn}.

y_n^- und z^+ sind für genügend große ϱ linear unabhängig. Denn die Wronskische Determinante

$$\begin{vmatrix} y_n^- & z^+ \\ y_n^{-\prime} & z^{+\prime} \end{vmatrix}$$

berechnet sich im Punkte x_0 zufolge (36) und (37) zu

$$(38)\qquad \begin{aligned} &\begin{vmatrix} \mathfrak{y}^- + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g} O(1) & \mathfrak{z}^+ + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g} O(1) \\ \mathfrak{y}^{-\prime} + \varrho^{-m} e^{-\varrho g} O(1) & \mathfrak{z}^{+\prime} + \varrho^{-m} e^{\varrho g} O(1) \end{vmatrix}_{x = x_0} \\ &= \begin{vmatrix} h^- + \varrho^{-1} O(1) & k^+ + \varrho^{-1} O(1) \\ -\varrho g' h^- + O(1) & \varrho g' k^+ + O(1) \end{vmatrix}_{x = x_0} \\ &= 2\,\varrho g'(x_0)\, h^-(x_0)\, k^+(x_0) + O(1). \end{aligned}$$

Dies ist $\neq 0$ für genügend große ϱ; denn nach (4) und (5) verschwinden g', h^- und k^+ nirgends in $\mathfrak{G}$.

Es läßt sich somit y^- linear durch y_n^- und z^+ ausdrücken:

$$y^-(x,\varrho) = s(\varrho)\, y_n^-(x,\varrho) + t(\varrho)\, z^+(x,\varrho); \tag{39}$$

ebenso gilt für die Ableitung

$$y^{-\prime}(x,\varrho) = s(\varrho)\, y_n^{-\prime}(x,\varrho) + t(\varrho)\, z^{+\prime}(x,\varrho). \tag{39'}$$

Bildet man diese Gleichungen insbesondere an der Stelle $x = x_0$, so läßt sich $s(\varrho)$ asymptotisch durch Auflösen der beiden Gleichungen (39) und (39') berechnen unter Benutzung der Relationen (35), (36), (37), die ja im Punkte x_0 gelten:

$$\begin{aligned} s(\varrho) &= \begin{vmatrix} y^- & z^+ \\ y^{-\prime} & z^{+\prime} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_n^- & z^+ \\ y_n^{-\prime} & z^{+\prime} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} \mathfrak{y}^- + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g} O(1) & \mathfrak{z}^+ + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g} O(1) \\ \mathfrak{y}^{-\prime} + \varrho^{-m} e^{-\varrho g} O(1) & \mathfrak{z}^{+\prime} + \varrho^{-m} e^{\varrho g} O(1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathfrak{y}^- + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g} O(1) & \mathfrak{z}^+ + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g} O(1) \\ \mathfrak{y}^{-\prime} + \varrho^{-m} e^{-\varrho g} O(1) & \mathfrak{z}^{+\prime} + \varrho^{-m} e^{\varrho g} O(1) \end{vmatrix}} \\ &= \left\{ \begin{vmatrix} \mathfrak{y}^- & \mathfrak{z}^+ \\ \mathfrak{y}^{-\prime} & \mathfrak{z}^{+\prime} \end{vmatrix} + \varrho^{-m} O(1) \right\} : \left\{ \begin{vmatrix} \mathfrak{y}^- & \mathfrak{z}^+ \\ \mathfrak{y}^{-\prime} & \mathfrak{z}^{+\prime} \end{vmatrix} + \varrho^{-m} O(1) \right\}. \end{aligned}$$

Benutzt man noch (38), so folgt schließlich

$$s(\varrho) = 1 + \varrho^{-m-1} O(1). \tag{40}$$

Zur Bestimmung von $t(\varrho)$ bemerke man, daß y^- für reelle x, also insbesondere für negative x reell ist und daß $\mathfrak{z}^+$ und $\mathfrak{y}^-$ für negative x konjugiert komplex sind. Daher ist

$$\begin{aligned} y^- - \mathfrak{y}^- - \mathfrak{z}^+ = {} & s(\varrho)\{\mathfrak{y}^- + \varrho^{-m-1} c(x,\varrho)\, e^{-\varrho g}\} + \\ & + t(\varrho)\{\mathfrak{z}^+ + \varrho^{-m-1} b(x,\varrho)\, e^{\varrho g}\} - \mathfrak{y}^- - \mathfrak{z}^+ \end{aligned}$$

für negative x reell. Dabei sind die in der ersten Gleichung (36) bzw. (37) auftretenden Faktoren $O(1)$ genauer mit $c(x,\varrho)$ und $b(x,\varrho)$ bezeichnet worden; sie sind gleichmäßig beschränkt für alle x auf C_{0n} bzw. C_{pn}, also jedenfalls für alle x des Intervalles

$$x_n \leqq x \leqq x_1. \tag{41}$$

Für den letzten Ausdruck kann man aber schreiben

$$\begin{aligned} y^- - \mathfrak{y}^- - \mathfrak{z}^+ &= (s(\varrho) - 1)\,\mathfrak{y}^- + (t(\varrho) - 1)\,\mathfrak{z}^+ + \\ &\quad + s(\varrho)\,\varrho^{-m-1} c(x,\varrho)\, e^{-\varrho g} + t(\varrho)\,\varrho^{-m-1} b(x,\varrho)\, e^{\varrho g} \\ &= (t(\varrho) - 1)\,\mathfrak{z}^+ + t(\varrho)\,\varrho^{-m-1} b(x,\varrho)\, e^{\varrho g(x)} + \varrho^{-m-1} f(x,\varrho), \end{aligned} \tag{42}$$

wobei $f(x,\varrho)$ im Intervalle (41) für genügend große ϱ gleichmäßig beschränkt ist, da $|e^{\varrho g}| = 1$ für negative x ist.

Aus der Realität von (42) folgt, daß

$$\varrho^{m+1}(t(\varrho)-1) \tag{43}$$

für $\varrho \to \infty$ beschränkt bleiben muß. Denn wäre das nicht der Fall, so gäbe es eine nach ∞ strebende Folge $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ derart, daß

$$\lim_{\nu\to\infty} |\varrho_\nu^{m+1}(t(\varrho_\nu)-1)| = \infty \tag{44}$$

wäre. Insbesondere wäre $t(\varrho_\nu) - 1 \neq 0$ für genügend große ϱ_ν, so daß man (42) für solche ϱ_ν auch umformen kann in

$$(t(\varrho_\nu)-1)\left\{\mathfrak{z}^+(x,\varrho_\nu) + \frac{t(\varrho_\nu)}{\varrho_\nu^{m+1}(t(\varrho_\nu)-1)} b(x,\varrho_\nu) e^{\varrho_\nu g(x)} + \frac{f(x,\varrho_\nu)}{\varrho_\nu^{m+1}(t(\varrho_\nu)-1)}\right\}. \tag{45}$$

Nun gehen aber die letzten beiden Glieder der geschweiften Klammer wegen (44) für alle x des Intervalles (41) gleichmäßig nach Null, wenn $\nu \to \infty$ geht, so daß man für (45) mit Benutzung von (34) schreiben kann

$$(t(\varrho_\nu)-1)\{k^+(x)\, e^{\varrho_\nu g(x)} + \varepsilon(x,\varrho_\nu)\}, \tag{46}$$

worin

$$\lim_{\nu\to\infty} \varepsilon(x,\varrho_\nu) = 0$$

gleichmäßig für alle x des Intervalles (41) gilt.

Wenn (46) reell sein soll, so muß der Arkus der geschweiften Klammer bei festem ϱ unabhängig von x sein. Wir wählen nun ϱ_ν so groß, daß I. $|\varepsilon(x,\varrho_\nu)| < \frac{1}{2}|k^+(x)|$ für jedes x des Intervalles (41) ist ($|k^+(x)|$ ist in diesem ganzen Intervalle positiv), und II. so groß, daß der Arkus von $e^{\varrho_\nu g(x)} k^+(x)$ in demselben Intervalle um mindestens 2π sich ändert. Auf Grund der ersten Annahme unterscheidet sich der Arkus von $e^{\varrho_\nu g(x)} k^+(x)$ von demjenigen der ganzen geschweiften Klammer um weniger als $\frac{2\pi}{6}$, weil $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ist, so daß auf Grund der zweiten Annahme der Arkus der Klammer nicht konstant sein kann. $\varrho^{m+1}(t(\varrho)-1)$ bleibt somit für $\varrho \to \infty$ beschränkt. Es gilt also

$$t(\varrho) = 1 + \varrho^{-m-1} 0(1). \tag{47}$$

Somit ist im Intervalle (41) nach (35), (36), (40) und (47)

$$\begin{aligned} y^-(x,\varrho) &= s(\varrho)\, y_n^-(x,\varrho) + t(\varrho)\, z^+(x,\varrho) \\ &= \mathfrak{y}^-(x,\varrho) + \mathfrak{z}^+(x,\varrho) + \varrho^{-m-1} O(1) \\ &= 2\,\Re\,(\mathfrak{y}^-(x,\varrho)) + \varrho^{-m-1} O(1). \end{aligned}$$

Damit ist die erste Formel (28) von Satz II bewiesen. Die zweite Formel (28) folgt durch Differentiation:

$$\begin{aligned} y^{-\prime}(x,\varrho) &= s(\varrho)\, y_n^{-\prime}(x,\varrho) + t(\varrho)\, z^{+\prime}(x,\varrho) \\ &= \mathfrak{y}^{-\prime}(x,\varrho) + \mathfrak{z}^{+\prime}(x,\varrho) + \varrho^{-m} O(1) \\ &= 2\,\Re\,(\mathfrak{y}^{-\prime}(x,\varrho)) + \varrho^{-m} O(1). \end{aligned}$$

Der Beweis von Satz II ist damit geführt.

§ 4.

Beweis von Satz III.

Es sei $y^-(x, \varrho)$ die in Satz II eingeführte Lösung der Differentialgleichung (1). Sie ist für reelle x reell und erfüllt in den Punkten x_p und x_n die asymptotischen Relationen (27) und (28). Es sei ferner $y_0^+(x, \varrho)$ eine Lösung der Differentialgleichung (1), die im Punkte x_0 des § 3, Fig. 2 asymptotisch durch $\mathfrak{y}^+(x, \varrho)$ dargestellt wird. Nach Satz I gilt dann diese Darstellung auch in den Punkten x_n und x_p, d. h. es gilt

$$\left.\begin{aligned} y_0^+(x, \varrho) &= \mathfrak{y}^+(x, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x)} O(1) \\ y_0^{+\prime}(x, \varrho) &= \mathfrak{y}^{+\prime}(x, \varrho) + \varrho^{-m} e^{\varrho g(x)} O(1) \end{aligned}\right\} \quad x = x_n \text{ oder } x_p. \tag{48}$$

Wir haben in y_0^+ und y^- zwei Lösungen von (1), die sowohl im Punkte x_p als im Punkte x_n asymptotisch bekannt sind. Wir berechnen ihre Wronskische Determinante in x_p

$$\begin{vmatrix} y_0^+ & y^- \\ y_0^{+\prime} & y^{-\prime} \end{vmatrix}_{x=x_p} = \begin{vmatrix} \mathfrak{y}^+ + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g} O(1) & \mathfrak{y}^- + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g} O(1) \\ \mathfrak{y}^{+\prime} + \varrho^{-m} e^{\varrho g} O(1) & \mathfrak{y}^{-\prime} + \varrho^{-m} e^{\varrho g} O(1) \end{vmatrix}_{x=x_p}$$
$$= -2\varrho g'(x_p) h^+(x_p) h^-(x_p) + O(1).$$

Da dieser Wert wegen (4) und (5) $\neq 0$ ist für genügend große ϱ, so sind y_0^+ und y^- für genügend große ϱ linear unabhängig.

Wir hätten die Determinante auch folgendermaßen umformen können:

$$\begin{vmatrix} y_0^+ & y^- \\ y_0^{+\prime} & y^{-\prime} \end{vmatrix}_{x=x_p} = \begin{vmatrix} \mathfrak{y}^+ & \mathfrak{y}^- \\ \mathfrak{y}^{+\prime} & \mathfrak{y}^{-\prime} \end{vmatrix}_{x=x_p} + \varrho^{-m} O(1). \tag{49}$$

Da die rechts stehende Determinante reell ist, so folgt für den Imaginärteil

$$\Im \begin{vmatrix} y_0^+ & y^- \\ y_0^{+\prime} & y^{-\prime} \end{vmatrix} = \varrho^{-m} O(1). \tag{50}$$

Dies gilt zunächst im Punkte $x = x_p$, aber ebenso in $x = x_n$. Denn nach einem bekannten Satze ist

$$\begin{vmatrix} y_0^+ & y^- \\ y_0^{+\prime} & y^{-\prime} \end{vmatrix}_{x=x_n} = \begin{vmatrix} y_0^+ & y^- \\ y_0^{+\prime} & y^{-\prime} \end{vmatrix}_{x=x_p} \cdot e^{-\int_{x_p}^{x_n} p(x)\,dx}, \tag{51}$$

und der Exponentialfaktor ist reell. Benutzt man in (50) die asymptotischen Darstellungen (48) und (28) von y_0^+ und y^- im Punkte x_n, so ergibt sich weiter wegen

$$\begin{vmatrix} y_0^+ & y^- \\ y_0^{+\prime} & y^{-\prime} \end{vmatrix}_{x=x_n} = 2 \begin{vmatrix} \Re(\mathfrak{y}^+) & \Re(\mathfrak{y}^-) \\ \Re(\mathfrak{y}^{+\prime}) & \Re(\mathfrak{y}^{-\prime}) \end{vmatrix}_{x=x_n} + 2i \begin{vmatrix} \Im(\mathfrak{y}^+) & \Re(\mathfrak{y}^-) \\ \Im(\mathfrak{y}^{+\prime}) & \Re(\mathfrak{y}^{-\prime}) \end{vmatrix}_{x=x_n} + \varrho^{-m} O(1)$$

die Formel

$$\begin{vmatrix} \Im(\mathfrak{y}^+) & \Re(\mathfrak{y}^-) \\ \Im(\mathfrak{y}^{+\prime}) & \Re(\mathfrak{y}^{-\prime}) \end{vmatrix}_{x=x_n} = \varrho^{-m} O(1). \tag{52}$$

Wir kommen nun zu der Lösung $y^+(x, \varrho)$ des Satzes III. Sie läßt sich linear ausdrücken durch die linear unabhängigen Lösungen y_0^+ und y^-:

$$(53) \qquad \begin{aligned} y^+ &= \alpha(\varrho)\, y_0^+ + \beta(\varrho)\, y^- \\ y^{+\prime} &= \alpha(\varrho)\, y_0^{+\prime} + \beta(\varrho)\, y^{-\prime}. \end{aligned}$$

Zur Berechnung von α und β setzen wir darin $x = x_n$ und finden

$$(54) \qquad \alpha = \frac{\begin{vmatrix} y^+ & y^- \\ y^{+\prime} & y^{-\prime} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_0^+ & y^- \\ y_0^{+\prime} & y^{-\prime} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} y_0^+ & y^- \\ y^{+\prime} & y^{-\prime} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y^+ - y_0^+ & y^- \\ y^{+\prime} - y^{+\prime} & y^{-\prime} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_0^+ & y^- \\ y_0^{+\prime} & y^{-\prime} \end{vmatrix}}.$$

Die zweite Determinante des Zählers ist nach (48), (29) und (28) gleich

$$\begin{vmatrix} -i\,\Im(\mathfrak{y}^+) + \varrho^{-m-1} O(1) & 2\,\Re(\mathfrak{y}^-) + \varrho^{-m-1} O(1) \\ -i\,\Im(\mathfrak{y}^{+\prime}) + \varrho^{-m} O(1) & 2\,\Re(\mathfrak{y}^{-\prime}) + \varrho^{-m} O(1) \end{vmatrix}$$

$$= -2i \begin{vmatrix} \Im(\mathfrak{y}^+) & \Re(\mathfrak{y}^-) \\ \Im(\mathfrak{y}^{+\prime}) & \Re(\mathfrak{y}^{-\prime}) \end{vmatrix} + \varrho^{-m} O(1) = \varrho^{-m} O(1)$$

wegen (52). Bedenkt man noch, daß die Nennerdeterminante von (54) nach (49) und (51) gleich

$$a\varrho + O(1) \quad (a = \text{const} \neq 0)$$

ist, so folgt

$$\alpha(\varrho) = 1 + \varrho^{-m-1} O(1).$$

Ebenso ergibt sich für $\beta(\varrho)$ der Wert

$$\beta(\varrho) = \left| \begin{matrix} y_0^+ & y^+ \\ y_0^{+\prime} & y^{+\prime} \end{matrix} \right|_{x = x_n} : \left| \begin{matrix} y_0^+ & y^- \\ y_0^{+\prime} & y^{-\prime} \end{matrix} \right|_{x = x_n} = O(1),$$

denn die Zählerdeterminante ist auf Grund von (48) und (29) gleich $\varrho\, O(1)$.

Setzt man die gefundenen Abschätzungen von α und β in (53) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} y^+(x_p, \varrho) &= (1 + \varrho^{-m-1} O(1)) \{\mathfrak{y}^+(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x_p)} O(1)\} \\ &\quad + O(1) \{\mathfrak{y}^-(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g(x_p)} O(1)\} \\ &= \mathfrak{y}^+(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x_p)} O(1) \end{aligned}$$

und ebenso

$$y^{+\prime}(x_p, \varrho) = \mathfrak{y}^{+\prime}(x_p, \varrho) + \varrho^{-m} e^{\varrho g(x_p)} O(1).$$

Damit ist Satz III bewiesen.

§ 5.

Beweis von Satz IV.

Wir können annehmen, daß das im Satz IV genannte Intervall $\mathfrak{n}$ der negativen reellen Achse den Punkt x_n enthält. Es sei $y_1(x, \varrho)$ diejenige

Lösung der Differentialgleichung (1), die im Punkte x_n dieselben Anfangswerte besitzt wie $\mathfrak{y}$, das heißt es sei

$$y_1(x_n, \varrho) = \mathfrak{y}(x_n, \varrho),$$
$$y_1'(x_n, \varrho) = \mathfrak{y}'(x_n, \varrho).$$

Nach Satz I gilt dann in $\mathfrak{n}$ gleichmäßig

$$\begin{aligned} y_1(x, \varrho) &= \mathfrak{y}(x, \varrho) + \varrho^{-\mathfrak{m}-1} O(1), \\ y_1'(x, \varrho) &= \mathfrak{y}'(x, \varrho) + \varrho^{-\mathfrak{m}} O(1). \end{aligned} \tag{55}$$

Subtrahiert man von den mit 2 multiplizierten Relationen (33) die Relationen (55), so kommt zunächst für $x = x_n$

$$\begin{aligned} 2\,y(x, \varrho) - y_1(x, \varrho) &= \overline{\mathfrak{y}(x, \varrho)} + \varrho^{-\mathfrak{m}-1} O(1), \\ 2\,y'(x, \varrho) - y_1'(x, \varrho) &= \overline{\mathfrak{y}'(x, \varrho)} + \varrho^{-\mathfrak{m}} O(1). \end{aligned} \tag{56}$$

Darin bezeichnet der Querstrich den konjugiert komplexen Wert. Nun ist aber $\overline{\mathfrak{y}(x, \varrho)}$ auf der negativen reellen Achse wieder eine asymptotische Lösung (im Falle $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}^-$ haben wir sie in § 3 mit $\mathfrak{z}^+$ bezeichnet). Daher gelten die Relationen (56) nach Satz I gleichmäßig für alle x in $\mathfrak{n}$. Durch Addition von (55) und (56) folgt die gleichmäßige Gültigkeit von (33), also die Behauptung des Satzes IV.

Literaturverzeichnis.

[1] Liouville, Sur le développement des functions. Journ. de math. **2** (1837).

[2] J. Horn, Über lineare Differentialgleichungen mit einem willkürlichen Parameter. Math. Annalen **52**, S. 271–292; Über eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem veränderlichen Parameter. Ebenda, S. 340–362.

[3] G. D. Birkhoff, On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter. Amer. Math. Soc. Trans. **9** (1908) S. 219–231.

[4] O. Blumenthal, Über asymptotische Lösungen. Arch. Math. Phys. III **19** (1912), S. 136–174.

[5] O. Perron, Über die Abhängigkeit der Integrale eines Systems linearer Differentialgleichungen von einem Parameter I, II, III. Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Heidelberg 1918 und 1919.

[6] H. Jeffreys, On certain approximate solutions of linear differential equations of the second order. Proc. London Math. Soc. (2) **23** (1925), S. 428–454.

[7] S. Goldstein, A note on certain approximate solutions of linear differentia, equations of the second order. Proc. London Math. Soc. (2) **28** (1928), S. 81–90.

[8] R. E. Langer, On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with an application to Bessel functions of large order. Trans. Amer. Math. Soc. **33** (1931), S. 23–64.

[9] R. E. Langer, The boundary problem of an ordinary linear differential system in the complex domain. Trans. Amer. Math. Soc. **46** (1939), S. 151–190.

(Eingegangen am 23. 1. 1942.)

Zur Frage des Gleichgewichts von Viereckssnetzen aus verknoteten und gespannten Fäden *).

Zum 80. Geburtstag von S. FINSTERWALDER.

Erster Teil:
Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen (Kapitel I und II); Kennzeichnung, Übersicht und kurze Beschreibung der allgemeinsten Netze besonderer Netzklassen (Kapitel III und IV).

Von

H. Graf und H. Thomas in Darmstadt.

I. Fadennetze mit allgemeiner Spannungsverteilung und allgemeiner Netzstruktur.

Ein einfach zusammenhängender Bereich einer offenen, im Sinne der Differentialgeometrie regulären Fläche, den wir im folgenden kurz ‚Fläche' nennen wollen, sei mit einem ‚Netz' aus zwei Kurvenscharen überzogen. Dabei sei der einfach zusammenhängende Bereich das topologische Abbild eines konvexen, einfach zusammenhängenden Bildbereiches der Euklidischen Ebene, und die beiden Kurvenscharen des Netzes seien das topologische Abbild von zwei nicht zusammenfallenden Scharen paralleler Geraden innerhalb des Bildbereiches. Wir denken uns Fläche und Netzkurven modellmäßig realisiert: Die Fläche als starre und glatte Schale, das Kurvennetz als Fadennetz, dessen Fäden in den Kreuzungspunkten miteinander verknotet sind. Dabei seien die Fäden ideale Fäden, d. h. unendlich dünn, undehnbar, gewichtslos, ohne Zwang verbiegbar, ohne Reibung auf der Fläche gleitend und hierbei stets in der Fläche verbleibend. Wir lassen in den Randpunkten unseres über das Flächenmodell ausgebreiteten Fadennetzes ‚Randkräfte' in Richtung der Fäden angreifen. Diese Randkräfte können stets so gewählt werden, daß sich das Fadennetz im Gleichgewicht befindet. Dabei werden die Netzfäden im allgemeinen einen Druck senkrecht zur Trägerfläche ausüben. Wir fragen, ob beim Übergang zu einem Fadennetz mit infinitesimalen Maschen und mit infinitesimalen Randkräften sich Fläche, Netz und Randkräfte so bestimmen lassen, daß in allen Flächenpunkten die von dem Netz auf die Fläche ausgeübten Druckkräfte Null werden. Dann ist die starre Fläche als widerstandgebender Träger für das Fadennetz zur Aufrechterhaltung des

*) Vergl. hierzu: S. FINSTERWALDER, Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation, Jahresberichte der D. M. V. 6 (1899), S. 67 ff.

Gleichgewichts entbehrlich; das in den Flächenrand eingespannte Fadennetz erzeugt für sich allein ein ‚Fadenmodell' der nämlichen Fläche [1]).

Unser gesuchtes Fadennetz, das sich unter dem Einfluß von Randkräften im Gleichgewicht befindet, bestehe aus den Parameterkurven der Trägerfläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$. Um die Fadenspannungen längs der Kurvenscharen $v =$ konst. (u-Linien) bzw. $u =$ konst. (v-Linien) auf eine noch genauer zu erklärende Weise zu kennzeichnen, führen wir zwei stets positive [2]) Funktionen $\sigma_1(u, v)$ und $\sigma_2(u, v)$ ein. Für diese und alle weiteren Funktionen, die wir später noch einführen werden, setzen wir Regularität voraus. Wir fragen jetzt nach den Bedingungsgleichungen, die zwischen den Grundgrößen erster Ordnung E, F, G und zweiter Ordnung L, M, N der Trägerfläche und den Spannungsfunktionen σ_1, σ_2 des Fadennetzes bestehen.

Zunächst denken wir uns die Parameterkurven auf der Fläche zu zwei Folgen *diskret* aufeinanderfolgender Kurven angeordnet und zwar so, daß sich bei ihrer topologischen Abbildung in die u/v-Ebene — mit u und v als rechtwinkligen Kartesischen Koordinaten — zwei Folgen paralleler gleichabstehender Geraden mit dem Abstand Δt ergeben. In jedem Knotenpunkt unseres diskreten, im allgemeinen krummlinigen und ungleichmaschigen Vierecksnetzes auf der Fläche, dem also ein geradliniges und gleichmaschiges Quadratnetz in der u/v-Ebene entspricht, werde nun mittels der eingeführten Spannungsfunktionen den beiden hindurchgehenden Fäden zunächst jeweils der Spannungsbetrag $\Delta t\, \sigma_1(u, v)$ bzw. $\Delta t\, \sigma_2(u, v)$ zugeordnet.

Wir ersetzen nun überall die Kurvenbögen unseres Viereckssnetzes durch deren *Sehnen*, denken uns das so entstandene Sehnennetz wieder durch verknotete und gespannte (andere) Fäden realisiert und fragen nach den Gleichgewichtsbedingungen in einem beliebigen Knotenpunkt P des Sehnennetzes. Wir betrachten die vier Sehnenvektoren $\Delta \mathfrak{x}_1$, $\Delta \bar{\mathfrak{x}}_1$ bzw. $\Delta \mathfrak{x}_2$, $\Delta \bar{\mathfrak{x}}_2$, die vom Knotenpunkt P aus nach den beiden jeweils benachbarten Knotenpunkten auf der u-Kurve bzw. auf der v-Kurve zielen:

$$\Delta \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}(u+\Delta t, v) - \mathfrak{x}(u, v) = \quad \Delta t\, \mathfrak{x}_u + \frac{\Delta t^2}{2} \mathfrak{x}_{uu} + \Delta t^3 (\cdot\cdot),$$

$$\Delta \bar{\mathfrak{x}}_1 = \mathfrak{x}(u-\Delta t, v) - \mathfrak{x}(u, v) = -\Delta t\, \mathfrak{x}_u + \frac{\Delta t^2}{2} \mathfrak{x}_{uu} + \Delta t^3 (\cdot\cdot),$$

$$\Delta \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}(u, v+\Delta t) - \mathfrak{x}(u, v) = \quad \Delta t\, \mathfrak{x}_v + \frac{\Delta t^2}{2} \mathfrak{x}_{vv} + \Delta t^3 (\cdot\cdot),$$

$$\Delta \bar{\mathfrak{x}}_2 = \mathfrak{x}(u, v-\Delta t) - \mathfrak{x}(u, v) = -\Delta t\, \mathfrak{x}_v + \frac{\Delta t^2}{2} \mathfrak{x}_{vv} + \Delta t^3 (\cdot\cdot).$$

[1]) Diese Viereckssnetze lassen sich nicht nur als im Gleichgewicht befindliche Fadennetze, sondern auch als ‚wackelige' Kurvennetze mit starren Viereckmaschen deuten; vgl. hierzu etwa R. Sauer, Wackelige Kurvennetze bei einer infinitesimalen Flächenverbiegung. Math. Annalen **108** (1933), S. 673.

[2]) Ein Vorzeichenwechsel der Funktionen σ_1 und σ_2 würde den Übergang von Zug- zu Druckspannungen bedeuten; Druckspannungen kann aber unser Fadennetz nicht aufnehmen.

Als Einheitsvektoren $\mathfrak{e} = \frac{\Delta \mathfrak{x}}{\sqrt{\Delta \mathfrak{x}^2}}$ in Richtung dieser vier Sehnenvektoren ergeben sich hieraus entsprechend:

$$\mathfrak{e}_1 = \frac{\mathfrak{x}_u}{\sqrt{E}} + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\mathfrak{x}_{uu}}{\sqrt{E}} - \frac{E_u \mathfrak{x}_u}{2E\sqrt{E}}\right) + \Delta t^2(\cdots),$$

$$\bar{\mathfrak{e}}_1 = -\frac{\mathfrak{x}_u}{\sqrt{E}} + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\mathfrak{x}_{uu}}{\sqrt{E}} - \frac{E_u \mathfrak{x}_u}{2E\sqrt{E}}\right) + \Delta t^2(\cdots),$$

$$\mathfrak{e}_2 = \frac{\mathfrak{x}_v}{\sqrt{G}} + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\mathfrak{x}_{vv}}{\sqrt{G}} - \frac{G_v \mathfrak{x}_v}{2G\sqrt{G}}\right) + \Delta t^2(\cdots),$$

$$\bar{\mathfrak{e}}_2 = -\frac{\mathfrak{x}_v}{\sqrt{G}} + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\mathfrak{x}_{vv}}{\sqrt{G}} - \frac{G_v \mathfrak{x}_v}{2G\sqrt{G}}\right) + \Delta t^2(\cdots).$$

Wir wollen nun den Sehnen als Fadenspannungen jeweils die Mittelwerte der Spannungen in den Sehnenendpunkten, d. h. in den Knotenpunkten unseres Netzes zuerteilen und erhalten demgemäß für unsere vier von P ausgehenden Sehnen die Spannungsbeträge:

$$\Delta k_1 = \frac{\Delta t}{2}\left(\sigma_1(u+\Delta t, v) + \sigma_1(u,v)\right) = \Delta t\,\sigma_1 + \frac{\Delta t^2}{2}(\sigma_1)_u + \Delta t^3(\cdots),$$

$$\Delta \bar{k}_1 = \frac{\Delta t}{2}\left(\sigma_1(u-\Delta t, v) + \sigma_1(u,v)\right) = \Delta t\,\sigma_1 - \frac{\Delta t^2}{2}(\sigma_1)_u + \Delta t^3(\cdots),$$

$$\Delta k_2 = \frac{\Delta t}{2}\left(\sigma_2(u, v+\Delta t) + \sigma_2(u,v)\right) = \Delta t\,\sigma_2 + \frac{\Delta t^2}{2}(\sigma_2)_v + \Delta t^3(\cdots),$$

$$\Delta \bar{k}_2 = \frac{\Delta t}{2}\left(\sigma_2(u, v-\Delta t) + \sigma_2(u,v)\right) = \Delta t\,\sigma_2 - \frac{\Delta t^2}{2}(\sigma_2)_v + \Delta t^3(\cdots).$$

Die in dem Knotenpunkt P des Netzes zusammenlaufenden beiden Sehnen des zur u-Linie bzw. zur v-Linie gehörenden Sehnenpaares besitzen somit jeweils im Mittel den Spannungswert $\frac{1}{2}(\Delta k_1 + \Delta \bar{k}_1)$ bzw. $\frac{1}{2}(\Delta k_2 + \Delta \bar{k}_2)$, der bis auf Größen der Ordnung Δt^3 mit dem ursprünglich dem Knotenpunkt P zugeordneten Spannungswert $\Delta t\,\sigma_1$ bzw. $\Delta t\,\sigma_2$ übereinstimmt. Damit nun in dem Knotenpunkt P Gleichgewicht herrscht, muß die Vektorsumme der vier dort angreifenden Kräfte verschwinden; wir erhalten somit die Gleichgewichtsbedingung

$$\Delta k_1\,\mathfrak{e}_1 + \Delta \bar{k}_1\,\bar{\mathfrak{e}}_1 + \Delta k_2\,\mathfrak{e}_2 + \Delta \bar{k}_2\,\bar{\mathfrak{e}}_2 = 0,$$

d. h.

$$\left(\frac{\mathfrak{x}_{uu}}{\sqrt{E}} - \frac{E_u \mathfrak{x}_u}{2E\sqrt{E}}\right)\sigma_1 + \left(\frac{\mathfrak{x}_{vv}}{\sqrt{G}} - \frac{G_v \mathfrak{x}_v}{2G\sqrt{G}}\right)\sigma_2 + \frac{\mathfrak{x}_u}{\sqrt{E}}(\sigma_1)_u + \frac{\mathfrak{x}_v}{\sqrt{G}}(\sigma_2)_v + \Delta t(\cdots) = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt einen Vektor dar, der verschwinden soll; es müssen daher die inneren Produkte des Vektors mit drei nicht komplanaren Vektoren, etwa den Tangentenvektoren $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$ und dem Flächen-

normalenvektor $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v$ verschwinden, also die folgenden drei Beziehungen gelten:

$$\sqrt{E}\,(\sigma_1)_u + \frac{F}{\sqrt{G}}(\sigma_2)_v + \frac{2GF_v - FG_v - GG_u}{2G\sqrt{G}}\sigma_2 + \Delta t(\cdots) = 0,$$

$$\sqrt{G}\,(\sigma_2)_v + \frac{F}{\sqrt{E}}(\sigma_1)_u + \frac{2EF_u - FE_u - EE_v}{2E\sqrt{E}}\sigma_1 + \Delta t(\cdots) = 0,$$

$$\frac{L}{\sqrt{E}}\sigma_1 + \frac{N}{\sqrt{G}}\sigma_2 + \Delta t(\cdots) = 0.$$

Wir führen jetzt den Grenzübergang $\Delta t \to 0$ durch, der unser Viereckssnetz aus den Sehnen der Parameterkurven in das *infinitesimale* Viereckssnetz aus den Parameterkurven selbst überführt und erhalten nach einer für das Folgende zweckmäßigen Umformung:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \sqrt{E}\,(\sigma_1)_u - (\sqrt{G})_u\sigma_2 + \left(\frac{F}{\sqrt{EG}}\sqrt{E}\,\sigma_2\right)_v = 0, \\ \sqrt{G}\,(\sigma_2)_v - (\sqrt{E})_v\sigma_1 + \left(\frac{F}{\sqrt{EG}}\sqrt{G}\,\sigma_1\right)_u = 0, \\ \frac{L}{E}\sqrt{E}\,\sigma_1 + \frac{N}{G}\sqrt{G}\,\sigma_2 = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen besagen, daß sich das Parameternetz als infinitesimales Fadennetz unter dem Einfluß von infinitesimalen Randkräften im Gleichgewicht befindet. Die Grundgrößen erster und zweiter Ordnung der Trägerfläche unseres im Gleichgewicht befindlichen Fadennetzes genügen neben diesen Gleichgewichtsbedingungen (I) auch noch den Flächen-Grundgleichungen von Codazzi und Gauss, also insgesamt sechs partiellen Differentialgleichungen. Es erweist sich als möglich und zweckmäßig, in diesen sechs Gleichungen die Grundgrößen durch Größen zu ersetzen, die für die Fläche und die Parameterkurven von unmittelbarer geometrischer Bedeutung sind. Diese Größen sind für die

	u-Linien	bzw.	v-Linien
die Bogenlängenfunktionen[3])	$s_1 = \sqrt{E} > 0$	bzw.	$s_2 = \sqrt{G} > 0$,
die Normalkrümmungen	$n_1 = \frac{L}{E}$	bzw.	$n_2 = \frac{N}{G}$,
der Schnittwinkel	$\omega = \arccos \frac{F}{\sqrt{EG}} \neq 0$,		
das „Schränkungsmaß“[4])	$m = \frac{M}{\sqrt{EG}}$.		

[3]) In jedem Netzknotenpunkt haben also die beiden hindurchgehenden Fäden die Längenelemente $s_1 dt$ bzw. $s_2 dt$ und sind mit den Kraftelementen $\sigma_1 dt$ bzw. $\sigma_2 dt$ gespannt.

[4]) Das Schränkungsmaß ist ein Maß für die „Unebenheit der Maschenvierecke“ (Verschränkung) des infinitesimalen Netzes (vgl. hierzu etwa Scheffers, Theorie der Flächen, S. 250).

Nach Einführung dieser Größen lauten die Gleichgewichtsbedingungen (I):

$$\text{(I 1)} \qquad \begin{cases} (\sigma_1)_u s_1 - (s_2)_u \sigma_2 + (\sigma_2 s_1 \cos\omega)_v = 0, \\ (\sigma_2)_v s_2 - (s_1)_v \sigma_1 + (\sigma_1 s_2 \cos\omega)_u = 0, \end{cases}$$

$$\text{(I 2)} \qquad n_1 \sigma_1 s_1 + n_2 \sigma_2 s_2 = 0;$$

und die Grundgleichungen:

$$\text{(I 3)} \qquad \begin{cases} (n_1)_v s_1 - m_u s_2 = \{(s_1)_v (2\cos^2\omega - 1) - (s_2)_u \cos\omega\} \frac{n_1}{\sin^2\omega} + \\ \qquad + \{(s_2)_u - (s_1)_v \cos\omega + \frac{s_2}{4} (\cos^2\omega)_u\} \frac{2m}{\sin^2\omega} + \\ \qquad + \{(s_1)_v - (s_2)_u \cos\omega - s_2 (\cos\omega)_u\} \frac{n_2}{\sin^2\omega}, \\ (n_2)_u s_2 - m_v s_1 = \{(s_2)_u (2\cos^2\omega - 1) - (s_1)_v \cos\omega\} \frac{n_2}{\sin^2\omega} + \\ \qquad + \{(s_1)_v - (s_2)_u \cos\omega + \frac{s_1}{4} (\cos^2\omega)_v\} \frac{2m}{\sin^2\omega} + \\ \qquad + \{(s_2)_u - (s_1)_v \cos\omega - s_1 (\cos\omega)_v\} \frac{n_1}{\sin^2\omega}, \end{cases}$$

$$\text{(I 4)} \qquad K = \frac{n_1 n_2 - m^2}{\sin^2\omega} = \frac{\omega_{uv} + (s_2 g_2)_u + (s_1 g_1)_v}{s_1 s_2 \sin\omega}.$$

Dabei sind K das Gausssche Krümmungsmaß der Fläche und

$$\text{(I 5)} \qquad g_1 = \frac{(s_2 \cos\omega)_u - (s_1)_v}{s_1 s_2 \sin\omega}, \qquad g_2 = \frac{(s_1 \cos\omega)_v - (s_2)_u}{s_1 s_2 \sin\omega}$$

die geodätischen Krümmungen der u-Linien bzw. v-Linien. Schließlich hat man noch für die mittlere Krümmung H der Fläche:

$$\text{(I 6)} \qquad H = \frac{n_1 - 2m\cos\omega + n_2}{2\sin^2\omega}$$

Da für die Netzkurven sowohl die Bogenlängenfunktionen s_1 und s_2 als auch die Spannungsfunktionen σ_1 und σ_2 als stets positiv eingeführt sind, so folgt aus der Gleichgewichtsbedingung (I 2), daß die Normalkrümmungen n_1 und n_2 der Netzkurven in jedem Knotenpunkt entgegengesetzte Vorzeichen haben oder aber beide zugleich verschwinden; letzteres besagt, daß an der betrachteten Stelle die Netzkurven in Richtung der Schmiegtangenten verlaufen. Die Trägerfläche muß also in jedem Punkt negativ gekrümmt oder eben sein.

Zusammenfassung. *Für jedes, unter dem Einfluß von infinitesimalen Randkräften im Gleichgewicht befindliche infinitesimale Fadennetz und seine Trägerfläche gelten die Gleichgewichtsbedingungen* (I 1), (I 2) *und die Grundgleichungen* (I 3), (I 4). *Diese Gleichungen stellen die Bedingungen für das allgemeinste derartige Fadennetz dar, da weder an die Fadenspannungen noch an die Netzstruktur noch an die Netzkurven selbst irgendwelche besonderen For-*

derungen gestellt sind. Die Trägerfläche muß in jedem Punkt negativ gekrümmt oder eben sein.

Den Fall der Ebene als Trägerfläche wollen wir jedoch für alles Folgende von der Betrachtung ausschließen.

II. Fadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur.

Unter unseren im Gleichgewicht befindlichen Fadennetzen mit infinitesimalen Fadenspannungen und mit infinitesimalen Netzmaschen betrachten wir jetzt spezielle Netze, die *isotrope Spannungsverteilung und rhombische Netzstruktur* besitzen sollen. Die isotrope Spannungsverteilung im Netz sei dabei durch die Forderung erklärt, daß in jedem Knotenpunkt des Netzes die Elementenpaare der Fadens*pannungen* einander gleich, also $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ sein sollen; in entsprechender Weise kann die rhombische Struktur des Netzes durch die Forderung erklärt werden, daß in jedem Knotenpunkt des Netzes die Elementenpaare der Faden*längen* einander gleich, also $s_1 = s_2 = s$ sein sollen.

Für $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ und $s_1 = s_2 = s$ lauten die Gleichgewichtsbedingungen (I 1) und (I 2):

$$\text{(II 1)} \qquad \sigma_u s - s_u \sigma + (\sigma s \cos\omega)_v = 0, \quad \sigma_v s - s_v \sigma + (\sigma s \cos\omega)_u = 0,$$

$$\text{(II 2)} \qquad n_1 = -n_2 = n;$$

und die Grundgleichungen (I 3) und (I 4):

$$\text{(II 3)} \quad \begin{cases} n_v - m_u = \left\{ -\frac{s_v}{s}\sin^2\omega \quad + \frac{1}{2}(\cos\omega)_u \right\} \frac{2n}{\sin^2\omega} + \\ \qquad + \left\{ \frac{s_u}{s} - \frac{s_v}{s}\cos\omega + \frac{1}{4}(\cos^2\omega)_u \right\} \frac{2m}{\sin^2\omega}, \\ n_u + m_v = \left\{ -\frac{s_u}{s}\sin^2\omega \quad + \frac{1}{2}(\cos\omega)_v \right\} \frac{2n}{\sin^2\omega} - \\ \qquad - \left\{ \frac{s_v}{s} - \frac{s_u}{s}\cos\omega + \frac{1}{4}(\cos^2\omega)_v \right\} \frac{2m}{\sin^2\omega}, \end{cases}$$

$$\text{(II 4)} \qquad K = -\frac{n^2+m^2}{\sin^2\omega} = \frac{\omega_{uv} + (s g_2)_u + (s g_1)_v}{s^2 \sin\omega};$$

dabei hat man für die geodätischen Krümmungen der Netzkurven:

$$\text{(II 5)} \qquad g_1 = \frac{(s\cos\omega)_u - s_v}{s^2 \sin\omega}, \qquad g_2 = \frac{(s\cos\omega)_v - s_u}{s^2 \sin\omega}.$$

Ferner erhält man wegen $n_1 = -n_2$ jetzt für die mittlere Krümmung:

$$\text{(II 6)} \qquad H = -\frac{\cos\omega}{\sin^3\omega}\, m.$$

Zum Schluß dieses Kapitels wollen wir die Gleichgewichtsbedingungen (II 1) durch drei Beziehungen ersetzen, die abwechselnd den Schnittwinkel ω, die

Spannungsfunktion σ und die Bogenlängenfunktion s nicht mehr enthalten. Die Elimination von ω — partielle Ableitung der Gleichungen (II 1) nach u bzw. v und anschließende Subtraktion — liefert:

$$\text{(II 7)} \qquad \frac{s_{uu} - s_{vv}}{s} = \frac{\sigma_{uu} - \sigma_{vv}}{\sigma}.$$

Die Elimination von σ — Auflösung der Gleichungen (II 1) nach $\frac{\sigma_u}{\sigma}$ und $\frac{\sigma_v}{\sigma}$:

$$\frac{\sigma_u}{\sigma} = \left\{\frac{s_u}{s}(\cos^2\omega + 1) - 2\frac{s_v}{s}\cos\omega + \frac{1}{2}(\cos^2\omega)_u - (\cos\omega)_v\right\}\frac{1}{\sin^2\omega},$$

$$\frac{\sigma_v}{\sigma} = \left\{\frac{s_v}{s}(\cos^2\omega + 1) - 2\frac{s_u}{s}\cos\omega + \frac{1}{2}(\cos^2\omega)_v - (\cos\omega)_u\right\}\frac{1}{\sin^2\omega},$$

partielle Ableitung dieser neuen Gleichungen nach v bzw. u und anschließende Subtraktion — liefert:

$$\text{(II 8)} \qquad \begin{aligned} &\left\{\ln\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}\right\}_{uu} + 4\left\{\frac{(\ln s)_v - (\ln s)_u\cos\omega}{\sin^2\omega}\right\}_u \\ &= \left\{\ln\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}\right\}_{vv} + 4\left\{\frac{(\ln s)_u - (\ln s)_v\cos\omega}{\sin^2\omega}\right\}_v. \end{aligned}$$

Die Elimination von s — völlig analog der von σ — liefert:

$$\text{(II 9)} \qquad \begin{aligned} &\left\{\ln\frac{1+\cos\omega}{1-\cos\omega}\right\}_{uu} + 4\left\{\frac{(\ln\sigma)_v + (\ln\sigma)_u\cos\omega}{\sin^2\omega}\right\}_u \\ &= \left\{\ln\frac{1+\cos\omega}{1-\cos\omega}\right\}_{vv} + 4\left\{\frac{(\ln\sigma)_u + (\ln\sigma)_v\cos\omega}{\sin^2\omega}\right\}_v. \end{aligned}$$

Zusammenfassung. *Für Fadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur gelten statt der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen* (I 1) *und* (I 2) *jetzt die Gleichgewichtsbedingungen* (II 1) *und* (II 2), *an deren Stelle auch je zwei der hieraus abgeleiteten Beziehungen* (II 7), (II 8) *und* (II 9) *treten können. Die Trägerfläche genügt statt den allgemeinen Grundgleichungen* (I 3) *und* (I 4) *jetzt den Grundgleichungen* (II 3) *und* (II 4).

III. Vier besondere Klassen von Fadennetzen mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur.

Von unseren infinitesimalen Fadennetzen mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur, die unter dem Einfluß von Randkräften im Gleichgewicht sind, betrachten wir in diesem Kapitel vier besondere Klassen. Bei jeder Klasse ist an das Netz noch je eine zusätzliche Forderung gestellt.

a) Geodätische Fadennetze, d. h. Fadennetze, bei denen die Netzkurven geodätische Linien der Trägerfläche sind. Sie genügen der zusätzlichen Bedingung $g_1 = g_2 = 0$.

Aus $g_1 = g_2 = 0$ folgt auf Grund der Gleichungen (II 5):

$$(s\cos\omega)_u - s_v = 0, \quad (s\cos\omega)_v - s_u = 0.$$

Mit Rücksicht hierauf lauten die Gleichgewichtsbedingungen (II 1):

$$s(\sigma_u + \sigma_v\cos\omega) = 0, \quad s(\sigma_v + \sigma_u\cos\omega) = 0,$$

woraus sich wegen $s \neq 0 \neq \sin\omega$ sofort σ als eine Konstante, etwa $= 1$, ergibt. Umgekehrt lauten für $\sigma = \text{konst.} \neq 0$ die Gleichgewichtsbedingungen (II 1):

$$(s\cos\omega)_u - s_v = 0, \quad (s\cos\omega)_v - s_u = 0;$$

hieraus ergibt sich auf Grund der Gleichungen (II 5) und wegen $s \neq 0 \neq \sin\omega$ wieder $g_1 = g_2 = 0$.

Bei geodätischen Fadennetzen[5]) *mit isotroper Spannungsverteilung haben also alle Fäden überall die gleiche Spannung. Umgekehrt haben Fadennetze mit überall gleicher, nicht verschwindender Fadenspannung stets geodätische Netzlinien.*

Um nunmehr auch den Schnittwinkel ω und die Bogenlängenfunktion s der Netzkurven zu bestimmen, setzen wir zunächst in der Gleichgewichtsbedingung (II 9) $\sigma = 1$ und erhalten die Differentialgleichung:

$$\left\{\ln\frac{1+\cos\omega}{1-\cos\omega}\right\}_{uu} = \left\{\ln\frac{1+\cos\omega}{1-\cos\omega}\right\}_{vv},$$

in deren allgemeiner Lösung

$$\ln\frac{1+\cos\omega}{1-\cos\omega} = \ln P - \ln Q, \quad \text{d. h.} \quad \cos\omega = \frac{P-Q}{P+Q}$$

$P(u+v)$ und $Q(u-v)$ willkürliche, nicht verschwindende Funktionen der angegebenen Argumente sind. Trägt man schließlich die für σ und ω gewonnenen Ergebnisse in die Gleichgewichtsbedingungen (II 1) ein und bezeichnet mit $'$ die Ableitungen nach dem jeweiligen Argument, so erhält man:

$$\frac{s_u}{s} = \frac{P'+Q'}{P+Q}, \quad \frac{s_v}{s} = \frac{P'-Q'}{P+Q}, \quad \text{d. h.} \quad s = P+Q.$$

---

[5]) Dabei braucht die Netzstruktur nicht notwendig rhombisch zu sein; denn der angegebene Satz läßt sich für $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ auch aus den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (I 1) und den Gleichungen (I 5) herleiten. — Bei geodätischen Fadennetzen kann auch an Stelle der Verknotung ein passendes Übereinanderlagern der idealen (also reibungslos übereinander gleitenden) Fäden treten. Solche Fadennetze sind, sofern ihre Trägerflächen Dreh-, Schrauben- bzw. Minimalflächen sind, bereits untersucht worden. Vgl. H. THOMAS, Über Flächen, auf denen sich besondere Arten von Netzen geodätischer Linien ausbreiten lassen. Math. Zeitschr. **44** (1938), S. 257.

Für geodätische Fadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur ergeben sich somit die folgenden Gleichgewichtsbedingungen:

$$\text{(III a 1)} \quad s = P(u+v) + Q(u-v), \quad \sigma = 1, \quad \omega = \arccos \frac{P(u+v) - Q(u-v)}{P(u+v) + Q(u-v)},$$

$$\text{(III a 2)} \quad n_1 = -n_2 = n.$$

Die Trägerfläche des Netzes bestimmt sich aus diesen Gleichungen und den Grundgleichungen, welche jetzt lauten:

$$\text{(III a 3)} \quad \begin{cases} n_v - m_u = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q}\right) - 2\frac{P'-Q'}{P+Q}\right\} n + \\ \qquad + \left\{\frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q} + \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q}\right)\frac{P-Q}{P+Q}\right\} m, \\ n_u + m_v = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q}\right) - 2\frac{P'+Q'}{P+Q}\right\} n - \\ \qquad - \left\{\frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q} + \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q}\right)\frac{P-Q}{P+Q}\right\} m, \end{cases}$$

$$\text{(III a 4)} \quad K = -\frac{(P+Q)^2}{4PQ}(n^2+m^2)$$
$$= -\frac{1}{4(P+Q)^3}\left\{P\left(2\frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2}\right) + P\left(2\frac{P''}{P} - 3\frac{P'^2}{P^2}\right) + \right.$$
$$\left. + Q\left(2\frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2}\right) + Q\left(2\frac{Q''}{Q} - 3\frac{Q'^2}{Q^2}\right)\right\}.$$

Die erste Grundform

$$s^2(u'^2 + 2u'v'\cos\omega + v'^2)$$

der Trägerfläche schreibt sich, wenn wir gemäß den Gleichungen (III a 1) die Funktionen s und ω durch $P(u+v)$ und $Q(u-v)$ ersetzen, in der Form:

$$(P+Q)^2\left(u'^2 + 2u'v'\frac{P-Q}{P+Q} + v'^2\right).$$

Durch eine geeignete Parametertransformation kann nun das infinitesimal-rhombische u/v-Netz aus den geodätischen Netzlinien übergeführt werden in ein infinitesimal-quadratisches (isothermes) $\bar{u}/\bar{v}$-Netz aus den winkelhalbierenden Kurven der Netzlinien: wir setzen $A(u+v) = \bar{u}$, $B(u-v) = \bar{v}$, wobei $A'^2 = P$, $B'^2 = Q$ sein soll, und schreiben für $P(u+v) = \overline{P}(\bar{u})$, $Q(u-v) = \overline{Q}(\bar{v})$. Nach einer einfachen Umrechnung erscheint dann die erste Grundform unserer Trägerfläche in der Liouvilleschen Form[6]):

$$(\overline{P} + \overline{Q})(\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2).$$

---

[6]) Vgl. A. Voss, Über diejenigen Flächen, welche durch zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung in infinitesimale Rhomben zerlegt werden. Sitzungsberichte der Bayr. Akademie **36** (1906), S. 247.

Ergebnis. *Ein geodätisches Fadennetz mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur besitzt als Trägerfläche stets eine* Liouvillesche *Fläche. Die beiden (orthogonalen) Scharen der winkelhalbierenden Kurven unserer geodätischen Netzlinien bestehen aus den konfokalen Ellipsen und Hyperbeln der* Liouvilleschen *Fläche.*

b) Äquidistante Fadennetze, d. h. Fadennetze mit infinitesimalen Rhomben konstanter Seitenlänge (Tschebyscheff-Netze). Sie genügen der zusätzlichen Bedingung $s = \text{konst.}$; wir setzen $s = 1$ und verfügen damit über den Größenmaßstab.

Für $s = 1$ vereinfacht sich die Gleichgewichtsbedingung (II 8) und wir erhalten die Differentialgleichung:

$$\left\{\ln\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}\right\}_{uu} = \left\{\ln\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}\right\}_{vv};$$

ihre allgemeine Lösung lautet

$$\ln\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega} = \ln P - \ln Q, \quad \text{d. h. } \cos\omega = \frac{Q-P}{Q+P},$$

wobei $P(u+v)$ und $Q(u-v)$ wieder willkürliche, nicht verschwindende Funktionen der angegebenen Argumente sind. Trägt man schließlich diese Ausdrücke für s und ω in die Gleichgewichtsbedingungen (II 1) ein, so erhält man:

$$\frac{\sigma_u}{\sigma} = \frac{P'+Q'}{P+Q}, \quad \frac{\sigma_v}{\sigma} = \frac{P'-Q'}{P+Q}, \quad \text{d. h. } \sigma = P+Q.$$

Für äquidistante Fadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur ergeben sich somit die folgenden Gleichgewichtsbedingungen:

(III b 1) $$s = 1, \quad \sigma = P(u+v)+Q(u-v), \quad \omega = \arccos\frac{Q(u-v)-P(u+v)}{Q(u-v)+P(u+v)},$$

(III b 2) $$n_1 = -n_2 = n.$$

Die Trägerfläche des Netzes bestimmt sich aus diesen Gleichungen und den Grundgleichungen, welche jetzt lauten:

(III b 3) $$\begin{cases} n_v - m_u = -\frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P}-\frac{Q'}{Q}\right)n - \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P}-\frac{Q'}{Q}\right)\frac{Q-P}{Q+P}m, \\ n_u + m_v = -\frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P}+\frac{Q'}{Q}\right)n + \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P}+\frac{Q'}{Q}\right)\frac{Q-P}{Q+P}m, \end{cases}$$

(III b 4) $$K = -\frac{(P+Q)^2}{4PQ}(n^2+m^2)$$
$$= -\frac{1}{4(P+Q)}\left\{P\left(2\frac{Q''}{Q}-\frac{Q'^2}{Q^2}\right)+P\left(2\frac{P''}{P}-3\frac{P'^2}{P^2}\right)+\right.$$
$$\left.+Q\left(2\frac{P''}{P}-\frac{P'^2}{P^2}\right)+Q\left(2\frac{Q''}{Q}-3\frac{Q'^2}{Q^2}\right)\right\}.$$

c) Konjugierte Fadennetze, d. h. Fadennetze, bei denen die Netzkurven aus zwei konjugierten Kurvenscharen der Trägerfläche bestehen. Sie genügen der zusätzlichen Bedingung $m = 0$.

Für $m = 0$ lauten die Grundgleichungen (II 3):

$$\frac{n_v}{n} = -2\frac{s_v}{s} + \frac{(\cos\omega)_u}{\sin^2\omega}, \qquad \frac{n_u}{n} = -2\frac{s_u}{s} + \frac{(\cos\omega)_v}{\sin^2\omega}.$$

Durch partielle Ableitung dieser Gleichungen nach u bzw. v und anschließende Subtraktion erhält man:

$$\left\{\frac{(\cos\omega)_u}{\sin^2\omega}\right\}_u = \left\{\frac{(\cos\omega)_v}{\sin^2\omega}\right\}_v,$$

d. h.

$$\left\{\ln\frac{1+\cos\omega}{1-\cos\omega}\right\}_{uu} = \left\{\ln\frac{1+\cos\omega}{1-\cos\omega}\right\}_{vv};$$

hieraus folgt genau wie im Abschnitt a):

$$\cos\omega = \frac{P-Q}{P+Q},$$

wobei $P(u+v)$ und $Q(u-v)$ wieder willkürliche, nicht verschwindende Funktionen der angegebenen Argumente sind.

Für konjugierte Fadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur ergeben sich somit die folgenden Gleichgewichtsbedingungen:

(III c 1)
$$\begin{cases} \sigma_u s - s_u\sigma + (\sigma s\cos\omega)_v = 0, \quad \sigma_v s - s_v\sigma + (\sigma s\cos\omega)_u = 0, \\ \text{wobei} \quad \cos\omega = \dfrac{P(u+v) - Q(u-v)}{P(u+v) + Q(u-v)} \text{ ist,} \end{cases}$$

(III c 2)
$$n_1 = -n_2 = n, \quad m = 0.$$

Die Trägerfläche des Netzes bestimmt sich aus diesen Gleichungen und den Grundgleichungen, welche jetzt lauten:

(III c 3)
$$\frac{n_v}{n} = -2\frac{s_v}{s} + \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q}\right), \quad \frac{n_u}{n} = -2\frac{s_u}{s} + \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q}\right),$$

(III c 4)
$$K = -\frac{(P+Q)^2}{4PQ}n^2$$
$$= -\frac{(P+Q)^2}{4s^2PQ}\left\{\left(\frac{s_u}{s}\right)_u - \left(\frac{s_u}{s}\right)_v\frac{P-Q}{P+Q} - \frac{s_u}{s}\frac{1}{P+Q}\left(Q\frac{P'}{P} + P\frac{Q'}{Q}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{s_v}{s}\right)_v - \left(\frac{s_v}{s}\right)_u\frac{P-Q}{P+Q} - \frac{s_v}{s}\frac{1}{P+Q}\left(Q\frac{P'}{P} - P\frac{Q'}{Q}\right)\right\} +$$
$$+ \frac{1}{4s^2(P+Q)}\left\{P\left(2\frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2}\right) + P\left(2\frac{P''}{P} - 3\frac{P'^2}{P^2}\right) + \right.$$
$$\left. + Q\left(2\frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2}\right) + Q\left(2\frac{Q''}{Q} - 3\frac{Q'^2}{Q^2}\right)\right\}.$$

Da nach Gleichung (II 6) für $m = 0$ die mittlere Krümmung H verschwindet, ist die Trägerfläche hier stets eine *Minimalfläche.*

Die zweite Grundform

$$s^2(n_1u'^2 + 2mu'v' + n_2v'^2)$$

der Trägerfläche schreibt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (III c 2) in der Form:

$$ns^2(u'^2 - v'^2).$$

Durch die Parametertransformation $u + v = \bar{u}$, $u - v = \bar{v}$ führen wir das rhombische u/v-Netz aus den konjugierten Netzlinien in das orthogonale $\bar{u}/\bar{v}$-Netz aus den winkelhalbierenden Diagonalkurven der Netzlinien über. Die zweite Grundform der Trägerfläche erscheint dann in der Form:

$$n s^2 \bar{u}' \bar{v}',$$

d. h. die winkelhalbierenden Diagonalkurven des konjugierten Fadennetzes sind die Schmiegtangentenkurven der Trägerfläche.

Ergebnis. *Ein konjugiertes Fadennetz mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur besitzt als Trägerfläche stets eine Minimalfläche. Die beiden (orthogonalen) Scharen der winkelhalbierenden Kurven unserer konjugierten Netzlinien bestehen aus den Schmiegtangentenkurven der Minimalfläche.*

d) Schmiegtangenten-Fadennetze, d. h. Fadennetze, bei denen die Netzkurven von den Schmiegtangentenkurven der Trägerfläche gebildet werden. Sie genügen der zusätzlichen Forderung $n_1 = -n_2 = n = 0$.

Für $n = 0$ lauten die Grundgleichungen (II 3):

$$-\frac{m_u}{m} = \left\{\frac{s_u}{s} - \frac{s_v}{s}\cos\omega + \frac{1}{4}(\cos^2\omega)_u\right\}\frac{2}{\sin^3\omega},$$

$$-\frac{m_v}{m} = \left\{\frac{s_v}{s} - \frac{s_u}{s}\cos\omega + \frac{1}{4}(\cos^2\omega)_v\right\}\frac{2}{\sin^3\omega}.$$

Durch partielle Ableitung dieser Gleichungen nach v bzw. u und anschließende Subtraktion erhält man die Gleichung

$$\left\{\frac{(\ln s)_v - (\ln s)_u\cos\omega}{\sin^3\omega}\right\}_u = \left\{\frac{(\ln s)_u - (\ln s)_v\cos\omega}{\sin^3\omega}\right\}_v,$$

welche mit der Gleichung (II 8) kombiniert schließlich liefert:

$$\left\{\ln\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}\right\}_{uu} = \left\{\ln\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}\right\}_{vv};$$

hieraus folgt genau wie im Abschnitt b):

$$\cos\omega = \frac{Q-P}{Q+P},$$

wobei $P(u+v)$ und $Q(u-v)$ wieder willkürliche, nicht verschwindende Funktionen der angegebenen Argumente sind.

Für Schmiegtangenten-Fadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur ergeben sich somit die folgenden Gleichgewichtsbedingungen:

(III d 1)
$$\begin{cases} \sigma_u s - s_u\sigma + (\sigma s\cos\omega)_v = 0, \quad \sigma_v s - s_v\sigma + (\sigma s\cos\omega)_u = 0, \\ \text{wobei} \quad \cos\omega = \dfrac{Q(u-v) - P(u+v)}{Q(u-v) + P(u+v)} \quad \text{ist,} \end{cases}$$

(III d 2)
$$n_1 = -n_2 = n = 0.$$

Die Trägerfläche des Netzes bestimmt sich aus diesen Gleichungen und den Grundgleichungen, welche jetzt lauten:

$$\text{(III d 3)} \quad \begin{cases} \frac{m_u}{m} = -\frac{s_u}{s}\frac{(P+Q)^2}{2PQ} - \frac{s_v}{s}\frac{P^2-Q^2}{2PQ} + \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q}\right)\frac{Q-P}{Q+P}, \\ \frac{m_v}{m} = -\frac{s_v}{s}\frac{(P+Q)^2}{2PQ} - \frac{s_u}{s}\frac{P^2-Q^2}{2PQ} + \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q}\right)\frac{Q-P}{Q+P}, \end{cases}$$

$$\text{(III d 4)} \quad K = -\frac{(P+Q)^2}{4PQ}m^2$$

$$= -\frac{(P+Q)^2}{4s^2PQ}\left\{\left(\frac{s_u}{s}\right)_u - \left(\frac{s_u}{s}\right)_v\frac{Q-P}{Q+P} + \frac{s_u}{s}\frac{P'+Q'}{P+Q} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{s_v}{s}\right)_v - \left(\frac{s_v}{s}\right)_u\frac{Q-P}{Q+P} + \frac{s_v}{s}\frac{P'-Q'}{P+Q}\right\} -$$

$$- \frac{1}{4s^2(P+Q)}\left\{P\left(2\frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2}\right) + P\left(2\frac{P''}{P} - 3\frac{P'^2}{P^2}\right) + \right.$$

$$\left. + Q\left(2\frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2}\right) + Q\left(2\frac{Q''}{Q} - 3\frac{Q'^2}{Q^2}\right)\right\}.$$

IV. Vier Sonderklassen der in Kapitel III betrachteten vier Klassen von Fadennetzen mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur.

Es werden in diesem Kapitel Fadennetze, die jeweils zwei der im vorangehenden Kapitel III betrachteten vier Netzklassen zugleich angehören, zu Sonderklassen zusammengefaßt und ihre Haupteigenschaften besprochen. Von den sechs Möglichkeiten zur Bildung solcher Sonderklassen führen nur vier zu Netzen im Sinne unserer Problemstellung [Abschnitte α) bis δ)]. Zwei Möglichkeiten scheiden aus; es sind dies: Fadennetze, die geodätische und äquidistante Netze zugleich sind, und Fadennetze, die konjugierte und Schmiegtangenten-Netze zugleich sind. Denn im ersten Fall ergeben die Gleichungen (II 5) für $g_1 = g_2 = 0$ und $s = 1$ unmittelbar $\omega =$ konst.; im zweiten Fall ist $n = m = 0$. Beide Fälle liefern daher nach Gleichung (II 4) Trägerflächen mit verschwindendem Gauss schen Krümmungsmaß K, scheiden also gemäß der am Schluß von Kapitel I gemachten Voraussetzung aus.

α) Geodätische Fadennetze, die zugleich konjugierte Fadennetze sind. Gemäß der Forderung, daß jetzt die Gleichungen (III a 1 bis 4) und zugleich (III c 1 bis 4) erfüllt sein müssen, ergeben sich als Gleichgewichtsbedingungen für das Netz:

$$\text{(IV α 1)} \quad s = P(u+v) + Q(u-v), \quad \sigma = 1, \quad \omega = \arccos\frac{P(u+v) - Q(u-v)}{P(u+v) + Q(u-v)},$$

$$\text{(IV α 2)} \quad n_1 = -n_2 = n, \quad m = 0,$$

und als Grundgleichungen für die Trägerfläche:

$$\text{(IV}\,\alpha\,3)\quad \frac{n_v}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q}\right) - 2\frac{P'-Q'}{P+Q}, \qquad \frac{n_u}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q}\right) - 2\frac{P'+Q'}{P+Q},$$

$$\text{(IV}\,\alpha\,4)\quad K = -\frac{(P+Q)^3}{4PQ}\,n^2$$
$$= -\frac{1}{4(P+Q)^3}\left\{P\left(2\frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2}\right) + P\left(2\frac{P''}{P} - 3\frac{P'^2}{P^2}\right) + \right.$$
$$\left. + Q\left(2\frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2}\right) + Q\left(2\frac{Q''}{Q} - 3\frac{Q'^2}{Q^2}\right)\right\}.$$

Aus den Grundgleichungen (IV α 3) folgt durch Integration

$$\text{(IV}\,\alpha\,5)\qquad n = 2k\,\frac{\sqrt{PQ}}{(P+Q)^3}$$

mit der Integrationskonstanten $k \neq 0$ (im Fall $k = 0$ wäre $n = 0 = m$, also die Trägerfläche entgegen unserer Voraussetzung eben), so daß das Gauss sche Theorema egregium (IV α 4) lautet:

$$\text{(IV}\,\alpha\,6)\qquad P\left(2\frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2}\right) + P\left(2\frac{P''}{P} - 3\frac{P'^2}{P^2} - 4k^2\right) +$$
$$+ Q\left(2\frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2}\right) + Q\left(2\frac{Q''}{Q} - 3\frac{Q'^2}{Q^2} - 4k^2\right) = 0.$$

Unser geodätisches und zugleich konjugiertes Fadennetz muß — als konjugiertes Fadennetz — stets auf einer *Minimalfläche* liegen und zwar so, daß die winkelhalbierenden Diagonalkurven des rhombischen u/v-Fadennetzes ein orthogonales $\bar{u}/\bar{v}$-Netz aus den Schmiegtangentenkurven der Trägerfläche darstellen [vgl. Abschnitt III c)]. Da aber unser Fadennetz auch geodätisch sein soll, werden sich für Netz und Trägerfläche noch zusätzliche Eigenschaften ergeben, die jetzt ermittelt werden sollen. Die erste bzw. zweite Grundform der Trägerfläche

$$s^2(u'^2 + 2u'v'\cos\omega + v'^2) \quad \text{bzw.} \quad s^2(n_1u'^2 + 2mu'v' + n_2v'^2)$$

schreibt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (IV α 1), (IV α 2) und (IV α 5):

$$(P+Q)^2\left(u'^2 + 2u'v'\frac{P-Q}{P+Q} + v'^2\right) \quad \text{bzw.} \quad 2k\sqrt{PQ}\,(u'^2 - v'^2).$$

Bei der Parametertransformation $u+v = \bar{u}$, $u-v = \bar{v}$ vom u/v-Fadennetz auf das $\bar{u}/\bar{v}$-Diagonalnetz erhalten wir demgemäß für die beiden Grundformen der Trägerfläche:

$$\text{(IV}\,\alpha\,7)\qquad (P+Q)\,(P\bar{u}'^2 + Q\bar{v}'^2) \quad \text{bzw.} \quad 2k\sqrt{PQ}\,\bar{u}'\bar{v}',$$

wobei die Funktionen $P(\bar{u})$ und $Q(\bar{v})$, jetzt nur noch von jeweils einem Parameter abhängend, nach wie vor der Funktionalgleichung (IV α 6) genügen.

Wie in einer früheren Arbeit gezeigt wurde[7]), kann diese Funktionalgleichung aber für $k \neq 0$ nur in folgenden beiden Fällen bestehen:

1. $P = -Q =$ konst. Da hierfür nach Gleichung (IV α 7) die erste Grundform verschwindet, scheidet dieser Fall aus.

2. $P =$ konst. *oder* $Q =$ konst.; von diesen beiden gleichberechtigten Möglichkeiten wählen wir $P = C =$ konst., $Q(\bar{v}) \neq$ konst. Wie aus (IV α 7) ersichtlich ist, enthält jetzt keine der sechs Grundgrößen mehr den Parameter $\bar{u}$, d. h. die Trägerfläche muß eine Schraubenfläche (oder Drehfläche) mit den $\bar{u}$-Linien als Bahnschraubenlinien (bzw. Breitenkreisen) sein. Da diese $\bar{u}$-Linien aber zugleich Schmiegtangentenkurven sind, ist unsere gesuchte Trägerfläche notwendig die *Wendelschraubenfläche*. Ihre geradlinigen Erzeugenden und ihre Bahnschraubenlinien müssen also die winkelhalbierenden Diagonalkurven unseres u/v-Fadennetzes sein, schneiden also dessen Netzlinien unter den Winkeln

$$\pm \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \arccos \frac{C - Q(\bar{v})}{C + Q(\bar{v})} \quad \text{bzw.} \quad \pm \frac{\pi - \omega}{2}.$$

Da diese Winkel längs einer Schraubenlinie $\bar{v} =$ konst. stets konstant sind, müssen die geodätischen Netzlinien unseres u/v-Fadennetzes durch Verschraubung irgendeines Paares sich schneidender geodätischer Netzlinien auseinander hervorgehen. Weiter ist jetzt ersichtlich, daß es auf einer Wendelschraubenfläche mit Rücksicht auf die einfache Mannigfaltigkeit aller Winkel $\omega(\bar{v})$, die zu irgendeiner Schraubenlinie $\bar{v} =$ konst. gehören, auch ∞^1 verschiedene geodätische und zugleich konjugierte u/v-Netze geben muß.

Daß diese ∞^1 u/v-Netze der Wendelschraubenfläche, welche sämtlich das $\bar{u}/\bar{v}$-Netz der Schmiegtangentenkurven als Diagonalnetz besitzen, tatsächlich im Gleichgewicht befindliche Fadennetze darstellen, wurde bereits in einer früheren Untersuchung[8]) durch direkten Ansatz nachgewiesen.

Wir zeigen jetzt noch, daß es insgesamt ∞^1 formverschiedene, d. h. nicht zueinander ähnliche, geodätische und zugleich konjugierte Fadennetze gibt, und daß wir dabei drei verschiedene Typen unterscheiden können. Da alle Wendelschraubenflächen zueinander ähnlich sind, können wir allen unseren Fadennetzen eine einzige Wendelschraubenfläche mit der reduzierten Ganghöhe $h = 1$ zugrunde legen. Zwei beliebige geodätische Netzlinien, welche irgendein u/v-Fadennetz der Wendelschraubenfläche festlegen, schneiden sich unter dem Winkel $\omega(\bar{v})$ in einem Punkt, dessen Abstand von der Schraubungs-

---

[7]) H. THOMAS, Zur Frage des Gleichgewichts von Tschebyscheff-Netzen aus verknoteten und gespannten Fäden. Math. Zeitschr. **47** (1940), S. 73.

[8]) H. THOMAS, Über Flächen, auf denen sich besondere Arten von Netzen geodätischer Linien ausbreiten lassen. Math. Zeitschr. **44** (1938), S. 262.

achse mit $r(\bar{v})$ bezeichnet sei. Für diese beiden geodätischen Linien und folglich für alle Netzlinien überhaupt gilt dann der verallgemeinerte Clairautsche Satz:

$$(r^2+1)\sin^2\frac{\omega}{2} = a^2 > 0.$$

Den ∞^1 Werten der Konstanten a^2 entsprechen ∞^1 Fadennetze, und zwar lassen sich je nach dem Betrag von a^2 drei Netztypen unterscheiden:

Erster Netztyp: $a^2 < 1$; dann ist $0 \leqq r < \infty$. Die geodätischen Netzlinien schneiden die Schraubungsachse $r = 0$ unter dem Winkel $\frac{\omega}{2} = \arcsin a$; das Netz erstreckt sich also über die ganze Wendelschraubenfläche.

Zweiter Netztyp: $a^2 > 1$; dann ist $\sqrt{a^2-1} < r < \infty$. Die geodätischen Netzlinien berühren die Schraubenlinie vom Radius $r = \sqrt{a^2-1}$ (denn für diesen r-Wert wird der Schnittwinkel $\omega = \pi$); das Netz erstreckt sich also über den ganzen Bereich auf der Wendelschraubenfläche außerhalb dieser Schraubenlinie.

Dritter Netztyp: $a^2 = 1$; dann ist $0 < r < \infty$. Die geodätischen Netzlinien berühren asymptotisch die Schraubungsachse $r = 0$ (denn für diesen r-Wert wird der Schnittwinkel $\omega = \pi$); das Netz erstreckt sich also über die ganze Wendelschraubenfläche mit Ausnahme der Schraubungsachse selbst.

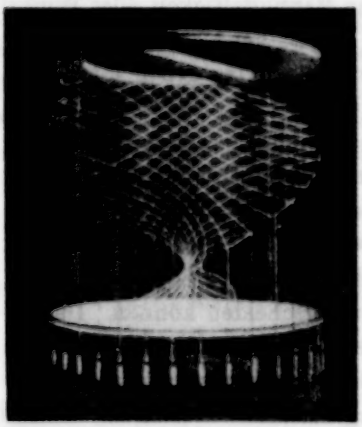

Fig. 1.

Zusammenfassend hat man also folgendes Ergebnis:

Ein Fadennetz mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur, das geodätisches und konjugiertes Netz zugleich ist, besitzt als Trägerfläche stets eine Wendelschraubenfläche. Es gibt ∞^1 formverschiedene derartige Netze, wobei sich drei Netztypen unterscheiden lassen. Die beiden Scharen der winkelhalbierenden Kurven unserer Netzlinien bestehen stets aus den geradlinigen Erzeugenden und den Bahnschraubenlinien der Wendelschraubenfläche.

Zur Veranschaulichung dieser Fadennetze dient das abgebildete Modell der Wendelschraubenfläche; die Netzform entspricht dabei dem ersten Typ.

β) Äquidistante Fadennetze, die zugleich Schmiegtangenten-Fadennetze sind. Gemäß der Forderung, daß jetzt die Gleichungen (III b 1 bis 4)

und (III d 1 bis 4) zugleich erfüllt sein müssen, ergeben sich als Gleichgewichtsbedingungen für das Netz:

$$(\text{IV}\,\beta\,1)\quad s = 1,\quad \sigma = P(u+v) + Q(u-v),\quad \omega = \arccos\frac{Q(u-v) - P(u+v)}{Q(u-v) + P(u+v)},$$

$$(\text{IV}\,\beta\,2)\qquad n = 0,$$

und als Grundgleichungen für die Trägerfläche:

$$(\text{IV}\,\beta\,3)\qquad \frac{m_u}{m} = \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q}\right)\frac{Q-P}{Q+P},\qquad \frac{m_v}{m} = \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q}\right)\frac{Q-P}{Q+P},$$

$$(\text{IV}\,\beta\,4)\qquad K = -\frac{(P+Q)^2}{4PQ}m^2$$

$$= -\frac{1}{4(P+Q)}\left\{P\left(2\frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2}\right) + P\left(2\frac{P''}{P} - 3\frac{P'^2}{P^2}\right) + \right.$$

$$\left. + Q\left(2\frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2}\right) + Q\left(2\frac{Q''}{Q} - 3\frac{Q'^2}{Q^2}\right)\right\}.$$

Aus den Gleichungen (IV β 3) folgt durch Integration

$$(\text{IV}\,\beta\,5)\qquad m = 2k\frac{\sqrt{PQ}}{P+Q}$$

mit der Integrationskonstanten $k \neq 0$ (im Fall $k = 0$ wäre $m = 0 = n$, also die Trägerfläche entgegen unserer Voraussetzung eben), so daß wir für das Gausssche Theorema egregium (IV β 4) jetzt

$$(\text{IV}\,\beta\,6)\qquad P\left(2\frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2}\right) + P\left(2\frac{P''}{P} - 3\frac{P'^2}{P^2} - 4k^2\right) +$$

$$+ Q\left(2\frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2}\right) + Q\left(2\frac{Q''}{Q} - 3\frac{Q'^2}{Q^2} - 4k^2\right) = 0$$

und für das Gausssche Krümmungsmaß

$$K = -k^2 = \text{konst.}$$

erhalten. Die Trägerfläche unseres Fadennetzes ist also eine *Fläche konstanter negativer Krümmung*. Zu ihrer genaueren Bestimmung führen wir durch die Parametertransformation $u + v = \bar{u}$, $u - v = \bar{v}$ unser rhombisches u/v-Fadennetz aus den Schmiegtangentenkurven in sein orthogonales $\bar{u}/\bar{v}$-Diagonalnetz aus den Krümmungslinien der Trägerfläche über. Hierbei gehen die beiden Grundformen der Trägerfläche [vgl. die Gleichungen (IV β 1), (IV β 2) und (IV β 5)]

$$u'^2 + 2u'v'\frac{Q-P}{Q+P} + v'^2 \quad \text{bzw.} \quad 4k\frac{\sqrt{PQ}}{P+Q}u'v'$$

über in

$$(\text{IV}\,\beta\,7)\qquad \frac{1}{P+Q}(Q\bar{u}'^2 + P\bar{v}'^2) \quad \text{bzw.} \quad k\frac{\sqrt{PQ}}{P+Q}(\bar{u}'^2 - \bar{v}'^2),$$

wobei die Funktionen $P(\bar{u})$ und $Q(\bar{v})$, jetzt nur noch von jeweils einem Parameter abhängend, nach wie vor der Funktionalgleichung (IV β 6) genügen. Diese Funktionalgleichung ist identisch mit der im vorangehenden Abschnitt betrachteten Funktionalgleichung (IV α 6), kann also für $k \neq 0$ wieder nur in den folgenden beiden Fällen bestehen:

1. $P = -Q =$ konst. Da hierfür nach Gleichung (IV β 7) die erste Grundform unendlich wird, scheidet dieser Fall aus.

2. $P =$ konst. *oder* $Q =$ konst.; von diesen beiden gleichberechtigten Möglichkeiten wählen wir wieder $P = C =$ konst., $Q(\bar{v}) \neq$ konst. Wie aus (IV β 7) ersichtlich ist, enthält jetzt keine der sechs Grundgrößen mehr den Parameter $\bar{u}$, d. h. die Trägerfläche muß eine Drehfläche (oder Schraubenfläche) mit den $\bar{u}$-Linien als Breitenkreisen (bzw. Bahnschraubenlinien) sein. Da diese $\bar{u}$-Linien aber zugleich Krümmungslinien sind, ist unsere gesuchte Fläche notwendig eine *Drehfläche*.

Daß tatsächlich die Schmiegtangentennetze *aller* Drehflächen konstanter negativer Krümmung im Gleichgewicht befindliche Fadennetze darstellen, wurde bereits in einer früheren Untersuchung[7]) durch direkten Ansatz nachgewiesen.

Wir haben somit folgendes Ergebnis:

Ein Fadennetz mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur, das äquidistantes und Schmiegtangenten-Netz zugleich ist, besitzt als Trägerfläche stets eine Drehfläche konstanter negativer Krümmung. Entsprechend den ∞^1 formverschiedenen Trägerflächen gibt es ∞^1 formverschiedene derartige Netze, wobei sich entsprechend den drei Typen der Trägerfläche auch drei Netztypen unterscheiden lassen. Die beiden Scharen der winkelhalbierenden Kurven unserer Netzlinien bestehen stets aus den Meridiankurven und Breitenkreisen der Drehfläche.

Modelle zur Veranschaulichung dieser Fadennetze sind in der erwähnten Arbeit[7]) abgebildet.

γ) Geodätische Fadennetze, die zugleich Schmiegtangenten-Fadennetze sind. Da geodätische Schmiegtangentenkurven stets Gerade sein müssen, und da Netze aus zwei Geradenscharen nur auf den negativ gekrümmten Flächen zweiter Ordnung existieren, hat man hier nur das triviale Ergebnis:

Ein Fadennetz mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur, das geodätisches und Schmiegtangenten-Netz zugleich ist, besteht stets aus den beiden Geradenscharen einer negativ gekrümmten Fläche zweiter Ordnung[9]).

δ) Äquidistante Fadennetze, die zugleich konjugierte Fadennetze sind. Gemäß der Forderung, daß jetzt die Gleichungen (III b 1 bis 4) und (III c 2) zugleich erfüllt sein müssen, ergeben sich als Gleichgewichtsbedingungen für das Netz:

$$\text{(IV } \delta 1) \quad s = 1, \quad \sigma = P(u+v) + Q(u-v), \quad \omega = \arccos \frac{Q(u-v) - P(u+v)}{Q(u-v) + P(u+v)},$$

$$\text{(IV } \delta 2) \qquad n_1 = -n_2 = n, \quad m = 0,$$

[9]) Dieser Satz gilt natürlich auch für Netze mit allgemeiner Spannungsverteilung und allgemeiner Netzstruktur.

und als Grundgleichungen für die Trägerfläche:

$$(\text{IV}\,\delta\,3) \qquad \frac{n_v}{n} = -\frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q}\right), \qquad \frac{n_u}{n} = -\frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q}\right),$$

$$(\text{IV}\,\delta\,4) \qquad K = -\frac{(P+Q)^2}{4\,PQ}n^2$$

$$= -\frac{1}{4(P+Q)}\left\{P\left(2\frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2}\right) + P\left(2\frac{P''}{P} - 3\frac{P'^2}{P^2}\right) + \right.$$

$$\left. + Q\left(2\frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2}\right) + Q\left(2\frac{Q''}{Q} - 3\frac{Q'^2}{Q^2}\right)\right\}.$$

Unser äquidistantes und zugleich konjugiertes Fadennetz muß — als konjugiertes Fadennetz — stets auf einer *Minimalfläche* liegen und zwar so, daß die winkelhalbierenden Diagonalkurven des rhombischen Fadennetzes ein orthogonales Netz aus den Schmiegtangentenkurven der Trägerfläche darstellen. Da aber unser Fadennetz auch äquidistant sein soll, werden sich für Netz und Trägerfläche noch zusätzliche Eigenschaften ergeben, von denen einige grundlegende jetzt angegeben werden sollen. Aus den Gleichungen $s^2 = \mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_u = \mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{x}_v = 1$ ergibt sich durch partielle Ableitung: $\mathfrak{x}_{uv} \cdot \mathfrak{x}_u = 0$ und $\mathfrak{x}_{uv} \cdot \mathfrak{x}_v = 0$. Aus den beiden letzten Gleichungen und der Beziehung $ms^4 \sin\omega = \mathfrak{x}_{uv} \cdot (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) = 0$ folgt dann $\mathfrak{x}_{uv} = 0$, d. h. $\mathfrak{x} = \mathfrak{A}(u) + \mathfrak{B}(v)$, wobei die beiden Vektoren $\mathfrak{A}(u)$ und $\mathfrak{B}(v)$ willkürliche, nicht konstante Funktionen der angegebenen Parameter sind. In unserem äquidistanten und zugleich konjugierten Fadennetz müssen demgemäß die Kurven jeder Schar durch Rückung (Translation) längs der Kurven der anderen Schar auseinander hervorgehen, d. h. die Trägerfläche muß eine *Rückungsfläche* (Translationsfläche) sein.

Wir haben somit folgendes vorläufige Ergebnis:

Ein Fadennetz mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur, das äquidistantes und konjugiertes Netz zugleich ist, muß eine Trägerfläche besitzen, die Rückungsfläche und Minimalfläche zugleich ist, d. h. die Wendelschraubenfläche oder eine Scherksche *Minimalfläche*[10]. *Dabei müssen die beiden (orthogonalen) Scharen der winkelhalbierenden Kurven unserer Netzlinien aus den Schmiegtangentenkurven dieser Flächen bestehen.*

Daß die Wendelschraubenfläche und die Scherkschen Minimalflächen tatsächlich stets Trägerflächen von äquidistanten und zugleich konjugierten Fadennetzen sind, soll in einer weiteren Arbeit: „Zur Frage des Gleichgewichts von Viereckснetzen aus verknoteten und gespannten Fäden (Zweiter Teil)" gezeigt werden, in der dann auch weitere Eigenschaften dieser äquidistanten und zugleich konjugierten Fadennetze (Tschebyscheff-Rückungsnetze) untersucht werden sollen.

[10]) Vgl. Sophus Lie, Weitere Untersuchungen über Minimalflächen. Arch. for Mathematik og Naturvidenskab, Band IV (1880). S. 477.

(Eingegangen am 16. Oktober 1941.)

Über Lösungen linearer Differentialgleichungen mit Asymptoten.

Von

Otto Haupt in Erlangen.

1.1. In einer kürzlich erschienenen Arbeit[1]) gibt Herr Bitterlich-Willmann je eine hinreichende Bedingung an dafür, daß die Lösungen der Differentialgleichung

$$(L_0) \qquad y'' + f(x)\, y = 0 \quad \text{mit stetigem } f(x) \text{ in } [a, +\infty)$$

entweder (I.) sämtlich Asymptoten besitzen oder daß, soweit überhaupt Asymptoten vorhanden sind, diese (II.) stets parallel zur x-Achse sind bzw. (III.) stets in die x-Achse selbst fallen. Als kennzeichnend dafür, daß eine in $[a, +\infty)$ eindeutige, stetig differenzierbare Funktion $y = y(x)$ eine Asymptote, genauer: asymptotische Gerade, besitzt, wird dabei erklärt: Es sollen

$$(B_0) \qquad \lim_{x \to +\infty} (y(x) - x y'(x))$$

und

$$(B_1) \qquad \lim_{x \to +\infty} y'(x)$$

beide existieren (und endlich sein).

1.2. In einer früheren Note[2]) wurde gezeigt, daß (B_1) eine Folge von (B_0) ist und daß für die Gültigkeit von (B_0) folgendes notwendig und hinreichend ist:

(A) Es gibt eine in $[a, +\infty)$ stetige Funktion $\varphi(x)$, für welche

$$(A_1) \qquad \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = C_0 \text{ existiert und endlich ist;}$$

ferner (für beliebiges b mit $b \geqq a > 0$) die Darstellung gilt:

$$(A_2) \qquad y(x) = x \cdot \Big(C + \int_x^{+\infty} \varphi(\tau)\, \tau^{-2}\, d\tau\Big) = x \cdot \Big(c - \int_b^x \varphi(\tau)\, \tau^{-2}\, d\tau\Big),$$

unter

$$C = c - \int_b^{+\infty} \varphi(\tau)\, \tau^{-2}\, d\tau$$

eine geeignet gewählte Konstante verstanden.

---

[1]) J. Bitterlich-Willmann, Über die Asymptoten der Lösungen einer Differentialgleichung. Monatsh. f. Math. u. Phys. **50** (1941), S. 35–39.

[2]) Haupt, Über Asymptoten ebener Kurven. Journ. f. d. r. u. angew. Math. **152** (1922), S. 6–10 und S. 239.

Übrigens hat die asymptotische Gerade von $y(x)$ dann die Gleichung

$$(A_3) \qquad Y = CX + C_0$$

mit

$$C_0 = \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \Big(\int_x^{+\infty} \varphi(\tau)\, \tau^{-2}\, d\tau \Big).$$

Mittels (A_2) erhält man nun eine notwendige und zugleich hinreichende Bedingung dafür, daß z. B. Lösungen y der allgemeinen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(L) \qquad y'' + g(x)\, y' + f(x)\, y = h(x)$$

mit in $[a, +\infty)$ eindeutigen stetigen $g(x)$, $f(x)$ und $h(x)$

Asymptoten besitzen; genauer gesagt: Man erhält eine lineare Integralgleichung für $\varphi(x)$ (vgl. Nr. 2. 1.), durch deren stetige, (A_1) erfüllende Lösungen $\varphi(x)$ vermittelst (A_2) alle und nur diejenigen Lösungen y von (L) geliefert werden, welche Asymptoten besitzen.

Aus dieser Integralgleichung ergeben sich dann sehr einfach *hinreichende* Bedingungen z. B. für das Vorhandensein von Lösungen von (L), welche Asymptoten besitzen. Und zwar sind die von uns erhaltenen Bedingungen Verallgemeinerungen der von Herrn Bitterlich-Willmann angegebenen Kriterien; dabei ergibt sich noch, daß sein Kriterium II. durch eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage ergänzt werden kann (vgl. dazu Nr. 2. 3. 1., Bemerkung, sowie Nr. 2. 3., Anmerkung; für die beiden anderen Kriterien vgl. auch Nr. 2. 2., Anmerkung 2, und Nr. 2. 4., Anmerkung)[2a]).

1. 3. Auf folgende Verallgemeinerungsmöglichkeiten sei noch hingewiesen:

Zunächst läßt sich mit Hilfe von (A) (Nr. 1. 2.) analog die Frage in Angriff nehmen nach den Lösungen einer linearen Differentialgleichung k-ter Ordnung ($k \geqq 1$), welche asymptotische Geraden besitzen. Man gelangt dabei zu einer linearen Integro-Differentialgleichung für φ, auf deren Auflösung das Problem zurückgeführt wird.

[2a]) Bemerkung bei der Korrektur. Wie in einer inzwischen zu unserer Kenntnis gelangten Arbeit von D. Caligo (Comportamento asintotico degli integrali usw., Boll. Un. Mat. Ital., Ser. II, Anno III, Nr. 4 (1941), S. 286 ff.) u. a. erwähnt wird, existiert nach U. Dini bzw. G. Sansone für (L) im Spezialfall $h(x) = 0$, $f(x) = O(x^{-3-\beta})$, $\beta > 0$, und $g(x) = O(x^{-2-\alpha})$, $\alpha > 0$, bzw. $g(x) = 0$ für jede Lösung y eine Darstellung $y = c_1 x + c_2 + \eta(x)$ mit konstanten c_1, c_2 und mit $\eta \to 0$ für $x \to +\infty$. Dies besagt, sogar zusammen mit der Existenz von $\lim_{x \to +\infty} x^{-1} y = \lim_{x \to +\infty} y'$ (vgl. Caligo, a. a. O.), weniger als die (aus Nr. 2. 2. bzw. 1. 1. oben im Text folgende) Gültigkeit von (B_0).

Darüber hinaus läßt sich die Darstellung (A) von y in Nr. 1. 2. auf den Fall von Asymptoten höherer Ordnung, genauer gesagt: auf den Fall asymptotischer Parabeln n-ten Grades ($n \geqq 1$) verallgemeinern[3]). Es werden nämlich alle und nur die n-mal stetig differenzierbaren ebenen Kurven $y = y(x)$, welche eine asymptotische Parabel n-ten Grades besitzen, geliefert durch

$$y(x) = x \cdot \Big[\sum_{\nu=0}^{n-1} C_\nu x^\nu - \frac{1}{(n-1)!} \int_b^x (x-\tau)^{n-1} \varphi(\tau)\, \tau^{-(n+1)}\, d\tau \Big],$$

wo $\varphi(x)$ stetig ist in $[a, +\infty)$ und der Bedingung (A_1) genügt, wobei ferner $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ beliebig wählbare Konstanten sind. Damit ergibt sich die Frage nach all denjenigen Lösungen linearer Differentialgleichungen sowie linearer Differentialgleichungensysteme, welche asymptotische Parabeln vorgegebenen Grades besitzen.

Ein näheres Eingehen auf diese Fragen sowie auf die genauere Untersuchung der auftretenden Integro-Differentialgleichungen[4]) sei späterer Gelegenheit vorbehalten.

2. Wir gehen zur Ausführung der in Nr. 1. 2. angedeuteten Sätze und ihrer Beweise über. Die hierbei auftretenden eigentlichen bzw. uneigentlichen Integrale sind ausnahmslos Riemannsche, erstreckt über ein Intervall, bzw. Limiten[5]) solcher Integrale, wenn die eine Integrationsgrenze gegen $+\infty$ geht. Eine Funktion $F(x)$ wird als integrierbar bzw. als absolut integrierbar, genauer als uneigentlich bzw. als absolut uneigentlich integrierbar bezeichnet, wenn das betreffende uneigentliche Integral von $F(x)$ bzw. von $|F(x)|$ existiert.

2. 1. Es sei also gegeben

$$\text{(L)} \qquad y'' + g(x)y' + f(x)y = h(x),$$

wo die g, f, h eindeutig und *stetig* sein sollen in $[a, +\infty)$. Jede Lösung y von (L) ist daher zweimal stetig differenzierbar. Ferner sei im folgenden stets $a > 0$.

Alle und nur diejenigen Lösungen y von (L), welche den Bedingungen (A_1), (A_2) in Nr. 1. 2. genügen, besitzen eine Asymptote. Daraus ergibt sich der

Satz: *Vermittelst der Darstellung* (A_2) *in Nr.* 1. 2. *erhält man alle Lösungen* y *von* (L), *welche eine Asymptote besitzen, indem man (nach beliebiger*

---

[3]) A. a. O. [2]), S. 8ff.

[4]) Vgl. dazu auch Enzykl. math. Wiss. II, 3, 2 (= II C 13), S. 1494.

[5]) *Alle* in vorliegender Arbeit auftretenden *Limiten* sind als *eigentlich* (endlich) vorausgesetzt.

Wahl einer Zahl b mit $b \geqq a > 0$) alle Konstanten c und c_1 sowie alle stetigen $\varphi(x)$ bestimmt, die den folgenden beiden Bedingungen (V) *und* (A_1) *genügen*:

$$(V) \quad \varphi(x) + \int_b^x g(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi + \int_b^x [\xi g(\xi) + \xi^2 f(\xi)]\Big(\int_b^\xi \varphi(\tau)\,\tau^{-2}\,d\tau - c\Big)\,d\xi = c_1 - \int_b^x \xi\,h(\xi)\,d\xi,$$

$$(A_1) \quad \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) \text{ existiert.}$$

Beweis **I.** Es sei y eine Lösung von (L) mit Asymptote, also gemäß (A_2) (Nr. 1. 2.) darstellbar, wobei noch (A_1) erfüllt sein muß. Aus (A_2) folgt dann, daß

$$(2.\,1.) \quad y' = (y - \varphi) \cdot x^{-1}, \quad y'' = -\varphi' \cdot x^{-1},$$

wobei φ' (wegen der Existenz und Stetigkeit von y'') existiert und stetig ist. Setzt man jetzt für y, y', y'' die Ausdrücke aus (A_2) und (2. 1.) in (L) ein und integriert von b bis x, so ergibt sich (V); dabei ist $c_1 = \varphi(b)$.

II. Umgekehrt: Es sei $\varphi(x)$ stetig in $[b, +\infty)$ und Lösung der Integralgleichung (V). Dann ist φ auch stetig differenzierbar. Führt man nun in die durch Differentiation von (V) nach x sich ergebende Beziehung wieder y, y' und y'' vermöge (A_2) bzw. (2. 1.) ein, so ergibt sich (L). Ist also für eine stetige Lösung φ von (V) noch (A_1) erfüllt, so liefert φ durch (A_2) eine Lösung y von (L) mit Asymptote.

2. 1. 1. *Die in* (V) *auftretenden Konstanten c und c_1 sind mit den Werten von y und y' in $x = b$ folgendermaßen verknüpft*:

$$(2.\,1.\,1.) \quad \begin{aligned} y(b) &= c \cdot b \\ y'(b) &= (y(b) - c_1) \cdot b^{-1}. \end{aligned}$$

Die c, c_1 und die $y(b)$, $y'(b)$ bestimmen sich also insbesondere gegenseitig eindeutig.

In der Tat: Aus (V) folgt $\varphi(b) = c_1$ und daraus in Verbindung mit (2. 1.) die zweite Gleichung (2. 1. 1.). Die erste Gleichung ergibt sich aus (A_2) (Nr. 1. 2.).

2. 1. 2. Zur Abkürzung späterer Beweise möge der Hinweis auf folgende bekannte Tatsachen dienen:

I. Ist $\varphi(x)$ stetig in $[b, +\infty)$ und ist (A_1) (Nr. 2. 1.) erfüllt, d. h. existiert $\lim_{x \to \infty} \varphi(x)$, so ist $\varphi(x)$ in $[b, +\infty)$ beschränkt.

II. Ist $F(x)$ absolut integrierbar, ist ferner $\varphi(x)$ stetig und beschränkt in $[b, +\infty)$, so ist auch $F(x)\,\varphi(x)$ absolut integrierbar.

III. Ist $F(x)$ absolut integrierbar, so existiert $\lim\limits_{x \to +\infty} \int\limits_b^x F(\xi)\, d\xi$.

IV. Ist $\varphi(x)$ stetig und beschränkt, etwa $|\varphi(x)| \leqq M$, in $[b, +\infty)$, so gilt, falls $0 < b < x$,

$$\Big|\int\limits_b^x \varphi(\tau)\, \tau^{-2}\, d\tau\Big| < M \cdot b^{-1} \quad \text{und} \quad \Big|\int\limits_x^{+\infty} \varphi(\tau)\, \tau^{-2}\, d\tau\Big| \leqq M \cdot x^{-1}.$$

2.2. Zunächst beweisen wir den

Satz. *Damit jede Lösung von* (L) *eine Asymptote besitze, ist hinreichend, daß* $r(x) = xg(x) + x^2 f(x)$, $g(x)$ *und* $xh(x)$ *(stetig in* $[a, +\infty)$ *und) absolut integrierbar*[6]) *sind.*

1. Anmerkung. Der vorstehende Satz läßt sich auch so aussprechen: Unter den angegebenen Voraussetzungen ist für den Grundbereich $[a, +\infty)$ *eindeutig lösbar die* Randwertaufgabe *für* (L), *der gemäß* $y'(x)$ *und* $(y(x) - xy'(x))$ *für* $x = a$ *(beliebig) gegebene Werte annehmen und für* $x \to +\infty$ *beide konvergieren.*

2. Anmerkung. Das in Nr. 1. 1. erwähnte Kriterium I. von Herrn Bitterlich-Willmann entspricht dem Falle, daß $g(x) = h(x) = 0$ in $[a, +\infty)$ und daß $f(x) = O(x^{-3-\alpha})$ mit $\alpha > 0$. Dieses Kriterium ist ein Spezialfall unseres vorstehenden Satzes.

Beweis 1. Es genügt, folgendes zu zeigen: Ist b geeignet gewählt und dann festgehalten, so besitzt (V) für beliebig vorgegebene c, c_1 eine Lösung, welche (A_1) genügt. Denn durch jede solche Lösung wird eine Lösung von (L) mit Asymptote geliefert (Nr. 2. 1.), und zwar können, wenn die c, c_1 frei wählbar sind, die $y(b)$, $y'(b)$ beliebig vorgeschrieben werden (gemäß Nr. 2. 1. 1.); man erhält also tatsächlich *alle* Lösungen von (L).

2. Daß (V) für beliebige c, c_1 eine, der Bedingung (A_1) genügende Lösung φ besitzt, ergibt sich in bekannter Weise durch schrittweise Näherung folgendermaßen.

Nach Voraussetzung existieren, wenn wieder $r(x) = xg(x) + x^2 f(x)$ gesetzt wird,

$$G(b) = \int\limits_b^{+\infty} |g(\xi)|\, d\xi, \quad F(b) = a^{-1} \cdot \int\limits_b^{+\infty} |r(\xi)|\, d\xi$$

für jedes b mit $a \leqq b$ und konvergieren mit $b \to +\infty$ gegen Null. Wir können und wollen daher b so (groß) wählen, daß

(b) $\quad q = G(b) + F(b) \leqq 2^{-1}$ und gleichzeitig $a \leqq b$ ist.

---

[6]) Die Behauptung bleibt — unter im übrigen unveränderten Voraussetzungen — richtig, wenn $xh(x)$ nur als integrierbar angenommen wird (*nicht* als *absolut* integrierbar).

Von jetzt ab *halten wir b fest* und schreiben (V) in der Gestalt

$$(V_{22}) \qquad \varphi(x) = J(x;\varphi) + H(x; c, c_1),$$

wobei $b \leqq x$ und

$$J(x;\varphi) = -\int_b^x g(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi - \int_b^x r(\xi)\left(\int_b^\xi \varphi(\tau)\,\tau^{-2}\,d\tau\right)d\xi,$$

$$H(x; c, c_1) = c_1 + c\int_b^x r(\xi)\,d\xi - \int_b^x \xi\,h(\xi)\,d\xi.$$

Für jede in $[b, +\infty)$ stetige (und (A_1) genügende) Funktion $\varphi(x)$ gilt die Abschätzung

$$(J) \qquad |J(x;\varphi)| \leqq p \cdot q \text{ für jedes } x \text{ in } [b, +\infty),$$

wobei

$$|\varphi(x)| \leqq p \text{ in } [b, +\infty);$$

dies folgt aus den Voraussetzungen unter Berücksichtigung von (b), insbesondere $b \geqq a > 0$, mit Hilfe von Nr. 2. 1. 2., insbesondere IV.

Nunmehr setzen wir

$$\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_\nu(x) = J(x;\varphi_{\nu-1}) + H(x; c, c_1) \text{ in } [b, +\infty),\quad \nu = 1, 2, \ldots.$$

Mittels vollständiger Induktion nach ν folgt, in Rücksicht auf die Voraussetzungen bei dem zu beweisenden Satz sowie auf Nr. 2. 1. 2.: Die $\varphi_\nu(x)$ sind sämtlich stetig differenzierbar in $[b, +\infty)$ und es ist (A_1) für sie erfüllt, es ist also insbesondere $\varphi_\nu(x)$ beschränkt in $[b, +\infty)$. All dies gilt auch für

$$\psi_\nu(x) = \varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu-1}(x), \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

so daß insbesondere

$$(p) \qquad 0 \leqq p_\nu < +\infty, \text{ wenn } p_\nu = \overline{\underset{b \leqq x}{\text{Grenze}}}\ |\psi_\nu(x)|, \qquad \nu = 1, 2, \ldots.$$

Wegen der Linearität von $J(x;\varphi)$ bezüglich φ gilt

$$\psi_\nu(x) = J(x;\psi_{\nu-1}), \qquad \nu = 2, 3, \ldots.$$

Aus (J) und (p) ergibt sich mithin $p_\nu \leqq p_{\nu-1} \cdot q$, $\nu = 2, 3, \ldots$, also

$$p_n \leqq p_1 \cdot q^{n-1}, \qquad n = 2, 3, \ldots.$$

Wegen $q \leqq 2^{-1}$ (vgl. (b)) sind daher die

$$\varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu(x), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

in $[b, +\infty)$ gleichmäßig beschränkt und sie konvergieren dort gleichmäßig. Insbesondere ist also

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x)$$

stetig und beschränkt in $[b, +\infty)$ und es ist (A_1) für $\varphi(x)$ erfüllt. Zufolge der gleichmäßigen Konvergenz ist überdies

$$J(x;\varphi) = \lim_{n\to\infty} J(x;\varphi_n).$$

Daher ist $\varphi(x)$ eine stetige Lösung von (V_{22}), für welche (A_1) gilt. Weil c und c_1 beliebig gegeben waren, ist alles bewiesen.

2.3. Wir lassen jetzt die Voraussetzung der (absoluten) Integrierbarkeit von $r(x)$ fallen und zeigen zunächst:

Es seien $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ stetig in $[a, +\infty)$. Ferner sei $r(x) = xg(x) + x^2 f(x)$ nicht-negativ oder nicht-positiv für alle hinreichend großen x. Schließlich seien $g(x)$ und $xh(x)$ absolut integrierbar [6]), hingegen sei $r(x)$ nicht integrierbar.

Besitzt dann eine Lösung y von (L) *eine Asymptote, so muß diese Asymptote parallel zur x-Achse sein.*

Anmerkung. Das in Nr. 1. 1. erwähnte Kriterium II. von Herrn Bitterlich-Willmann entspricht dem Falle, daß $g(x) = h(x) = 0$ in $[a, +\infty)$ und daß $D_1 x^{-3} < |f(x)| < D_2 x^{-2-\beta}$ für alle genügend großen x, wobei $\beta > 0$ und D_1, D_2 positive Konstanten. Dieses Kriterium ist Spezialfall unseres vorstehend angegebenen (vgl. auch Nr. 2. 3. 1., Bemerkung).

Beweis. Ist $\varphi(x)$ stetig und ist (A_1) für $\varphi(x)$ erfüllt, so ist $\Phi(x)$ stetig und es existiert

$$\Phi_0 = \lim_{x\to\infty} \Phi(x), \text{ wobei } \Phi(x) = c - \int_b^x \varphi(\tau)\,\tau^{-2}\,d\tau.$$

Ist $\varphi(x)$ überdies Lösung von (V) (vgl. Nr. 2. 1.), so muß $r(x)\,\Phi(x)$ integrierbar sein, weil zufolge unserer Voraussetzungen alle übrigen, in (V) auftretenden Glieder für $x \to +\infty$ konvergieren. Da aber $r(x)$ nach Voraussetzung nicht integrierbar ist und nicht zweierlei Vorzeichen annimmt, so folgt aus der Integrabilität von $r(x)\,\Phi(x)$, daß $\Phi_0 = 0$ ist. Zufolge Nr. 1. 2., (A_2) und (A_3) ist daher $Y = C_0$ die Gleichung der Asymptote, w. z. b. w.

2.3.1. Die in Nr. 2. 3. gemachte Feststellung läßt sich zu einer Existenz- und Eindeutigkeitsaussage verschärfen, wenn man noch absolute Integrierbarkeit von $s(x) = x^{-1} r(x) = g(x) + xf(x)$ fordert. Es gilt nämlich der

Satz. *Es seien $g(x)$, $xh(x)$ und $s(x) = g(x) + xf(x)$ (stetig und) absolut integrierbar [6]). Hingegen sei $r(x) = xs(x)$ nicht integrierbar und es sei $s(x) \geqq 0$ oder $s(x) \leqq 0$ für alle hinreichend großen x.*

Dann existiert zu beliebig vorgegebenem $(y(b) - by'(b))$ genau eine Lösung von (L) *mit Asymptote; und diese Asymptote ist parallel zur x-Achse. Dabei ist b hinreichend groß, im übrigen aber beliebig gewählt.*

Anmerkung. Der vorstehende Satz läßt sich dahin aussprechen: Unter den angegebenen Voraussetzungen ist *für* (L) *in* $[b, +\infty)$ *eindeutig*

lösbar die Randwertaufgabe, *der gemäß* $(y(x) - xy'(x))$ *für* $x = b$ *einen beliebig vorgegebenen Wert annimmt und für* $x \to +\infty$ *konvergiert.*

Beweis. Zufolge der über $g(x)$ und $s(x) = g(x) + xf(x)$ gemachten Voraussetzungen existieren

$$G^*(b) = \int_b^{+\infty} |g(\xi)|\, d\xi \quad \text{und} \quad F^*(b) = \int_b^{+\infty} |s(\xi)|\, d\xi,$$

und es läßt sich durch Wahl eines hinreichend großen b stets erreichen, daß

(b) $$q = G^*(b) + F^*(b) \leqq 2^{-1}, \quad \text{wobei } a \leqq b.$$

Da zufolge Nr. 2. 3. für jede stetige Lösung $\varphi(x)$ von (V), für welche (A_1) erfüllt ist, jetzt $C = 0$ (vgl. Nr. 1. 2., (A_3)) sein muß, so können wir, in Rücksicht auf Nr. 1. 2., (A_2), die Integralgleichung (V) so schreiben:

(V_{231}) $$\varphi(x) = J_1(x; \varphi) + H(x; c_1),$$

wobei

$$J_1(x; \varphi) = -\int_b^x g(\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi + \int_b^x \xi s(\xi) \left(\int_\xi^{+\infty} \varphi(\tau)\, \tau^{-2}\, d\tau \right) d\xi,$$

$$H(x; c_1) = c_1 - \int_b^x \xi\, h(\xi)\, d\xi.$$

Für jede in $[b, +\infty)$ stetige und (A_1) genügende Funktion $\varphi(x)$ haben wir wieder, wie in Nr. 2. 2., die Abschätzung (J), wenn dort $J(x; \varphi)$ durch $J_1(x; \varphi)$ ersetzt wird; denn für solche $\varphi(x)$ ist jetzt $\left| xs(x) \left(\int_x^{+\infty} \varphi(\tau)\, \tau^{-2}\, d\tau \right) \right|$ $\leqq p \cdot |s(x)|$. Bei beliebig vorgegebenem $c_1 = y(b) - by'(b)$ (vgl. Nr. 2. 1. 1.) kann man daher, genau wie in Nr. 2. 2. für (V), hier für (V_{231}), die Existenz der gesuchten Lösung φ mittels schrittweiser Näherung, ausgehend von $\varphi_0(x) = 1$, beweisen.

Die *Eindeutigkeit* dieser Lösung ergibt sich in bekannter Weise so: Sind $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ zwei Lösungen von (V_{231}), welche zum gleichen c_1 gehören und für welche (A_1) erfüllt ist, so gilt für $d(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ neben (A_1) die Beziehung $d(x) = J_1(x, d)$. Da $M = \overline{\text{Grenze}}_{b \leqq x} |d(x)| < +\infty$ (wegen (A_1)), so folgt aus (J), daß $0 \leqq M \leqq M \cdot q$ und, wegen $q \leqq 2^{-1}$, daß $M = 0$, also $d(x) = 0$ in $[b, +\infty)$, w. z. b. w.

Bemerkung. Bei dem in Nr. 2. 3., angegebenen Kriterium II. von Herrn Bitterlich-Willmann sind die Voraussetzungen des vorstehenden Satzes erfüllt. Dieser Satz geht (durch die Existenz- und Eindeutigkeitsbehauptung) über die Aussage jenes Kriteriums hinaus.

2. 4. Schließlich zeigen wir noch:

Es seien $g(x)$, $h(x)$, $f(x)$ stetig in $[a, +\infty)$. Ferner sei $s(x) = g(x) + xf(x)$ nicht-negativ oder nicht-positiv für alle hinreichend großen x. Schließlich seien $g(x)$ und $xh(x)$ absolut integrierbar[6]*, aber $s(x)$ sei nicht integrierbar. Besitzt dann eine Lösung y von* (L) *eine Asymptote, so kann diese nur die x-Achse sein.*

Anmerkung. Das in Nr. 1. 1. erwähnte Kriterium III. von Herrn Bitterlich-Willmann wird aus dem vorstehenden erhalten, wenn speziell $g(x) = h(x) = 0$ in $[a, +\infty)$ und $|x^2 f(x)| > Q > 0$ für alle hinreichend großen x, wobei Q eine Konstante ist.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt, daß $r(x) = xs(x)$ nicht integrierbar ist. Mithin sind die Voraussetzungen von Nr. 2. 3. erfüllt. Angenommen, es existiere eine Lösung y von (L) mit Asymptote, also (Nr. 2. 1.) eine in $[b, +\infty)$ stetig differenzierbare, (A_1) erfüllende Lösung $\varphi(x)$ von (V). Dann muß, wie in Nr. 2. 3., Beweis, gezeigt, $C = \Phi_0 = 0$ sein; wegen $C = 0$ und Nr. 1. 2., (A_2), kann daher (V) in der Gestalt (V_{231}) (Nr. 2. 3. 1.) geschrieben werden. Da $\varphi(x)$ Lösung von (V_{231}) sein soll, welche (A_1) erfüllt, muß $xs(x)\,\Phi(x)$ integrierbar sein, wobei $\Phi(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(\tau)\,\tau^{-2}\,d\tau$ ist; denn alle übrigen Glieder in (V_{231}) besitzen für $x \to +\infty$ einen Limes. Da andererseits $\lim_{x \to +\infty} x\,\Phi(x) = C_0$ existiert (Nr. 1. 2., (A_3)), da $s(x)$ für hinreichend große x sein Vorzeichen nicht wechselt und da $s(x)$ nach Voraussetzung nicht integrierbar ist, so muß $C_0 = 0$ sein. Die als existierend vorausgesetzte Asymptote besitzt daher (Nr. 1. 2., (A_3)) die Gleichung $Y = 0$, w. z. b. w.

(Eingegangen am 15. Januar 1942.)

Einschließungssatz für die charakteristischen Zahlen von Matrizen.

Von

L. Collatz in Karlsruhe.

1. Einleitung.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine gegebene quadratische n-reihige Matrix mit reellen Elementen

$$\mathfrak{A} = (a_{ik}).$$

Mit $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ seien die charakteristischen Zahlen der Matrix $\mathfrak{A}$ bezeichnet, d. h. die n Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$\det |\mathfrak{A} - \varkappa \mathfrak{E}| = 0,$$

wobei $\mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix ist.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Gültigkeit des folgenden Einschließungssatzes, der für die Berechnung der charakteristischen Zahlen wichtig ist: Ausgehend von einem beliebigen Vektor $\mathfrak{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ mit den reellen von Null verschiedenen Komponenten u_i bildet man den Vektor $\mathfrak{v} = \mathfrak{A}\mathfrak{u}$ mit den Komponenten

$$v_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_k. \tag{1}$$

Von den n Quotienten

$$\mu_i = \frac{v_i}{u_i} \tag{2}$$

sucht man das Minimum m und das Maximum M heraus: $m \leqq \mu_i \leqq M$. Es interessiert, unter welchen Voraussetzungen die beiden Zahlen m und M mindestens eine charakteristische Zahl $\varkappa_j$ von $\mathfrak{A}$ einschließen.

Diese Einschließungsaussage gilt nicht allgemein; bei nicht symmetrischer Matrix $\mathfrak{A}$ brauchen die charakteristischen Zahlen nicht reell zu sein; aber selbst wenn die charakteristischen Zahlen reell sind, braucht zwischen m und M keine charakteristische Zahl zu liegen, wie das folgende Beispiel zeigt: Die Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a+2 & -1 \\ 1 & a-2 \end{pmatrix}$$

hat die charakteristischen Zahlen $\varkappa_{1,2} = a \pm \sqrt{3}$. Geht man vom Vektor $\mathfrak{u} = (1, 1)$ aus, so wird $\mathfrak{v} = (a+1, a-1)$, und im Intervall von $a-1$ bis $a+1$ liegt keine der beiden charakteristischen Zahlen.

Der Einschließungssatz gilt jedoch, wenn die Matrix $\mathfrak{A}$ reell und symmetrisch ist, ferner wenn alle a_{ik} und alle u_i positiv sind. Vielleicht gelingt es, noch weitere allgemeine Fälle zu finden, bei denen der Einschließungssatz ebenfalls gültig ist. Ferner werden unter den gleichen Voraussetzungen für die Matrix $\mathfrak{A}$ Einschließungsaussagen gemacht für die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$\det |\mathfrak{A} - \varkappa \mathfrak{D}| = 0,$$

die auch als charakteristische Zahlen der Vektorgleichung

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varkappa \mathfrak{D}\mathfrak{x}$$

bezeichnet seien. Dabei sei $\mathfrak{D}$ eine Diagonalmatrix mit positiven Elementen[1]).

Die Gedankengänge sind teilweise ähnlich denen für die Einschließungssätze bei Differentialgleichungen und Integralgleichungen[2]).

2. Matrizen mit nichtnegativen Elementen.

Die Matrix $\mathfrak{A}$ habe jetzt positive oder nichtnegative Elemente ($a_{ik} \geqq 0$). Ist $\varkappa$ der größte Betrag der charakteristischen Zahlen von $\mathfrak{A}$, so ist nach den Sätzen von Frobenius[3]) $\varkappa$ eine charakteristische Zahl von $\mathfrak{A}$, die sogenannte Maximalwurzel von $\mathfrak{A}$. Zu dieser Zahl $\varkappa$ gibt es einen Eigenvektor $\mathfrak{x}$ (Lösung von $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varkappa\mathfrak{x}$), dessen Komponenten x_i sämtlich nichtnegativ und nicht alle Null sind.

Mit $\mathfrak{A}$ ist auch die transponierte Matrix $\mathfrak{A}' = (a_{ki})$ eine nichtnegative Matrix; $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ haben dieselben charakteristischen Zahlen und dieselbe Maximalwurzel $\varkappa$. Es sei $\mathfrak{z}$ ein zur Maximalwurzel von $\mathfrak{A}'$ gehöriger Eigenvektor mit den Komponenten $z_i \geqq 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} z_k = \varkappa z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nun wird ein Ausgangsvektor mit nur positiven Elementen $u_i > 0$ betrachtet und wie früher werden die Größen v_i, μ_i nach (1), (2) gebildet. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \varkappa)\, u_i z_i = \sum_i \sum_k (a_{ik} u_k z_i - a_{ki} z_k u_i) = 0.$$

---

[1]) Gleichungen der Form $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varkappa\mathfrak{D}\mathfrak{x}$ treten verschiedentlich auf, z. B. Biezeno-Grammel, Technische Dynamik, Berlin 1939, S. 148, 252, 511, 809.

[2]) Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **19** (1939), S. 241; Math. Zeitschr. **47** (1941), S. 395–398.

[3]) G. Frobenius, Sitzungsber. Preuß. Akad. d. Wissenschaften, Math.-phys. Klasse, Berlin 1912, 1. Halbband, S. 456–477, insbes. S. 457.

Da die $u_i z_i \geqq 0$ und nicht alle $u_i z_i = 0$ sind, könnte die Summe nicht verschwinden, wenn für alle i die Größen $\mu_i - \varkappa$ sämtlich positiv oder sämtlich negativ wären; daher ist

$$m = \operatorname{Min}_i \mu_i \leqq \varkappa \leqq M = \operatorname{Max}_i \mu_i,$$

und es gilt der

Satz. *Ist die Matrix $\mathfrak{A}$ positiv oder nichtnegativ, und sind $u_1, u_2, \ldots, u_n$ irgendwelche positiven Zahlen, so liegt in dem Intervall, welches von der größten und der kleinsten der n Zahlen $\frac{1}{u_i}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_k$ begrenzt wird, die Maximalwurzel von $\mathfrak{A}$.*

3. Reelle symmetrische Matrizen.

Für reelle symmetrische Matrizen besteht für die charakteristischen Zahlen die bekannte Minimum-Maximumeigenschaft[4]).

Die h-te charakteristische Zahl $\varkappa_h$ von $\mathfrak{A}$ ist der kleinste Wert, den das Maximum des Quotienten

$$Q = \frac{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

annehmen kann, wenn zwischen den (reellen, nicht sämtlich verschwindenden) x_i noch $h-1$ beliebige homogene lineare Gleichungen vorgeschrieben sind.

Für den Beweis des Einschließungssatzes ist es notwendig, die etwas erweiterte Gleichung zu betrachten

$$\mathfrak{B}\mathfrak{y} = \varrho \mathfrak{D}\mathfrak{y}; \tag{3}$$

dabei sei $\mathfrak{B}$ reell symmetrisch und $\mathfrak{D}$ eine Diagonalmatrix mit positiven Elementen d_i:

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}.$$

Setzt man in dem Courantschen Satz $x_i = \sqrt{d_i}\, y_i$ und $a_{ik}\sqrt{d_i d_k} = b_{ik}$, so erhält man die Aussage:

---

[4]) R. Courant-D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, Bd I, 2. Aufl. (1931), S. 27.

Die h-te charakteristische Zahl ϱ_h von (3) ist der kleinste Wert, den das Maximum des Quotienten

$$Q^* = \frac{\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} y_i y_k}{\sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2} \tag{4}$$

annehmen kann, wenn zwischen den y_i noch $h-1$ beliebige homogene lineare Gleichungen vorgeschrieben sind.

Nun kann man Probleme mit verschiedenen Matrizen $\mathfrak{D}$ miteinander vergleichen. Liegen die Probleme $\mathfrak{B}\mathfrak{y} = \varrho\mathfrak{D}_1\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{y} = \sigma\mathfrak{D}_2\mathfrak{y}$ vor und ist $\mathfrak{D}_1 \geqq \mathfrak{D}_2$ (jedes Element von $\mathfrak{D}_1$ sei $\geqq$ entsprechendes Element von $\mathfrak{D}_2$), so ist bei beliebigem Vektor $\mathfrak{y}$

$$|Q_1^*| \leqq |Q_2^*|,$$

wenn Q_1^* und Q_2^* die zugehörigen Quotienten (4) bedeuten. Daher folgt:

Werden bei $\mathfrak{B}\mathfrak{y} = \varrho\mathfrak{D}\mathfrak{y}$ alle d_i unter Beibehalten des Vorzeichens verkleinert (oder jedenfalls nicht vergrößert), so behält jede charakteristische Zahl ihr Vorzeichen bei und der Betrag jeder charakteristischen Zahl wird nicht kleiner.

Nun folgt der Einschließungssatz leicht. Es werden zwei Fälle unterschieden.

1. Fall. Es sind alle nach (2) gebildeten Quotienten μ_i positiv. Bei Einführung der Diagonalmatrix

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & 0 \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mu_n \end{pmatrix}$$

gilt $\mathfrak{M}\mathfrak{u} = \mathfrak{v}$ und $M\mathfrak{E} \geqq \mathfrak{M} \geqq m\mathfrak{E}$.

Der Vergleichungssatz ist also anwendbar auf die drei Gleichungen $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varrho M\mathfrak{E}\mathfrak{x}$; $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varrho\mathfrak{M}\mathfrak{x}$; $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varrho m\mathfrak{E}\mathfrak{x}$, von denen die erste und die dritte die charakteristischen Zahlen $\frac{\varkappa_i}{M}$ bzw. $\frac{\varkappa_i}{m}$ haben und von denen die zweite als eine charakteristische Zahl die Zahl 1 mit dem dazugehörigen Eigenvektor $\mathfrak{u}$ hat, und zwar sei 1 die ν-te charakteristische Zahl dieser Gleichung. Nach den vorangehenden Bemerkungen über das Wandern der charakteristischen Zahlen folgt die Behauptung

$$\frac{\varkappa_\nu}{m} \geqq 1 \geqq \frac{\varkappa_\nu}{M}$$

($\varkappa_\nu$ kann dann nicht negativ sein).

2. Fall. Es sind nicht alle μ_i positiv; dann ist $m \leqq 0$. Man kann eine Zahl N so angeben, daß alle $\mu_i + N > 0$ sind. Die Matrix $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} + N\mathfrak{E}$

hat die charakteristischen Zahlen $\varkappa_i + N$. Für die Matrix $\mathfrak{A}^*$ führt der Vektor u zu einem Vektor $\mathfrak{v}^* = \mathfrak{A}^*\mathfrak{u} = \mathfrak{v} + N\mathfrak{u}$ und die zugehörigen Quotienten $\mu_i^* = \frac{v_i^*}{u_i} = \mu_i + N$ schließen, da jetzt der 1. Fall anwendbar ist, eine charakteristische Zahl $\varkappa_\nu + N$ von $\mathfrak{A}^*$ ein, also schließt das Intervall der μ_i eine charakteristische Zahl $\varkappa_\nu$ von $\mathfrak{A}$ ein.

Somit gilt der

Satz. *Ist $\mathfrak{A}$ eine symmetrische Matrix mit reellen Elementen und sind $u_1, \ldots, u_n$ von Null verschiedene reelle Zahlen, so liegt in dem Intervall, das von der größten und der kleinsten der n Zahlen $\frac{1}{u_i}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}u_k$ begrenzt wird, mindestens eine charakteristische Zahl der Matrix $\mathfrak{A}$.*

4. Einschließungssatz für die Wurzeln von $\det|\mathfrak{A} - \varkappa\mathfrak{D}| = 0$.

Ist $\mathfrak{D}$ wie in Nr. 3 eine Diagonalmatrix mit positiven Elementen d_i, so kann man die Aussagen von Nr. 2 und 3 durch Einführung der Größen

$$a_{ik}^* = \frac{a_{ik}}{\sqrt{d_i d_k}}, \quad x_i^* = x_i\sqrt{d_i}, \quad u_i^* = u_i\sqrt{d_i}, \quad v_i^* = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^* u_k^*,$$

$$\mathfrak{A}^* = (a_{ik}^*), \qquad \mathfrak{x}^* = (x_i^*), \qquad \mathfrak{u}^* = (u_i^*), \qquad \mathfrak{v}^* = (v_i^*)$$

auf die erweiterte Gleichung $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varkappa\mathfrak{D}\mathfrak{x}$ übertragen, die bei Einführung der mit Stern versehenen Größen in $\mathfrak{A}^*\mathfrak{x}^* = \varkappa\mathfrak{x}^*$ übergeht.

Ist $\mathfrak{A}$ symmetrisch, so ist es auch $\mathfrak{A}^*$; hat $\mathfrak{A}$ nur nichtnegative Elemente, so auch $\mathfrak{A}^*$, mit u_i sind auch die u_i^* positiv. Unter den Voraussetzungen der Nr. 2 und 3 schließen daher die Zahlen

$$\mu_i^* = \frac{v_i^*}{u_i^*} = \frac{v_i}{d_i u_i}$$

mindestens eine charakteristische Zahl von $\mathfrak{A}^*$, d. h. eine charakteristische Zahl von $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varkappa\mathfrak{D}\mathfrak{x}$ ein. Es gilt also der

Satz. *Erfüllen die von Null verschiedenen reellen Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ und die reelle Matrix $\mathfrak{A}$ eine der beiden Voraussetzungen*

a) $u_i > 0; \quad a_{ik} \geqq 0,$

b) $a_{ik} = a_{ki},$

ist ferner $\mathfrak{D}$ eine Diagonalmatrix mit positiven Elementen d_i, so liegt in dem Intervall, das von der größten und der kleinsten der n Zahlen $\frac{1}{d_i u_i}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}u_k$ begrenzt wird, mindestens eine charakteristische Zahl der Gleichung $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varkappa\mathfrak{D}\mathfrak{x}$.

5. Zahlenbeispiel.

Vorgelegt sei die symmetrische Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Durch einfaches Probieren und Variieren der Komponenten u_i (Überlegung, ob Vergrößerung oder Verkleinerung einer bestimmten Komponente die Grenzen $\min_i \mu_i$ und $\max_i \mu_i$ zusammenrücken läßt) kann man sehr schnell die charakteristischen Zahlen in grobe Schranken einschließen.

So erhält man z. B.

aus $u = (1, 1, -1, -2)$	die Schranken	$1 \leqq \varkappa_3 \leqq 2$	
„ $u = (3, 4, 5, 1)$	„	„	$3{,}5 \leqq \varkappa_2 \leqq 4$
„ $u = (3, 1, -3, 3)$	„	„	$5 \leqq \varkappa_1 \leqq 6$
„ $u = (-4, 4, -1, 1)$	„	„	$-4 \leqq \varkappa_4 \leqq -2{,}75.$

Damit hat man alle 4 charakteristischen Zahlen in Intervalle eingegrenzt, die sich gegenseitig nicht überschneiden. Engere Intervalle erhält man, indem man feststellt, wo Änderung einer Komponente etwa um 0,1 das Maximum der μ_i herabdrückt usw. So erhält man z. B. für die an letzter Stelle genannte charakteristische Zahl den besseren Vektor:

$u =$	$(-3{,}5;$	$3{,}8;$	$-0{,}9;$	$1)$
$v = \mathfrak{A}u =$	$(10{,}8;$	$-11{,}4;$	$2{,}7;$	$-3{,}1)$
Quotienten $=$	$(-3{,}08;$	$-3;$	$-3;$	$-3{,}1),$

man weiß jetzt also $-3{,}1 \leqq \varkappa_4 \leqq -3$.

(Eingegangen am 11. November 1941.)

Über Eikörper mit Vieleckschatten.

Von

G. Bol in Freiburg i. Br.

Auf Fragen der hier behandelten Art weist zuerst C. Godbersen hin, der in seiner Göttinger Dissertation[1]) die Vermutung aufstellt, daß ein Eikörper, der sich in jeder Richtung und auf jede Ebene als Dreieck projiziert, selbst ein Dreieck ist. W. Süss und H. Kneser[2]) haben dann gezeigt, daß die Vermutung zutrifft, und daß entsprechendes auch für Eikörper mit lauter Viereckprojektionen gilt:

Viereckssatz. Ein Eikörper, der sich in jeder Richtung und auf jede Ebene als Vieleck mit höchstens vier Seiten projiziert, ist ein räumliches Viereck.

„Räumliches Viereck" heißt dabei jede konvexe Hülle von vier Punkten im Raum, dazu gehört also das Tetraeder, das ebene Viereck, aber auch das Dreieck und die Strecke.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist eine Verallgemeinerung dieser Ergebnisse. Die wichtigsten Sätze, die dabei bewiesen werden, sind die folgenden:

Hauptsatz. *Ein Eikörper, der sich in jeder Richtung und auf jede Ebene als Vieleck projiziert, ist ein Polyeder.*

Zusatz. *Hat jede Projektion höchstens N Ecken ($N \geqq 5$), und hat das Polyeder innere Punkte*[2a]), *so hat jede Seitenfläche des Polyeders höchstens $2N - 6$ Ecken.*

Fünfecksatz. *Hat keine Projektion mehr als 5 Ecken, so ist das Polyeder des Hauptsatzes ein räumliches Fünfeck oder ein räumliches Sechseck.*

Unter „räumliches n-Eck" wird dabei wieder die konvexe Hülle von n Punkten im Raum verstanden. Zu bemerken ist, daß natürlich jedes räumliche Fünfeck den Bedingungen des Fünfecksatzes genügt, aber nicht jedes räumliche Sechseck:

---

[1]) Der Satz vom Vektorbereich in Räumen beliebiger Dimension. Göttingen 1938. S. 34.

[2]) Aufgabe 298, Jahresberichte der Deutschen Math. Ver. 51 (1941), S. 3. Die Beweise wurden noch nicht veröffentlicht.

[2a]) Der Nebensatz dient nur, um für $N = 5$ das ebene Fünfeck auszuschließen.

Ein räumliches Sechseck mit lauter Fünfeckprojektionen[3]*, das kein Fünfeck ist, ist entweder ein dreiseitiger Pyramidenstumpf (mit parallelen Schnittebenen) oder konvexe Hülle eines Parallelogramms und einer Strecke.*

Für die gegenseitige Lage von Strecke und Parallelogramm gelten hier noch gewisse Zusatzbedingungen, die später erwähnt werden sollen (vgl. 15. und 16.).

Aus der letzten schärferen Formulierung des Fünfecksatzes ergibt sich sofort ein entsprechender Satz aus der projektiven Geometrie:

Projektiver Fünfecksatz. *Ein Eikörper, der bei Zentralprojektion aus einem beliebigen Zentrum außerhalb auf eine beliebige Ebene als Projektion stets ein Fünfeck hat, ist selbst ein räumliches Fünfeck.*

Unter den räumlichen Sechsecken, die als Parallelprojektionen lauter Fünfecke besitzen, gibt es nämlich offenbar keine projektiv invariante Klasse, die Körper mit mehr als fünf Ecken enthält.

Im übrigen läßt sich der projektive Fünfecksatz auch einfacher beweisen: man kann annehmen, daß der Körper keine zwei parallelen Kanten besitzt und braucht dann aus § 2 im wesentlichen nur die Schlüsse aus Nr. 7 zu verwenden.

Auch eine Verschärfung ist möglich: Ein Körper, der sich aus den Punkten von drei Ebenen, welche ihn nicht treffen und welche keine Gerade gemeinsam haben, stets als Fünfeck projiziert, ist ein räumliches Fünfeck.

Erweiterung des Viereckssatzes zum $n+1$-Eck-Satz des n-dimensionalen Raumes ist leicht, ebenso läßt sich der Hauptsatz erweitern. Erweiterung des Fünfecksatzes zum $n+2$-Eck-Satz des R_n dürfte aber nur sehr umständlich möglich sein.

Für $N = 6$ kann die Eckenzahl des Polyeders im Zusatz vermutlich 8 nicht übersteigen, der Beweis dürfte aber ebenfalls nicht leicht sein.

Bemerkenswert ist, daß im Hauptsatz nicht verlangt zu werden braucht, daß die Seitenzahl der Projektionen beschränkt sein soll; wenn alle Projektionen Vielecke sind, so ist deren Seitenzahl auf Grund eben des Hauptsatzes von selbst beschränkt.

§ 1.

Beweis des Hauptsatzes.

1. Jede Stützebene eines konvexen Körpers hat mit diesem stets einen ebenen konvexen Bereich, also einen Punkt, eine Strecke oder einen Eibereich mit inneren Punkten gemeinsam. Wie sich herausstellen wird, ist im hier betrachteten Fall, also für Eikörper mit lauter Vieleckprojektionen, dieser Eibereich, falls er innere Punkte hat, stets ebenfalls ein Vieleck. Aus diesem

[3]) Natürlich dürfen die Projektionen auch weniger als fünf Ecken haben, entsprechendes gilt für alle weiteren Sätze. Ein Vieleck mit genau n Ecken wollen wir deshalb auch ein „Echtes n-Eck" nennen.

Grunde soll zunächst eine solche „Seitenebene" des Körpers — also eine Stützebene, mit der der Körper ein echtes Vieleck gemeinsam hat — genauer betrachtet werden.

Wir bedienen uns dabei topologischer Schlüsse, indem wir die zu einer vorgegebenen „benachbarten" Stützebenen heranziehen. Diese „Nachbarschaft" ist stets im sphärischen Normalenbild zu verstehen, wird also eine Behauptung ausgesprochen für alle zu einer vorgegebenen Stützebene E genügend benachbarten Stützebenen, so ist diese richtig für alle Stützebenen, deren Normalenbilder in eine Umgebung des Normalenbildes E^* von E fallen.

In diesem Sinne behaupten wir:

Satz 1. *Hat die Stützebene E mit dem Körper ein Vieleck gemeinsam, so haben alle genügend benachbarten Stützebenen mit dem Körper entweder nur eine Ecke oder nur eine Kante des Vielecks gemeinsam.*

Zum Beweis projizieren wir den Körper in der Richtung einer Vieleckkante. Offenbar liefert dann die Kante eine Ecke des Projektionsvielecks, unser Körper liegt also in einem räumlichen Winkel, der von der Vieleckebene E und einer weiteren durch die Kante gehenden Ebene gebildet wird. Da dasselbe für alle anderen Kanten des Vielecks gilt, so liegt unser Körper in einer „Wanne", wie sie in der Fig. 1 gezeichnet ist.

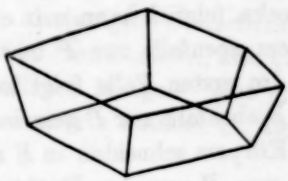

Fig. 1.

Wir betrachten nun die aufsteigenden Kanten der Wanne, die von den Ecken des Vielecks ausgehen. Das Minimum der Winkel, die sie mit der Vieleckebene einschließen, sei α. Dann hat jede Stützebene, welche mit E einen kleineren Winkel als α einschließt, mit der Wanne, also auch mit dem Körper nur Randpunkte des Vielecks gemeinsam. Denn ein Halbstrahl, der von einem Randpunkt des Vielecks ausgeht und innerhalb der Wanne verläuft, schließt mit E einen größeren Winkel als α ein und kann also nicht in einer der genannten Stützebenen liegen. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Satz 2. *Hat eine Stützebene mit dem Körper eine Strecke gemeinsam, so haben alle genügend benachbarten Stützebenen mit dem Körper entweder nur diese Strecke oder nur einen ihrer Endpunkte gemeinsam.*

Zum Beweis braucht man nur die Strecke als entartetes Rechteck aufzufassen und Satz 1 anzuwenden.

Faßt man den Punkt als entartetes Quadrat auf, so folgt ebenso:

Satz 3. *Hat eine Stützebene mit dem Körper nur einen Punkt P gemeinsam, so enthalten alle genügend benachbarten Stützebenen ebenfalls nur den Punkt P des Körpers.*

Anders ausgedrückt:

Satz 4. *Die Normalenbilder derjenigen Stützebenen, die mit dem Körper genau den festen Punkt P gemeinsam haben, bilden auf der Kugel eine offene Menge.*

Aus Satz 2 und Satz 3 folgt weiter:

Satz 5. *Die Normalenbilder derjenigen Stützebenen, die mit dem Körper entweder nur einen Punkt oder nur eine Strecke gemeinsam haben, bilden auf der Kugel eine offene Menge.*

2. Satz 6. *Jede Stützebene hat mit unserem Körper entweder einen Punkt oder eine Strecke oder ein Vieleck gemeinsam.*

Zum Beweis möge die Stützebene E mit dem Körper einen Eibereich B mit inneren Punkten gemeinsam haben. Wir wollen beweisen, daß B ein Vieleck ist. Betrachten wir also eine Stützgerade g von B; diese hat mit B entweder einen Punkt P oder eine Strecke P_1P_2 gemeinsam. Projizieren wir unseren Körper in der Richtung von g, so liefert g eine Ecke des Projektionsvielecks, folglich kann man eine Stützebene unseres Körpers angeben, die mit diesem ebenfalls nur P bzw. nur die Strecke P_1P_2 gemeinsam hat.

Im ersten Falle folgt aus Satz 3, daß alle benachbarten Stützgeraden mit B ebenfalls nur P gemeinsam haben. Denn die benachbarten Stützebenen des Körpers schneiden in E zu g benachbarte Geraden aus, die vom Körper, also von B nur den Punkt P enthalten und deshalb Stützgeraden von B sind. Im zweiten Falle folgt aus Satz 2, daß alle benachbarten Stützgeraden mit B nur den Punkt P_1 oder den Punkt P_2 gemeinsam haben (nur g selbst enthält die ganze Strecke P_1P_2).

Diese beiden Aussagen lassen sich auch anders formulieren. Betrachten wir nämlich die Normalenbilder der Stützgeraden an einen Kreis in E, so lautet die erste:

Die Normalenbilder derjenigen Stützgeraden von B, die mit B nur einen Punkt gemeinsam haben, bilden eine offene Menge M auf dem Bildkreis.

Die zweite lautet:

Die Normalenbilder derjenigen Stützgeraden von B, die mit B eine Strecke gemeinsam haben, liegen auf dem Bildkreis sämtlich isoliert.

Zu jedem solchen Normalenbild gibt es also eine Umgebung auf dem Bildkreis, zu der lauter Stützgeraden gehören, die mit B nur einen Punkt gemeinsam haben.

Aus der ersten Aussage folgt aber, daß die Menge aller Normalenbilder von Stützgeraden, die mit B mehr als einen Punkt gemeinsam haben — als Restmenge einer offenen Menge — abgeschlossen ist. Nun enthält aber eine

abgeschlossene Menge auf dem Kreise, deren Punkte sämtlich isoliert liegen, nur endlich viele Punkte.

Es gibt also nur endlich viele Stützgeraden, die mit B eine Strecke gemeinsam haben. Zeigen wir nun noch, daß durch jeden Randpunkt Q von B mindestens eine solche Stützgerade geht, so folgt, daß B mit dem von unseren endlich vielen Stützgeraden gebildeten Vieleck identisch ist. Damit ist dann unsere Behauptung bewiesen.

Die letzte Aussage ist aber leicht zu beweisen. Denn die Normalenbilder aller Stützgeraden, die nur Q mit B gemeinsam haben, bilden, wie wir oben sahen, eine offene Menge M[3a]) auf dem Bildkreis, die natürlich nicht den ganzen Kreis ausfüllt, also Randpunkte hat, die nicht zu ihr gehören.

Zu einem solchen Randpunkt aber gehört eine Stützgerade, die — als Grenzlage von Stützgeraden durch Q — noch durch Q geht, aber weil sie nicht zu M gehört, nicht nur Q mit B gemeinsam hat, also B längs einer Strecke berührt. Damit ist alles bewiesen.

3. Auf Grund von Satz 6 läßt sich nun der Hauptsatz leicht beweisen. Nach Satz 5 bilden nämlich die Normalenbilder derjenigen Stützebenen unseres Körpers, die mit diesem einen Eibereich mit inneren Punkten, also ein Vieleck gemeinsam haben — als Restmenge einer offenen Menge — eine abgeschlossene Menge, nach Satz 1 enthält diese nur isolierte Punkte, ist also endlich.

Unser Körper hat also nur endlich viele Seitenebenen.

Beweisen wir noch, daß jeder Randpunkt P unseres Körpers in mindestens einer Seitenebene liegt, so ist unser Körper mit dem von den Seitenebenen gebildeten Polyeder identisch. Das aber ist einfach.

Nach Satz 3 bilden nämlich die Normalenbilder der Stützebenen, die nur in P berühren, eine offene Menge[3b]), die natürlich nicht die ganze Kugel umfaßt. Zu einem Randpunkt dieser Menge M gehört eine Stützebene, die noch durch P geht, aber — weil der Randpunkt nicht zu M gehört — nicht nur in P berührt, also mit dem Körper mindestens eine Strecke PQ gemeinsam hat. Projiziert man den Körper in der Richtung dieser Strecke, so liefert sie einen Randpunkt R des Projektionsvielecks. RS sei eine durch R gehende Seite des Projektionsvielecks, T sei ein Urbild von S. Die Ebene durch RS in der Projektionsrichtung ist jetzt Stützebene und hat mit dem Körper die drei

---

3a) Oder es gibt keine solche Stützgerade. Dann hat man aber von vornherein eine Stützgerade die längs einer Strecke berührt, denn es gibt ja mindestens eine Stützgerade durch Q.

3b) Oder die Menge ist leer. Dann findet man aber in einer beliebig gewählten Stützebene durch P schon eine Strecke PQ des Körpers und schließt mit dieser weiter wie unten.

Punkte P, Q, T gemeinsam, die nicht in einer Geraden liegen. Sie ist also die gesuchte Seitenebene durch P.

Damit ist der Hauptsatz vollständig bewiesen.

4. Beweis des Zusatzes: Ein Polyeder mit inneren Punkten, das sich bei jeder Projektionsrichtung als Vieleck mit höchstens N Ecken projiziert ($N \geqq 5$), hat keine Seitenebene mit mehr als $2N - 6$ Kanten.

In der Fig. 2 sei eine Fazette (Seitenebene) F des Polyeders gezeichnet. Hat das Polyeder nur noch eine weitere Ecke S, ist es also eine Pyramide mit F als Basis und S als Spitze, so kann man die Seitenebene E als Projektionsebene wählen, die Projektion ist dann die konvexe Hülle von F und der Projektion S^* von S. Wählt man die Projektionsrichtung so, daß S^* außerhalb von F und in der Nähe einer Kantenmitte fällt, so hat die Projektion eine Ecke mehr als F, die Eckenzahl von F darf also höchstens $N - 1$ sein. Für $N \geqq 5$ ist aber $2N - 6 \geqq N - 1$, in diesem Falle stimmt also die Behauptung.

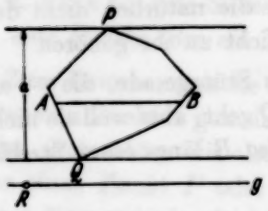

Fig. 2.

Nehmen wir also an, das Polyeder hat außer den Fazettenecken noch mindestens zwei weitere Eckpunkte. S sei ein solcher Eckpunkt, ST eine Kante, die von S ausgeht und nicht nach einer Fazettenecke hinführt, da unser Körper keine Pyramide mit S als Spitze sein soll, gibt es sicher eine solche Kante. R sei der Schnittpunkt der verlängerten Kante ST mit der Seitenebene E, R liegt außerhalb von F und kann natürlich im Unendlichen fallen.

Eine Stützebene unseres Polyeders, die nur die Kante ST mit diesem gemeinsam hat, schneidet E in einer Geraden g durch R, die F nicht trifft. Die Stützebene kann so gewählt werden, daß g zu keiner Seite von F parallel wird. Projiziert man jetzt unser Polyeder in der Richtung g, so liefern S und T zwei Ecken der Projektion. Dasselbe gilt für jede zu g genügend benachbarte Projektionsrichtung.

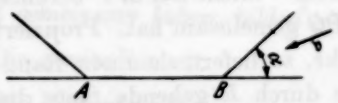

Fig. 3.

Die zu g parallelen Stützgeraden an F mögen F in P und Q berühren (Fig. 2). P und Q teilen den Umriß von F in zwei Streckenzüge. Hätte nun das Vieleck F mehr als $2N - 6$ Seiten, so würde mindestens einer dieser Züge aus $N - 2$ oder mehr Seiten bestehen. Es sei dies etwa der Zug PBQ der Figur.

$\mathfrak{a}$ sei ein Vektor der Ebene E senkrecht zu g. Wir schneiden unser Polyeder mit den Ebenen senkrecht zu $\mathfrak{a}$, AB sei die Spur einer solchen Ebene, die Fig. 3 möge den Durchschnitt der Ebene mit unserem Polyeder darstellen. Dieser

ist ein Vieleck, das B als Ecke hat, α sei der Außenwinkel bei B. α bleibt fest, solange B auf derselben Strecke des Streckenzuges liegt, nimmt also nur endlich viele Werte an, α_0 sei der kleinste dieser Werte.

Wählen wir jetzt einen Projektionsvektor $\mathfrak{v}$, der senkrecht auf $\mathfrak{a}$ steht und mit E einen Winkel β einschließt, der kleiner ist als α_0 (vgl. Fig. 3), und unsere Seitenebene als Projektionsebene, so ist der Streckenzug PBQ ein Teil des Projektionsumrisses. Da dieser Streckenzug mindestens $N-1$ Ecken hat, und außerdem bei genügend kleinem β auch S und T Ecken der Projektion liefern, hätte die Projektion mindestens $N+1$ Ecken, im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist der Satz bewiesen[4]).

§ 2.

Beweis des Fünfecksatzes.

5. Einige allgemeine Betrachtungen über Körper mit lauter N-Eckprojektionen seien vorausgeschickt.

Sei das N-Eck $P_1P_2 \ldots P_N$ Projektion eines solchen Körpers. Dann sind die Urbilder $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ der Ecken eindeutig bestimmt.

Beweis. Wäre etwa das Urbild von P_1 nicht eindeutig bestimmt, also eine Strecke Q_1R_1 in der Projektionsrichtung, so könnten wir durch Q_1R_1 eine Ebene E legen, die sonst keine Punkte mit unserem Körper gemeinsam hat. Sei nun $\mathfrak{v}$ ein Vektor in E in der Projektionsrichtung, $\mathfrak{w}$ ein Vektor in E senkrecht zu $\mathfrak{v}$, so betrachten wir die Projektion unseres Körpers in der Richtung des Vektors $\mathfrak{v}+\delta\mathfrak{w}$ bei genügend kleinem δ. Die Projektionsebene lassen wir ungeändert.

Da die Projektion eines konvexen Körpers bei festgehaltener Projektionsebene stetig von der Projektionsrichtung abhängt — das folgt daraus, daß die Stützfunktion eines konvexen Körpers eine stetige Funktion auf der Einheitskugel ist —, hat die neue Projektion je eine Ecke in der Nähe von P_2, P_3, $\ldots$, P_N, und zwar beliebig nahe zu diesen Punkten, wenn nur δ klein genug ist.

Die Projektion der Kante Q_1R_1 aber fällt längs der Spur der Ebene E in der Projektionsebene, diese trägt also ebenfalls zwei Ecken der Projektion. Unsere Projektion müßte also wenigstens $N+1$ Ecken haben, im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist die Behauptung bewiesen.

---

[4]) Für $N=4$ bleiben alle Schlüsse richtig, nur die Ungleichung $2N-6 \geqq N-1$ gilt nicht mehr. Daraus ergibt sich sofort ein Beweis des Viereckssatzes. Der zweite Fall ist nämlich hier unmöglich, weil unsere Seitenebene nur $2N-6=2$ Kanten haben könnte. Der Körper ist also eine Pyramide, dann aber hat die Basisfläche höchstens $N-1=3$ Ecken und es handelt sich um ein Tetraeder. Übrigens läßt sich der Viereckssatz durchsichtiger ohne den Umweg über den Hauptsatz beweisen. Ich hoffe darauf noch zurückzukommen.

Nach dem Hauptsatz ist unser Körper ein Polyeder. Ist nun aber bei einer bestimmten Projektionsrichtung eines Polyeders die Ecke Q Urbild einer Ecke der Projektion, so gilt dasselbe für alle genügend benachbarten Projektionsrichtungen. Also:

Ist die Projektion unseres Körpers bei einer bestimmten Projektionsrichtung ein echtes N-Eck, so gilt dasselbe für alle zur vorgegebenen genügend benachbarten Projektionsrichtungen und die Urbilder der Ecken sind dabei dieselben.

Stellen wir jetzt jede Projektionsrichtung durch ihr Bild auf einer Richtungskugel dar — jeder Richtung entsprechen dabei zwei Gegenpunkte der Kugel —, so kann man diesen Sachverhalt auch so ausdrücken:

Denjenigen Projektionsrichtungen, bei denen die Projektion ein echtes N-Eck ist und die Urbilder der Ecken N vorgegebene Punkte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ sind, entspricht auf der Richtungskugel eine offene Punktmenge.

Sei A ein Randpunkt dieser offenen Menge M. Dann kann zur entsprechenden Richtung kein echtes N-Eck als Projektion gehören. Denn entweder wären $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ die Urbilder der Ecken, dann würde A Pünkt von M und deshalb innerer Punkt von M sein, oder die Urbilder wären ganz oder zum Teil andere, dann müßte A zu einer zu M fremden offenen Menge gehören und könnte ebenso wenig Randpunkt von M sein.

Da das für beliebig benachbarte Projektionsrichtungen der Fall ist, ist bei der zu A gehörigen Richtung immer noch das Projektionspolygon die konvexe Hülle der Projektionen von $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ und liegen diese auf dem Rand des Polygons, da dieses aber höchstens $N - 1$ Seiten hat, liegen auf wenigstens einer Seite drei dieser Projektionen. Das bedeutet aber, daß die zugehörigen Urbilder in einer Seitenebene des Polyeders liegen und daß die zu A gehörige Projektionsrichtung zu dieser Seitenebene parallel ist.

Anschaulich läßt sich das so ausdrücken: *Ist die Projektion unseres Körpers bei einer bestimmten Projektionsrichtung ein echtes N-Eck, und ändert man die Richtung stetig, so kann die Eckenzahl der Projektion und können die Urbilder der Ecken sich nur dann ändern, wenn die Projektionsrichtung zu einer der von je drei der Punkten Q_i bestimmten Ebenen parallel wird, die gleichzeitig Seitenebene unseres Körpers ist.*

Im übrigen kann man das auch direkt einsehen: Falls ein Punkt Q_i als Ecke der Projektion verschwinden soll, so muß der hindurchgehende Projektionsstrahl in den Körper hineinwandern, das kann aber nur durch eine Seitenebene hindurch geschehen.

6. Wir wollen jetzt noch untersuchen, was geschieht, wenn die Projektionsrichtung zu einer Kante unseres Körpers parallel wird.

Sei das $(N-1)$-Eck $P_1, P_2, \ldots, P_{N-1}$ Projektion unseres Körpers, dabei seien die Urbilder $Q_2, Q_3, \ldots, Q_{N-1}$ von $P_2, P_3, \ldots, P_{N-1}$ eindeutig bestimmt, P_1 aber sei Projektion einer Kante $Q_1 R_1$ unseres Körpers. Für alle genügend benachbarten Projektionsrichtungen sind dann $Q_2, Q_3, \ldots, Q_{N-1}$ immer noch Urbilder von Ecken der Projektion.

Legt man aber durch $Q_1 R_1$ eine Ebene E hindurch, die den Körper sonst nicht trifft, deren Spur S also nur P_1 mit der Projektion gemeinsam hat, und untersucht benachbarte Projektionsrichtungen, die in dieser Ebene liegen, so fällt hierbei stets die Projektion der Kante $Q_1 R_1$ längs S, und die Bilder von Q_1 und R_1 werden Ecken der Projektion.

Für alle zur Kante benachbarten Projektionsrichtungen in der Ebene E ist also die Projektion ein N-Eck und sind die Urbilder der Ecken dieselben. Also:

Ist die Projektion unseres Körpers in der Richtung einer Kante ein $N-1$-Eck und sind die Urbilder der nicht zur Kante gehörigen Ecken eindeutig bestimmt, ist weiter E eine Ebene durch die Kante, die den Körper sonst nicht trifft, so ändern sich die Urbilder der Ecken nicht, wenn die Projektionsrichtung, in der Ebene gelegen, die Kante durchschreitet.

Dieses Ergebnis soll später verwendet werden.

7. Wir wenden uns jetzt dem Fünfecksatz zu, von jetzt an soll unser Körper also nur Fünfeckprojektionen haben. Wenn wir den trivialen Fall ausschließen, daß unser Körper ein ebenes Fünfeck ist, so können nach dem Zusatz zum Hauptsatz Seitenebenen mit mehr als vier Ecken nicht vorkommen. Wir unterscheiden deshalb drei Fälle:

A. Der Körper wird ausschließlich von Dreiecken begrenzt.

B. Alle Begrenzungsvielecke sind entweder Parallelogramme oder Dreiecke.

C. Es gibt ein Begrenzungsviereck, das kein Parallelogramm ist, aber keine Begrenzungspolygone mit mehr als vier Ecken.

Bevor wir die Fälle aber einzeln untersuchen, fügen wir noch einige Bemerkungen zu, die für alle gelten.

Unser Körper möge sich in der Richtung $\mathfrak{v}$ als Viereck $P_1 P_2 P_3 P_4$ projizieren.

Sind P_1 und P_3 Gegenecken des Projektionsvierecks, so können sie nicht gleichzeitig Projektion je einer Kante des Körpers sein. Denn man könnte durch beide Kanten Ebenen parallel zur Diagonale $P_2 P_4$ der Projektion legen, die den Körper sonst nicht treffen; ändert man die Projektionsrichtung innerhalb dieser Ebenenrichtung, so gelten für beide Kanten die Betrachtungen aus **6.** und die Projektion würde ein Sechseck werden, was nicht sein kann.

Sind zwei aufeinanderfolgende Ecken der Projektion, etwa P_1 und P_2, Projektion je einer Kante, so hat die Fazette des Körpers, deren Projektion P_1P_2 ist, zwei parallele Seiten, und also mindestens vier Ecken.

In Fall A kann also höchstens eine Ecke eines Projektionsvierecks Projektion einer Kante sein. Daher können wir im Falle A auf Viereckprojektionen in der Richtung einer Kante stets **6.** anwenden.

8. Als weitere Vorbereitung untersuchen wir, welche Gestalten ein räumliches Fünfeck, also die konvexe Hülle von fünf Punkten A, B, C, D, E im Raum, haben kann.

Ein nicht ebenes räumliches Fünfeck kann stets aufgebaut werden aus zwei Tetraedern, die eine Seitenfläche gemeinsam haben.

Die Verbindungsstrecke der vierten Ecken muß dabei natürlich das gemeinsame Dreieck treffen.

Beweis. Liegen vier der Punkte in einer Ebene, ist der Körper also eine vierseitige Pyramide, so zerschneidet eine Ebene durch die Spitze und eine Diagonale des Vierecks ihn in zwei Tetraeder der verlangten Art.

Im anderen Falle betrachten wir die Verbindungen eines der Punkte, etwa von A, mit den anderen. Liegt eine dieser Verbindungen, etwa AE, im Innern der von den drei anderen AB, AC, AD gebildeten körperlichen Ecke, so kann man den Körper aus den beiden Tetraedern $ABCD$ und $EBCD$ aufbauen.

Liegen die vier Kanten sämtlich auf der Körperbegrenzung, so mögen sie beim Umlauf um A auf der Körperoberfläche etwa in der Reihenfolge AB, AC, AD, AE getroffen werden. Die Ebene ABD teilt dann den Körper in zwei Teile, ebenso ACE; ihre Schnittgerade, das ist die gemenisame Treffgerade von BD und CE durch A, verläuft von A aus im Körperinnern. Sie möge BD in F und CE in G treffen. Fallen F und G zusammen, so liegen B, C, D, E in einer Ebene, dieser Fall wurde schon betrachtet. Trifft man, von A ausgehend, zuerst auf F, so ist F innerer Punkt, man kann dann B und D als Tetraederspitzen, ACE als gemeinsame Basisfläche wählen. Trifft man zuerst auf G, so läßt sich der Körper entsprechend in die beiden Tetraeder $CABD$ und $EABD$ aufteilen. Damit ist alles bewiesen.

9. Wenden wir uns jetzt dem Fall A zu. $A_1B_1C_1D_1E_1$ sei eine Fünfeckprojektion unseres Körpers, A, B, C, D, E seien die Urbilder der Projektionsecken. Liegen diese fünf Punkte in einer Ebene, bilden sie also ein ebenes Fünfeck, so wenden wir **5.** an, danach muß die Ebene durch drei der Punkte, also die Fünfeckebene, Seitenebene sein, unser Körper würde dann von einem Fünfeck begrenzt werden, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Das von unseren Punkten bestimmte räumliche Fünfeck ist also nicht eben. Wir können also **8.** anwenden, die Spitzen der beiden Tetraeder mögen etwa D und E sein, ABC das gemeinsame Basisdreieck.

Unsere Fragestellung ist affininvariant, wir wollen deshalb so affin transformieren, daß DE senkrecht zur Ebene ABC wird[5]).

Wir untersuchen nun, für welche Projektionsrichtungen unser räumliches Fünfeck eine Fünfeckprojektion hat. Für Projektionsrichtungen parallel zur Ebene ABC ist das sicher nicht der Fall, wir können also stets diese Ebene, die wir uns waagerecht denken, als Projektionsebene wählen. Die Projektion unseres Körpers ist dann die konvexe Hülle von A, B, C und den Projektionen D^* und E^* von D und E.

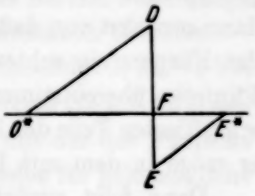

Fig. 4.

Der Schnittpunkt F von DE und ABC liegt innerhalb oder auf dem Rande dieses Dreiecks, da die beiden Projektionsstrahlen DD^* und EE^* in einer Ebene durch DE liegen, geht D^*E^* durch F und trifft also das Dreieck ABC. Damit die Projektion ein echtes Fünfeck wird, genügt es also, wenn D^* und E^* mit A, B, C je ein echtes Viereck bilden.

Damit dies für D^* der Fall ist, muß dieser Punkt offenbar liegen außerhalb des waagerecht schraffierten Teiles unserer Ebene (Fig. 5). Dasselbe muß für E^* der Fall sein; da aber D^* und E^* nach Fig. 4 durch eine Homothetie mit Ähnlichkeitszentrum F verknüpft sind, kommt das darauf hinaus, daß D^* eine entsprechende Lage haben muß in bezug auf ein zu ABC nach dem Zentrum F homothetisches Dreieck $A'B'C'$.

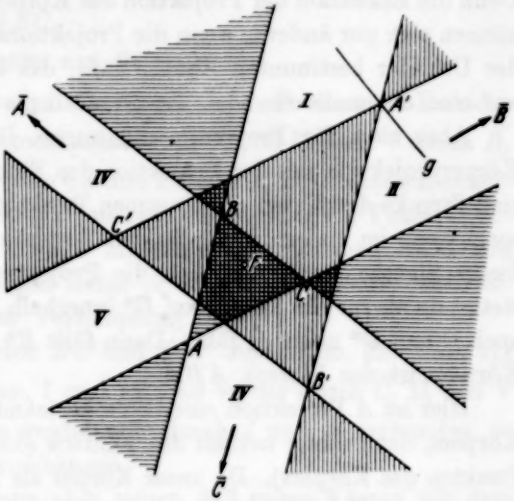

Fig. 5.

Dabei ist EA' parallel zu DA, EB' parallel zu DB und EC' parallel zu DC.

Notwendig und hinreichend, damit die Projektion des räumlichen Fünfecks $ABCDE$ ein echtes Fünfeck wird, ist, daß D^* außerhalb des waagerecht schraffierten und außerhalb des senkrecht schraffierten Teiles der Ebene, also innerhalb eines der Teile liegt, die in der Fig. 5 weiß verblieben sind.

Natürlich brauchen die beiden Dreiecke nicht gerade die in der Figur gezeichnete gegenseitige Lage zu haben, es kann $A'B'C'$ auch ganz innerhalb ABC liegen, oder auch dieses Dreieck ganz umfassen, wesentlich ist nur, daß

[5]) An sich wäre das nicht nötig, die Figuren werden dadurch aber übersichtlicher.

das Ähnlichkeitszentrum der beiden Dreiecke innerhalb oder auf dem Rande jedes Dreiecks liegt.

Offenbar bestimmt D^* eindeutig die Projektionsrichtung, und umgekehrt. Statt eine Richtungskugel heranzuziehen, können wir also auch jede Projektionsrichtung durch den zugehörigen Punkt D^* darstellen.

10. Bis jetzt haben wir nur die Projektionen unseres Fünfecks betrachtet, jetzt kehren wir zu den Projektionen unseres Körpers zurück. Wir wissen dann zunächst nur, daß es eine Projektionsrichtung gibt, für die die Projektion des Körpers ein echtes Fünfeck ist und mit derjenigen unseres räumlichen Fünfecks übereinstimmt. Der zugehörige Punkt D^* liegt in einem der nicht schraffierten Teile der Figur, in welchem ist unbekannt. Nehmen wir etwa an, er möge in dem mit I bezeichneten Teil liegen.

Dann folgt zunächst aus **5.**, daß die Projektion des Körpers für *alle* Punkte des Bereiches I mit der Projektion des Fünfecks übereinstimmt. Denn die Eckenzahl der Projektion des Körpers, sowie die Urbilder der Ecken können sich nur ändern, wenn die Projektionsrichtung in eine der von je drei der Urbilder bestimmten Ebenen fällt, das ist aber nur der Fall, wenn D^* auf eine der sechs Geraden der Figur liegt.

Aber auch für Projektionsrichtungen, für die D^* in II liegt, fällt die Körperprojektion mit der Projektion des Fünfecks zusammen. Sei nämlich g eine Strecke durch den gemeinsamen Punkt A' der Ränder von I und II, die sonst ganz im Innern dieser beiden Bereiche verläuft. Bewegt sich D^* auf dieser Strecke, so ändern sich die Projektionen von Körper und Fünfeck stetig; da sie für alle Lagen von D^* innerhalb I übereinstimmen, gilt das auch noch, wenn D^* nach A' fällt. Dann fällt E^* nach A und die Projektion des Körpers ist das Viereck $ABA'C$.

Hier ist A Projektion einer Strecke (nämlich EA) des Fünfecks, also des Körpers, denn dieser enthält das Fünfeck (dieses ist konvexe Hülle von fünf Punkten des Körpers). Da unser Körper als Fazetten lauter Dreiecke haben soll, sind die Urbilder der Ecken B, C, A' des Vierecks eindeutig bestimmt, also die Punkte B, C und D (vgl. den Schluß von **7.**). Wir können also auf diese Projektion **6.** anwenden.

Für die Ebene durch unsere Kante EA wählen wir hierbei die Ebene parallel zu g, die Projektionsrichtungen in dieser Ebene werden durch die Punkte von g dargestellt. Nach **6.** ist für alle diese Richtungen in genügender Nachbarschaft der zur Kante gehörigen die Projektion ein Fünfeck und sind die Urbilder der Ecken dieselben. Auch für die Punkte in II von g sind also A, B, C, D, E die Urbilder der Ecken der Körperprojektion.

Wir können also dasselbe Projektionsdiagramm weiter verwenden und sehen, daß für *alle* Projektionen, deren Bilder in II liegen, die Körperprojektion mit der Projektion unseres Fünfecks übereinstimmt.

Man überzeugt sich nun leicht, daß man in dieser Weise in jeden unschraffierten Teil der Figur gelangen kann. Als „Durchgangspunkte" stehen dazu in dem gezeichneten Fall die Punkte A, A', B', C' zur Verfügung, aber auch die unendlich fernen Punkte $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ der Geradenrichtungen. Zu $\overline{C}$ etwa gehört nämlich die Projektion in der Richtung der Kante AB, die ebenfalls ein Viereck ist, wenn nicht F auf AB liegt. Das ist aber sicher nicht der Fall, wenn die Geraden AB und $A'B'$ verschieden sind, also der Bereich I überhaupt vorhanden ist. Zu I und IV gehören also auch stets dieselben Urbilder.

In unserem Falle sind die sechs Bereiche in der Reihenfolge I, II, V, VI, III, IV durch die Punkte A', $\overline{B}$, C', $\overline{A}$, B' verknüpft, so daß für alle zu ihnen gehörigen Projektionsrichtungen die Körperprojektion mit der des Fünfecks $ABCDE$ übereinstimmt. Überzeugen wir uns, daß dasselbe für jede mögliche Lage der beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gilt!

Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) F liegt im Innern von ABC.

b) F liegt auf dem Rand, etwa auf BC[6]).

In Fall a) sind die sechs Geraden alle verschieden, also die sechs Bereiche alle vorhanden, von I nach IV kommt man durch $\overline{C}$, von II nach V durch $\overline{B}$, von III nach VI durch $\overline{A}$. Liegen nun die drei Punkte A, B, C sämtlich außerhalb des Dreiecks $A'B'C'$, so kann man sie zur Verknüpfung der Paare untereinander verwenden, liegt aber etwa C innerhalb oder auf dem Rand von $A'B'C'$, wie in der Figur, so liegen sicher A' und B' außerhalb des Dreiecks ABC und können diese zur Verknüpfung dienen.

Im Fall b) fallen die Geraden BC und $B'C'$ zusammen, die Teile III und VI sind also nicht vorhanden, I und IV sind wieder durch $\overline{C}$, II und V durch $\overline{B}$ verknüpft. Beide Paare werden aber durch A und A' verbunden, so daß auch hier alle Teile zusammenhängen.

Aus dieser Tatsache folgt nun aber sofort, daß unser Körper mit dem Fünfeck $ABCDE$ identisch ist. Denn von jeder der sechs Geraden der Figur ist mindestens ein Punkt Randpunkt von einem (oder mehrere) der Bereiche I bis VI. Läßt man nun aber D^* stetig in einen solchen Randpunkt wandern, so fallen auch in der Grenzlage noch Körper- und Fünfeckprojektion zusammen, daraus folgt aber, daß die von der Geraden dargestellte Seitenfläche des Fünfecks auch den Körper begrenzt, und da dies für sämtliche sechs Seitenebenen des Fünfecks gilt, ist der Körper mit diesem identisch.

Wandert in der Figur z. B. der Punkt D^* nach A', so wird die Fünfeckprojektion das Viereck $ABA'C$, dieses ist also auch Projektion des Körpers.

---

[6]) In eine Ecke kann F nicht fallen, weil dann das Fünfeck ein Tetraeder wäre und kein echtes Fünfeck als Projektion haben könnte.

Daher sind aber AEB und AEC auch Seitenebenen des Körpers, denn die Projektionen AB und AC dieser Fazetten des Fünfecks begrenzen auch die Körperprojektion.

Als Ergebnis erhalten wir:

Im Fall A *ist unser Körper ein räumliches Fünfeck.*

Bemerken wir noch, daß der obige Fall b) in Wirklichkeit nicht vorkommt, hier ist nämlich unser Körper eine vierseitige Pyramide und hätte ein Begrenzungsviereck.

11. Es sei jetzt Fall B betrachtet, es sei $ABCD$ ein Parallelogramm, das unseren Körper begrenzt, die Ebene in der es liegt, wollen wir e nennen.

Für jede Projektionsrichtung parallel zu e kann die Projektion höchstens vier Ecken haben. Denn das Parallelogramm liefert stets zwei Ecken der Projektion, für beliebig benachbarte Richtungen außerhalb e aber drei (vgl. **4.**). Die Urbilder der Ecken bleiben also in keiner Umgebung unserer Richtung ungeändert, nach **5.** kann deshalb die Projektion kein echtes Fünfeck sein.

Sei jetzt d der Höchstabstand der Punkte unseres Körpers zur Ebene e, M die Menge aller Punkte des Körpers, die zu e den Abstand d haben.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) M ist eine Kante oder eine Seitenfläche des Körpers.

b) M ist eine Ecke des Körpers.

Im Falle a) haben alle Projektionen unseres Körpers in Richtungen parallel zu e (wenn M eine Kante ist, bis auf diejenige in der Kantenrichtung) zwei parallele Seiten. Auf diesen beiden Seiten liegen vier Ecken, andere Ecken kann die Projektion nicht haben. Sie ist also stets mit der Projektion der konvexen Hülle von M und $ABCD$ identisch. Unser Körper hat also alle Stützebenen (eventuell bis auf diejenigen, deren sphärische Bilder einem Großkreise angehören, was keine Rolle spielt) mit dieser konvexen Hülle gemeinsam, ist also mit ihr identisch.

Nun kann aber M keine Seitenfläche sein, denn nach **4.** gäbe es dann zu jeder Richtung in e eine benachbarte, bei der mindestens 3 Ecken von M und 3 Ecken von $ABCD$ Urbilder von Ecken der zugehörigen Projektion wären, so daß diese mindestens sechs Ecken hätte, was nicht sein kann.

Im Falle a) ist also unser Körper konvexe Hülle eines Parallelogramms und einer Strecke.

12. Betrachten wir jetzt den Fall b). M ist hier ein Punkt, ist die Projektionsrichtung parallel zur Ebene e, so wird M stets Urbild einer Ecke der Projektion.

Projizieren wir etwa in der Richtung der Parallelogrammkante AB, so liefern die Kanten AB und CD und der Punkt M je eine Ecke der Projektion, es kann also höchstens noch eine weitere Ecke geben. Von den beiden Ebenen ABM und CDM ist also wenigstens eine Seitenebene unseres Körpers, ist die Projektion ein Dreieck, dann sogar beide. Nehmen wir an, daß ABM Seitenebene ist.

Ebenso ist von den Ebenen ADM und BCM wenigstens eine Seitenebene, sei dies die Ebene ADM.

Sind beide Projektionen Dreiecke, so sind sämtliche vier Ebenen Seitenebenen, unser Körper ist dann die Pyramide mit Spitze M über $ABCD$. Sei also etwa die Projektion in Richtung AB ein echtes Viereck und Q das Urbild der vierten Ecke (Fig. 6). Q ist eindeutig bestimmt, weil nach 7. keine zwei Gegenecken eines Projektionsvierecks Urbild einer Strecke sein können. Weil ABM und ADM Seitenebenen sind, trifft die Gerade MQ die Ebene e innerhalb oder auf dem Rande der von den beiden Halbgeraden AB und AD begrenzten Viertelebene. Sei R der Schnittpunkt.

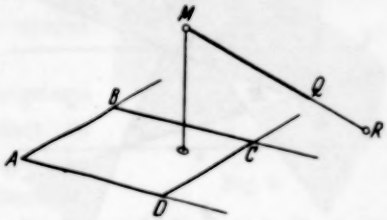

Fig. 6.

Projizieren wir jetzt in der Richtung der Kante MQ, und wählen e als Projektionsebene, so werden B, A und D Ecken der Projektion, ebenso R als Projektion der Kante MQ. Da R Projektion einer Kante ist, kann die Projektion keine weiteren Ecken haben. R liegt deshalb nicht zwischen den Trägergeraden von zwei Gegenseiten des Parallelogramms, sonst würde C außerhalb des Vierecks $ABRD$ liegen. Die Ebenen MQB und MQD sind also Seitenebenen des Körpers (sie sind die Urbilder der Projektionskanten BR und DR).

Die Ebene durch MQ parallel zu AD schneidet e in der Parallelen durch R zu AD, enthält also außer der Strecke MQ keine Punkte des Körpers. Bei der Projektion in der Richtung AD werden also die Strecken AD und BC und die Punkte M und Q Urbilder von Ecken der Projektion. Andere Ecken kann diese nicht haben, also ist die Ebene QBC Seitenebene des Körpers. Entsprechendes gilt für die Ebene QDC.

Von der konvexen Hülle der Strecke MQ und des Parallelogramms sind also sämtliche Seitenebenen auch Seitenebenen unseres Körpers, dieser ist mit der konvexen Hülle identisch.

Fall B ist damit vollständig behandelt, hier ist der Körper entweder eine vierseitige Pyramide oder die konvexe Hülle einer Strecke und eines Parallelogramms. Unter welchen Bedingungen eine solche konvexe Hülle lauter Fünfeckprojektionen hat, soll später erörtert werden (vgl. § 3).

13. Wenden wir uns jetzt Fall C zu! Das Viereck $ABCD$ in der Ebene e sei ein Begrenzungsviereck des Körpers, die Seiten AB und CD seien nicht parallel. Es gibt dann eine Viereckseite, etwa die Seite BC, in deren Endpunkten das Viereck parallele Stützgeraden hat (vgl. Fig. 7). Ist $\mathfrak{a}$ ein Vektor in der Richtung der parallelen Stützgeraden in B und C, so gibt es nach 1. zu $\mathfrak{a}$ beliebig benachbarte Projektionsrichtungen für die die vier Punkte B, A, D, C Ecken der Projektion liefern.

Projiziert man also in der Richtung $\mathfrak{a}$, so kann es außer der Projektion des Vierecks — die natürlich eine Strecke wird — nur noch höchstens eine Projektionsecke geben. Denn gäbe es mehr, so hätten die Projektionen in benachbarten Richtungen Ecken in deren Nähe, und unter diesen gäbe es dann solche, die mindestens sechs Ecken hätten.

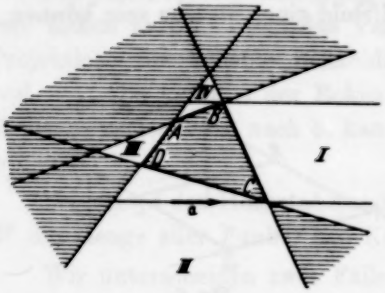

Fig. 7.

Die Projektion unseres Körpers in der Richtung $\mathfrak{a}$ ist also ein Dreieck; wäre sie eine Strecke, so wäre der Körper mit dem Viereck $ABCD$ identisch und dieser Fall braucht nicht weiter betrachtet zu werden. Dasselbe gilt für jede zu $\mathfrak{a}$ benachbarte Projektionsrichtung der Ebene e.

Betrachten wir jetzt wieder die Menge M der Punkte des Körpers, die von e maximale Entfernung haben. M ist hier ein Punkt, denn sonst wären die eben erwähnten Projektionen (wenn M eine Strecke ist, eventuell bis auf eine) keine Dreiecke, sondern Vierecke mit zwei parallelen Seiten, wie in **11.**

Wir untersuchen jetzt die Pyramide $MABCD$ und machen von ihr wie im Falle A ein Projektionsdiagramm. Als Projektionsebene wählen wir die Ebene e, die Projektionsrichtung wird dargestellt durch die Projektion M^* von M. Nur die Projektionsrichtungen parallel zu e sind dabei zunächst ausgeschlossen, man kann sie aber durch uneigentliche Punkte von e dargestellt denken.

Die Projektion unserer Pyramide ist die konvexe Hülle der fünf Punkte A, B, C, D, M^*, sie ist also ein echtes Fünfeck, wenn M^* in dem nicht schraffierten Teil der Figur liegt.

Für Projektionsrichtungen parallel zu e ist M einziges Urbild einer Projektionsecke des Körpers, also auch für genügend benachbarte Richtungen. Liegt M^* also in der Richtung $\mathfrak{a}$ genügend weit nach rechts, so hat die Projektion unseres Körpers die Ecken A, B, C, D, M^*, ist also mit der Projektion der Pyramide identisch. Wie in **10.** folgert man daraus, daß für alle Punkte M^* in dem Bereiche I die Projektionen beider Körper identisch sind

Da der Bereich I von den Geraden AB, BC und CD begrenzt wird, folgt wie in **10.**, daß unser Körper von den Seitenflächen MAB, MBC und MCD der Pyramide begrenzt wird.

Ist nun AD nicht parallel zu BC, so kann man dieselbe Betrachtung auch für den Bereich II anstellen, dann folgt, daß auch MAD unseren Körper begrenzt. Der Körper ist dann mit der Pyramide $MABCD$ identisch.

Es bleibt also nur der Fall zu betrachten, in dem $AD \parallel BC$ (Fig. 8). Wandern wir jetzt mit M^* in den Punkt C, so wird die Projektion von Körper und Pyramide das Viereck $ABCD$, C ist dabei Projektion der Kante MC. Sind die Urbilder von A, B, D jetzt immer noch eindeutig bestimmt, so kann man das Verfahren aus **7.** anwenden, wie in **10.** findet man, daß auch für alle Lagen von M^* in II die Projektionen von Körper und Pyramide zusammenfallen. Da II auch von der Geraden AD begrenzt wird, ist MAD Begrenzungsebene des Körpers und dieser wieder mit der Pyramide identisch.

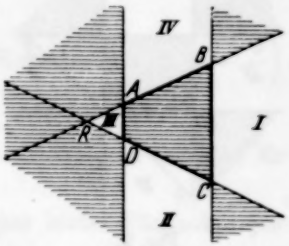

Fig. 8.

Wir können also annehmen, daß wenigstens einer der Punkte A, B, D Projektion einer zu MC parallelen Strecke ist. Für A als Gegenecke von C ist das nach **7.** unmöglich, für B ebenfalls, weil die Projektion dieser Strecke in der Richtung MB außerhalb des zu dieser Richtung gehörigen Projektionsvierecks $ABCD$ fallen würde, es muß also D Projektion einer zu MC parallelen Körperkante CQ sein.

Nun ist aber in diesem Falle $MCDQ$ Begrenzungsviereck des Körpers und kein Parallelogramm, denn Q muß näher als M bei e liegen. Von der Ebene dieses Vierecks hat der Punkt B des Körpers die größte Entfernung, denn die Projektion in der Richtung MC ist das Viereck $ABCD$.

Wenden wir auf dieses neue Begrenzungsviereck dieselben Schlüsse an wie zuerst auf $ABCD$, so finden wir, daß unser Körper von den Ebenen MCB, BCD und BMQ begrenzt wird.

Nun ging aber durch die Kante BM schon die Seitenebene BMA, diese ist also mit BMQ identisch, so daß Q in der Ebene BMA liegen muß. Die Strecke MQ geht also durch den Schnittpunkt R von AB und CD. Projizieren wir jetzt in der Richtung AD, so werden M und Q und die Kanten AD und BC Urbilder von Ecken der Projektion, da diese keine weiteren Ecken haben kann, ist auch QAD Seitenebene unseres Körpers.

Unser Körper ist also mit dem dreiseitigen Pyramidenstumpf $MBCQAD$ identisch. Umgekehrt hat jeder dreiseitige Pyramidenstumpf mit parallelen Gegenflächen lauter Fünfeckprojektionen.

Fassen wir jetzt unsere Ergebnisse in den Fällen A, B, C zusammen, so ergibt sich in der Tat die Aussage des Fünfecksatzes.

§ 3.

Sechsecke mit lauter Fünfeckprojektionen.

14. Fragen wir uns jetzt noch, unter welchen Bedingungen die konvexe Hülle eines Parallelogramms $ABCD$ und einer Strecke PQ lauter Fünfeckprojektionen hat. Da eine Projektion parallel zur Parallelogrammebene stets ein Viereck ist, kann man die Parallelogrammebene als Projektionsebene wählen, die Projektion ist dann die konvexe Hülle von Parallelogramm und Streckenprojektion.

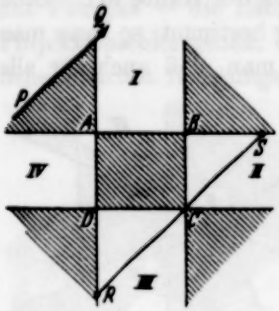

Fig. 9.

Fragen wir uns also zunächst, wann die konvexe Hülle einer Strecke P_1Q_1 und eines Parallelogramms $ABCD$ in einer Ebene ein echtes Sechseck ist. Da die Fragestellung affin invariant ist, dürfen wir das Parallelogramm der Einfachheit halber als Rechteck zeichnen (Fig. 9).

Offenbar kann die Projektion nur dann ein Sechseck werden, wenn P_1 und Q_1 beide in dem nicht schraffierten Teil der Figur liegen. Wir haben nun verschiedene Möglichkeiten für die Lage von P und Q.

α) Liegen P_1 und Q_1 in demselben der vier Bereiche I, II, III, IV, so wird die Hülle nur dann kein Sechseck, wenn die Streckengerade das Parallelogramm trifft.

β) Liegen P_1 und Q_1 in gegenüberliegenden Bereichen, etwa P_1 in I und Q_1 in III, so ist die Hülle stets ein Sechseck.

γ) Liegen P_1 und Q_1 in benachbarten Bereichen, etwa P_1 in II und Q_1 in III, so ist die Hülle nur dann ein Sechseck, wenn die Strecke das Parallelogramm nicht trifft.

Wir betrachten jetzt zwei Möglichkeiten:

a) Die Strecke PQ ist zur Parallelogrammebene parallel.

b) Die Gerade PQ trifft die Parallelogrammebene in einem Punkte R.

15. Im Falle a) ist die Projektion P_1Q_1 von PQ stets parallel zum Urbild und gleich lang, umgekehrt kann jede Strecke dieser Art als Projektion von PQ aufgefaßt werden. Wir erhalten also sämtliche Projektionsmöglichkeiten, wenn wir eine Strecke P_1Q_1 mit $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P_1Q_1}$ in der Parallelogrammebene herumschieben.

Sei nun

$$\overrightarrow{PQ} = a \cdot \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{AD}. \tag{1}$$

Sechseckprojektionen in den Lagen α) und β) können dann nur dann nicht vorkommen, wenn

$$|a| \geqq 1, \quad |b| \geqq 1. \tag{2}$$

Um festzustellen, wann es Sechseckprojektionen in der Lage γ) gibt, ziehen wir durch C (gegebenenfalls müßte man B oder D wählen) eine Parallele zu PQ und schneiden sie mit AD und AB, R und S seien die Schnittpunkte. Offenbar kann man nur dann die Projektion P_1Q_1 so weit hereinschieben, daß sie das Rechteck trifft, wenn RS größere Länge hat als PQ.

Nun hat die Gerade RS in dem Koordinatensystem mit Ursprung A und Basisvektoren AB und AD die Gleichung

$$\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{b}.$$

S hat also die Koordinaten $\left(1 - \frac{a}{b}, 0\right)$ und R die Koordinaten $\left(0, 1 - \frac{b}{a}\right)$. Daraus folgt aber, daß $\overline{RS} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\overline{PQ} = \left(\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|}\right)\overline{PQ}$.

Bei anderer Vorzeichenverteilung von a und b erhält man dasselbe Ergebnis.

Notwendig und hinreichend, damit unser Körper lauter Fünfeckprojektionen hat, ist die Bedingung

$$\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} \leqq 1. \tag{3}$$

(2) ist dann nämlich von selbst erfüllt.

16. Im Falle b) liegt R, wie wir in **12.** gesehen haben, in einem der schraffierten Teile der Fig. 10, nehmen wir an in dem Teil bei D, wie gezeichnet. R gehört nicht zur Strecke, nehmen wir an, daß P zwischen R und Q liegt.

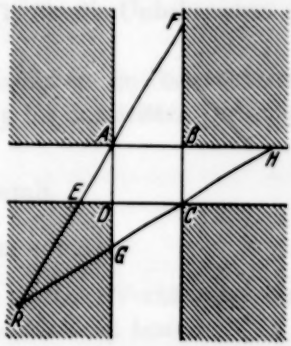

Fig. 10.

Offenbar geht für jede Projektionsrichtung die Gerade P_1Q_1 durch R und ist

$$\frac{\overline{RP}}{\overline{RQ}} = \frac{\overline{RP_1}}{\overline{RQ_1}}.$$

Die Projektionsrichtung kann so gewählt werden, daß P_1Q_1 längs einer beliebigen Geraden durch R fällt.

Wir ziehen jetzt RA und RC und bestimmen die Schnittpunkte E, F, G, H. Nur dann hat nun auf den Geraden zwischen RF und RH eine Projektion P_1Q_1 keinen Platz und ist eine Sechseckprojektion in der Lage γ) unmöglich, wenn

$$\frac{\overline{RG}}{\overline{RH}} \geqq \frac{\overline{RP}}{\overline{RQ}}, \qquad \frac{\overline{RE}}{\overline{RF}} \geqq \frac{\overline{RP}}{\overline{RQ}}. \tag{4}$$

Offenbar sind dann auch die Lagen α) und β) unmöglich, so daß die Bedingungen (4) notwendig und hinreichend sind.

Liegt Q zwischen R und P, so erhält man entsprechend die Bedingungen

$$(5) \qquad \frac{\overline{RG}}{\overline{RH}} \geqq \frac{\overline{RQ}}{\overline{RP}}, \qquad \frac{\overline{RE}}{\overline{RF}} \geqq \frac{\overline{RQ}}{\overline{RP}}.$$

Anschaulicher wird das Ergebnis, wenn man sich einmal den Schnittpunkt R, die hindurchgehende Trägergerade g der Strecke, und auf ihr einen Endpunkt P der Strecke vorgegeben denkt. Aus (4) und (5) folgt dann, daß die konvexe Hülle von Strecke und Parallelogramm dann und nur dann lauter Fünfeckprojektionen hat, wenn der zweite Endpunkt Q der Strecke liegt außerhalb eines Intervalls ST auf g, das P enthält und R nicht.

Hat die kleinste der beiden Zahlen $\frac{\overline{RG}}{\overline{RH}}$ und $\frac{\overline{RE}}{\overline{RF}}$ den Wert k, so ist offenbar

$$\frac{\overline{RS}}{\overline{RP}} = \frac{\overline{RP}}{\overline{RT}} = k.$$

(Eingegangen am 30. November 1941.)

Über eine gewisse Klasse von Strömungen zäher Flüssigkeiten und eine Kennzeichnung der Poiseuille-Strömung.

Von

H. Görtler und K. Wieghardt in Göttingen.

Die Strömungen zäher Flüssigkeiten genügen den Navier-Stokesschen Impulserhaltungsgleichungen, welche in der Vektorgleichung

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = -\operatorname{grad}\left(\frac{p}{\varrho} + V\right) + \nu \Delta \mathfrak{w} \tag{1}$$

zusammengefaßt werden, und der Massenerhaltungsgleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{w} = 0 \tag{2}$$

($\mathfrak{w}$ Geschwindigkeitsvektor, p Druck, ϱ konstante Dichte, ν kinematische Zähigkeit, V Potential der äußeren Kräfte $\mathfrak{K} = -\operatorname{grad} V$, t Zeit).

Wir betrachten im folgenden *ebene* und *stationäre* Strömungen. Man pflegt die Kontinuitätsgleichung (2) durch Einführung der Stromfunktion ψ zu erfüllen, welche unter Zugrundelegung rechtwinkliger cartesischer Koordinaten x, y durch

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2a}$$

definiert ist. Darin sind u und v die Komponenten von $\mathfrak{w}$ in x- bzw. y-Richtung. Man hat es dann nur noch mit den Gleichungen (1) für die Unbekannten ψ und p zu tun.

Wir wollen voraussetzen, daß die Geschwindigkeit im betrachteten Bereich stetige partielle Ableitungen nach x und y bis zur dritten Ordnung einschließlich besitze.

Schreibt man (1) mit $\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t} = 0$ um in die Gestalt

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\mathfrak{w}^2}{2} + \frac{p}{\varrho} + V\right) = \mathfrak{w} \times \operatorname{rot} \mathfrak{w} + \nu \Delta \mathfrak{w}, \tag{1a}$$

so erkennt man unmittelbar, daß dann besonders einfache Verhältnisse eintreten, wenn *die Reibungskräfte $\nu \Delta \mathfrak{w}$ ein skalares Potential besitzen*:

$$\Delta \mathfrak{w} = -\operatorname{grad} H. \tag{3}$$

Man kann dann nämlich durch skalare Multiplikation von (1a) mit $\mathfrak{w}/|\mathfrak{w}|$ und Integration längs Stromlinien eine Bernoulli-Gleichung der Form

$$\frac{\mathfrak{w}^2}{2} + \frac{p}{\varrho} + V + \nu H = f(\psi) \tag{4}$$

gewinnen, worin f auf Stromlinien konstant ist.

Einige Klassen solcher Strömungen sind bekannt. Als triviale Beispiele seien die *Potentialströmungen* zäher Flüssigkeiten und die allgemeinere, diese Klasse umfassende Gesamtheit der *Strömungen mit konstanter Drehung* genannt (H = const). Darüber hinaus ist nur der Fall der *Poiseuille-Strömung* bekannt, wo H eine ganze lineare Funktion der Ortskoordinaten wird: $H = ax + by + c$.

Es entsteht somit die Frage, ob es noch weitere Strömungen gibt, die der Zusatzforderung (3) genügen, oder ob die eben genannten Beispiele bereits die Gesamtheit der Strömungen darstellen, für welche die Reibungskräfte ein skalares Potential besitzen.

Um das Ergebnis vorwegzunehmen: Die durch (3) abgegrenzte Klasse zäher Strömungen ist in der Tat durch die eben genannten Fälle erschöpft. *Es ist also die Poiseuille-Strömung die einzige (ebene, stationäre) Strömung zäher Flüssigkeiten, für welche die Reibungskräfte ein nicht konstantes skalares Potential besitzen.* Für diese merkwürdige Kennzeichnung der Poiseuille-Strömung soll im folgenden ein einfacher Beweis gegeben werden.

Wir bemerken zunächst, daß nach (3) und (2 a)

$$\Delta \psi_y = -H_x, \quad \Delta \psi_x = H_y \tag{5}$$

gilt. Es ist also $\Delta \psi + iH = w(x + iy)$ eine analytische Funktion von $z = x + iy$, und ψ selbst ist eine reguläre biharmonische Funktion:

$$\Delta \Delta \psi = 0. \tag{6}$$

Durch Einsetzen von (4) in (1a) erhält man

$$\begin{aligned} \mathfrak{w} \times \operatorname{rot} \mathfrak{w} &= \operatorname{grad} f(\psi) \\ &= f'(\psi) \operatorname{grad} \psi. \end{aligned}$$

Nun gilt andererseits nach Definition der Stromfunktion

$$\mathfrak{w} \times \operatorname{rot} \mathfrak{w} \equiv \Delta \psi \cdot \operatorname{grad} \psi.$$

Also folgt, solange grad $\psi \neq 0$,

$$\Delta \psi = f'(\psi). \tag{7}$$

Kennt man irgendwelche Lösungen ψ und $f(\psi)$ gemäß (6) und (7), so kann man aus der Bernoulli-Gleichung (4) den Druck berechnen und hat damit die hydrodynamischen Grundgleichungen (1) und (2) erfüllt.

Unsere Fragestellung reduziert sich somit auf das Problem, die Gesamtheit der Lösungen ψ und $f(\psi)$ des Systems

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= f'(\psi) \\ \Delta \Delta \psi &= 0 \end{aligned} \tag{*}$$

zu ermitteln.

1. Die trivialen Lösungen.

a) $f(\psi) = a = \text{const}$. Dann ist $\Delta\,\psi = 0$, die biharmonische Funktion ψ ist also speziell eine harmonische, die zugehörigen Strömungen sind die Potentialströmungen zäher Flüssigkeiten.

b) $f(\psi) = a + b\,\psi$ (a, b konstant, $b \neq 0$). Es liegt die Gesamtheit der Strömungen mit nichtverschwindender konstanter Rotation vor: $\Delta\,\psi = b$. Zu dieser Klasse gehört insbesondere als bekannteste die *Couette-Strömung*. Allgemein ist $\psi = P_2(x, y) + \psi_p$, wo P_2 ein Polynom 2. Grades in x, y und ψ_p eine reguläre Potentialfunktion bezeichnen.

Wenn wir die Gesamtheit der Lösungen, für welche $f''(\psi) \equiv 0$ ist, als „triviale" Lösungen unseres Problems bezeichnen, ist mit den genannten linear superponierbaren Lösungen die Klasse der trivialen Lösungen ausgeschöpft.

2. Der nicht-triviale Fall.

Durch Einsetzen von (7) in (6) folgt allgemein

$$\Delta\,f'(\psi) = 0, \tag{8}$$

also durch einfaches Ausrechnen:

$$\Delta\,f'(\psi) = (\psi_x^2 + \psi_y^2)\,f'''(\psi) + f''(\psi)\,\Delta\,\psi = 0.$$

Sieht man vom „trivialen" Fall $f''(\psi) \equiv 0$ (also auch von $\Delta\,\psi \equiv 0$) ab, so verschwindet demnach auch $f'''(\psi)$ nicht identisch. Wegen $\psi_x^2 + \psi_y^2 = \mathfrak{w}^2$ und $\Delta\,\psi = f'(\psi)$ ergibt sich dann

$$\mathfrak{w}^2 = -\frac{f'(\psi)\,f''(\psi)}{f'''(\psi)}, \tag{9}$$

d. h. *die Geschwindigkeit ist auf den einzelnen Stromlinien* $\psi = \text{const}$ *dem Betrage nach konstant.* Auf Grund der Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div}\mathfrak{w} = 0$ *haben also je zwei infinitesimal benachbarte Stromlinien des Stromlinienfeldes konstanten Normalabstand.*

Ferner kann wegen $\Delta\,\psi = f'(\psi)$ geschlossen werden, daß $|\operatorname{rot}\mathfrak{w}| = |f'(\psi)|$, d. h. *auch die Rotation ist auf den einzelnen Stromlinien konstant.* Da $\Delta\,\psi + iH$ eine analytische Funktion von $x + iy$ darstellt, bilden somit die *Linien* $H = \text{const}$ *in der Strömungsebene die Orthogonaltrajektorien der Stromlinien* $\psi = \text{const}$.

Es ist nun leicht, den direkten Beweis unserer Behauptung zu erbringen. Wir können es uns aber noch besonders bequem machen, indem wir auf eine sehr bekannte Untersuchung von G. Hamel[1]) zurückgreifen. In dieser Abhandlung gibt Hamel die erschöpfende Antwort auf folgende Frage: Gibt es sta-

[1]) G. Hamel, Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung XXV (1917), S. 34–60.

tionäre Lösungen der hydrodynamischen Grundgleichungen zäher inkompressibler Flüssigkeiten, bei denen die Stromlinien die gleichen sind wie bei einer Potentialströmung, während die Geschwindigkeitsverteilung eine andere ist?

Offenbar handelt es sich bei unserem Problem, in welchem sich die Stromlinien $\psi = \text{const}$ der zähen Flüssigkeit mit den Stromlinien $\Psi = \Delta\,\psi = \text{const}$ einer Potentialströmung ($\Delta\,\Psi = \Delta\,\Delta\,\psi = 0$) decken, nur noch darum, unter den Lösungen des Hamelschen Problems diejenigen auszusondern, die auch noch den weiteren Forderungen unseres Problems gerecht werden. Da die Stromlinien $\psi = \text{const}$ der von uns gesuchten Strömungen konstanten, auf den Orthogonaltrajektorien gemessenen Abstand besitzen sollen, kommen jedenfalls die Hamelschen Strömungen längs logarithmischer Spiralen sowie der Grenzfall reiner Radialströmungen hier in Fortfall. Es bleiben nur noch näher zu betrachten die übrigen Hamelschen Grenzfälle: a) Die Stromlinien sind konzentrische Kreise, b) die Stromlinien sind parallele Geraden.

a) Was den ersten dieser verbleibenden Fälle betrifft, so erhält man in Polarkoordinaten r, φ als Lösung von $\Delta\,\Delta\,\psi = 0$:

$$\psi = A \ln r + B + r^2 (C \ln r + D). \tag{10}$$

Für $C = 0$ liegt die Couette-Strömung zwischen koaxialen rotierenden Zylindern vor, also eine der hier nicht in Betracht kommenden trivialen Lösungen unseres Problems. Für $C \neq 0$ liefert dagegen (10) eine Lösung des mathematischen Problems (*) der gesuchten Art. Allein aus Gründen der *physikalischen* Realisierbarkeit müssen wir sie ausscheiden, da sie, worauf ebenfalls schon Hamel hingewiesen hat, eine Vieldeutigkeit des Drucks beim Umlaufen der singulären Stelle $r = 0$ liefert. Dies erkennt man in unserer Darstellungsweise unmittelbar aus der Bernoulli-Gleichung (4), denn wegen $\Delta\,\psi = 4\,(C + D) + 4\,C \ln r$ ist der Imaginärteil H der analytischen Funktion $\Delta\,\psi + iH = w(x + iy)$ durch

$$H = 4\,C\,\varphi + \text{const}$$

gegeben.

b) Es bleibt also nur der Fall geradlinig-paralleler Stromlinien. Setzen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\psi = \psi(y)$, so wird wegen $\psi^{IV}(y) = 0$

$$\psi = \frac{a}{3!}\,y^3 + \frac{b}{2!}\,y^2 + c\,y + d. \tag{11}$$

Die hierdurch gegebene Strömung mit parabolischem Geschwindigkeitsprofil $u = \psi_y$, $v = 0$ ist die bekannte *Poiseuille-Strömung*. Es wird $f' = a\,y + b$, und f' als Funktion von ψ ergibt sich als Wurzel einer kubischen Gleichung.

Damit ist die oben behauptete und zunächst überraschende Kennzeichnung der Poiseuille-Strömung vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 25. Dezember 1941.)

Zur eindeutigen Lösbarkeit der potentialtheoretischen Randwertaufgaben bei nichtbeschränkten Randwerten.

Von

Karl Maruhn, Berlin.

I. Einleitung.

Bereits PLEMELJ [1]) gelang es, die Existenz von Lösungen der zweiten und dritten potentialtheoretischen Randwertaufgabe (nur mit diesen werden wir uns hier beschäftigen) mit Hilfe von Integralgleichungen für stetig gekrümmte Berandungen auch dann zu beweisen, wenn die Randfunktion f nicht notwendig beschränkt, aber absolut integrierbar ist; es war von dieser im übrigen lediglich zu verlangen, daß man mit ihr als Belegung ein überall auf dem Rand stetiges Potential der einfachen Schicht bilden kann. Ist diese Bedingung erfüllt, so nehmen im allgemeinen die Ausdrücke $\frac{\partial u}{\partial n}$ bzw. $\frac{\partial u}{\partial n} + hu$ mit u als gesuchter Lösung und h als bekannter, absolut integrierbarer, ebenfalls nicht notwendig beschränkter Funktion bei Annäherung an die Berandung in allen Endlichkeitspunkten von f und h die vorgeschriebenen Werte an.

Merkwürdigerweise wurde die Frage der Unität von PLEMELJ und später auch von CARLEMAN [2]), der die PLEMELJschen Betrachtungen auf Berandungen mit Ecken (bzw. Kanten) erweiterte, nur auf Grund der GREENschen Formeln behandelt, die aber im Falle nichtbeschränkter Randwerte keineswegs mehr gültig zu sein brauchen, so daß daher neben dem ansatzmäßig eingeführten Potential der einfachen Schicht noch weitere Lösungen existieren könnten [2a]). Soweit mir bekannt ist, sind auch später keine den PLEMELJschen Existenzsätzen entsprechenden allgemeinen Einzigkeitsuntersuchungen durchgeführt worden [3]).

---

[1]) J. PLEMELJ, Über lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie I, II. Monatshefte für Math. u. Phys. 15 (1904), S. 337–411; 18 (1907), S. 180–211; ferner vgl. E. PICARD, Rend. del Circ. Mat. di Palermo 22 (1906), S. 241–259.

[2]) T. CARLEMAN, Über das NEUMANN-POINCARÉsche Problem für ein Gebiet mit Ecken. Inaug.-Diss. Upsala 1916.

[2a]) Vgl. K. MARUHN, Einige Bemerkungen zu den Randwertaufgaben der Potentialtheorie Sitz.ber. d. Berliner Math. Ges. 40. (Erscheint demnächst.) Dort wird an einem Beispiel gezeigt, daß dieser Fall tatsächlich eintreten kann.

[3]) Für die zweite Randwertaufgabe beim Kreis liegt eine noch unveröffentlichte Untersuchung von H. SÖHNGEN vor; die Randwerte werden dort als quadratisch integrierbar angenommen.

Im folgenden soll ein Anfang damit gemacht werden, diese Lücke zu schließen, indem wir folgende Frage zu beantworten suchen: *Gegeben sei in der Ebene oder im Raume ein endlicher Bereich T, dessen Berandung S stetig gekrümmt sei*[4]*. Auf letzterer ist (spezieller als bei* PLEMELJ*) eine absolut integrierbare Funktion f gegeben, die an endlich vielen Stellen nicht notwendig beschränkt, im übrigen aber stetig ist und der die Ausdrücke $\frac{\partial u}{\partial n}$ bzw. $\frac{\partial u}{\partial n} + hu$ bei Annäherung an S zustreben sollen, unter h eine weitere, wie f beschaffene Randfunktion*[5] *verstanden. Welchen zusätzlichen Bedingungen muß die Lösung u der zweiten und dritten potentialtheoretischen Randwertaufgabe unterworfen sein, damit es im Rahmen dieser Einschränkungen unter den obengenannten Voraussetzungen über die Randfunktionen f und h höchstens eine einzige Lösung geben kann?*

Es sollen hier zwei Wege beschritten werden, um zu solchen Bedingungen für u zu gelangen. Im Abschnitt II werden diese so gestaltet, daß die GREENschen Formeln auch jetzt noch gültig bleiben. In III, wo nur das zweidimensionale Problem behandelt wird, wird das zweite Randwertproblem auf das erste für die konjugierte Potentialfunktion $\bar{u}$ zurückgeführt, und es muß demgemäß u so beschaffen sein, daß letzteres in einer einzigen Weise lösbar ist; so ergibt sich für das zweite Randwertproblem und unter den gleichen Annahmen auch für das dritte zwangsläufig die Darstellbarkeit von u als Potential einer einfachen Schicht. — Der erste Weg führt auf Forderungen, denen u im Innern von T in der Nähe des Randes genügen muß, während der zweite im wesentlichen ein gewisses Randverhalten von u festlegt; gerade der letztere Fall ist für manche Anwendungen[6] nützlich. In jedem Fall ist natürlich noch zu prüfen, ob die PLEMELJsche Lösung diesen Bedingungen genügt. — Im Abschnitt IV wird schließlich ein zweiter Beweis für eine wichtige, schon in III behandelte Stetigkeitseigenschaft des Potentials einer einfachen Schicht mit nichtbeschränkter Belegungsdichte gegeben, der sich aber diesmal ohne Mühe auch auf den Raum übertragen läßt. — Es sei bemerkt, daß allen Betrachtungen der RIEMANNsche Integralbegriff zugrunde liegt.

In diesem Zusammenhang will ich noch auf Einzigkeitsbetrachtungen hinweisen, die bei allgemeineren Problemstellungen durchgeführt wurden. Einem Hinweis PLEMELJs folgend[7] verallgemeinerten EVANS, MILES und

---

[4]) Es kann auch eine endliche Anzahl Ecken bzw. Kanten zugelassen werden; ferner lassen sich die Betrachtungen auch auf nichtbeschränkte Bereiche T übertragen.

[5]) Um die Betrachtungen zu vereinfachen, nehmen wir in Teil II h als durchweg stetig an; doch bieten eine endliche Zahl von Unendlichkeitsstellen keine neuen methodischen Schwierigkeiten (vgl. II c).

[6]) Solche finden sich in meiner l. c. [2a]) genannten Arbeit.

[7]) J. PLEMELJ, Potentialtheoretische Untersuchungen, Leipzig 1911; insbesondere S. 43f.

GARRET[8]) das zweite Randwertproblem dahin, daß an Stelle der Randwerte von $\frac{\partial u}{\partial n}$ das Integral darüber (d. h. der Fluß) als Randfunktion eingeführt wurde: z. B. in der Ebene: $\int_{s_0}^{s} \frac{\partial u}{\partial n} ds' =$ gegebene Funktion f. Die Lösung ergibt sich auch hier als ein Potential der einfachen Schicht, das jetzt aber als Stieltjes-Integral auftritt; sie ist unter gewissen, sehr allgemeinen Bedingungen, die weiter als die im folgenden von mir angegebenen reichen, auch die einzige. Bei diesen Betrachtungen mußte jedoch der RIEMANNsche Integralbegriff verlassen werden, und es zeigt sich demgemäß bei Zurückführung auf unser Problem, daß dessen Randbedingungen nur in „fast allen" Punkten erfüllt sind, wobei sich über die Lage der Ausnahmepunkte nichts aussagen läßt. Da gerade dieser Umstand bei Anwendungen störend ist, scheint es nützlich zu sein, die PLEMELJsche Problemstellung, nur vom RIEMANNschen Integral ausgehend, hinsichtlich der Einzigkeit zu behandeln, zumal die Betrachtungen wegen der speziellen Annahmen sehr einfach sind und sich leicht auch auf das bei den obengenannten Autoren nicht behandelte dritte Randwertproblem ausdehnen lassen. – Andere Verallgemeinerungen des zweiten Randwertproblems, die aber ebenfalls unser Problem nicht umfassen, betrachtet CIMMINO[9]), indem er gewisse Integralmittelwerte von $\left(\int_{s_0}^{s} \frac{\partial u}{\partial n} ds' - f\right)$, erstreckt über geeignet definierte Nachbarflächen, bei Annäherung an den Rand verschwinden läßt.

II. Unitätssätze, die auf der Greenschen Formel beruhen.

a) Zweite Randwertaufgabe.

Vorgelegt sei im Raume ein von einer einzigen geschlossenen, stetig gekrümmten JORDANschen Fläche S berandetes endliches Gebiet T. Auf S sei eine Funktion $f(\sigma)$ gegeben, die an endlich vielen Stellen nicht notwendig beschränkt zu sein braucht, im übrigen aber stetig verläuft und in jedem

---

[8]) S. C. EVANS, The Logarithmic Potential, Discontinuous DIRICHLET and NEUMANN Problems. New York 1927. Ferner z. B. S. C. EVANS and E. R. C. MILES, Potentials of general masses in single and double layers. The relative boundery value problems. American Journal of Math. **53** (1931), S. 493–516. G. A. GARRET, Necessary and sufficient conditions for potentials of single and double layers. American Journal of Math. **58** (1936), S. 95–129.

[9]) G. CIMMINO, Nuovo tipo di condizione al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di DIRICHLET. Rend. Circ. matem. di Palermo **61** (1937), S. 177–220, insbes. S. 206.

abgeschlossenen Stetigkeitsintervall gleichmäßig eine Lipschitz-Bedingung[10]) (kurz L-Bedingung) befriedigt. Es existiere $\int_S |f(\sigma)|\, d\sigma$ und es sei

$$\int_S f(\sigma)\, d\sigma = 0 \quad (\sigma \text{ ein Punkt auf } S, d\sigma \text{ das Flächenelement}).$$

Weiterhin denken wir uns (vgl. Fig. 1) in T zu S die Schar der Parallelflächen S_δ (die die Bereiche T_δ beranden) gezogen, wobei δ den Abstand zwischen S und S_δ bedeutet ($S_0 = S$); für hinreichend kleine δ, etwa $\delta < \delta_0$, ist dies möglich. Ordnet man überdies diejenigen Punkte von S und S_δ, die auf der gleichen Normalen (n) zu S liegen, einander zu, so besteht eine umkehrbar eindeutige Abbildung zwischen S und S_δ. Es gilt nun der folgende

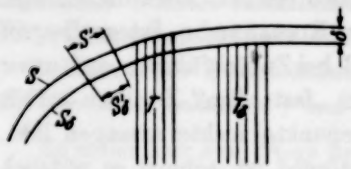

Fig. 1.

Unitätssatz: Es gibt (bis auf eine additive Konstante) höchstens eine in T reguläre, in $T+S$ dem Absolutbetrag nach beschränkte Lösung u der Gleichung $\Delta u = 0$, deren Ableitung in Richtung (n) der Innennormalen bei Annäherung an jedes abgeschlossene Stetigkeitsintervall von f auf S gleichmäßig gegen den vorgeschriebenen Wert $f(\sigma)$ konvergiert[11]) und für die bezüglich der Parallelkurven S_δ

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{S_\delta} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| d\sigma_\delta = \int_S |f(\sigma)|\, d\sigma \tag{1}$$

ist, unter $d\sigma_\delta$ das Flächenelement auf S_δ verstanden.

Beweis. Der Einfachheit halber nehmen wir eine einzige Stelle der Nichtbeschränktheit von $f(\sigma)$ an. Es möge etwa zwei Lösungen u_1 und u_2 geben und es sei $u_1 - u_2 = v$ mit

$$|v| < A \tag{2}$$

gesetzt. Es liege nun die Parallelkurve S_δ so nahe bei S, $\delta < \delta_1$, daß

$$\left| \int_{S_\delta} \left| \frac{\partial u_1}{\partial n} \right| d\sigma_\delta - \int_S |f|\, d\sigma \right|, \quad \left| \int_{S_\delta} \left| \frac{\partial u_2}{\partial n} \right| d\sigma_\delta - \int_S |f|\, d\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{8A} \tag{3}$$

---

[10]) D. h. für beliebige Punktepaare $(\sigma, \bar{\sigma})$ eines solchen Intervalls mit dem (auf S gemessenen) kürzesten Abstand $\delta_{\sigma\bar{\sigma}} < h_0$ besteht eine Ungleichung der Form $|f(\sigma) - f(\bar{\sigma})| < c\, \delta^{\varrho}_{\sigma\bar{\sigma}}$, ($c, \varrho, h_0$ konstant, $0 < \varrho < 1$).

[11]) Dann verhält sich $\frac{\partial u}{\partial n}$ beim Übergang auf ein solches Intervall stetig. Umgekehrt folgt aus dem stetigen Übergang auch die gleichmäßige Konvergenz.

ist, unter ε eine beliebig kleine, fest vorgegebene positive Zahl verstanden. Weiter grenzen wir um die Ausnahmestelle ein genügend kleines Intervall S' ab (vgl. Fig. 1), für das

$$\int_{S'} |f|\, d\sigma < \frac{\varepsilon}{8A} \tag{4}$$

gilt; sodann wird noch, unter S'_δ das zu S' entsprechende, durch die Normalen in den Endpunkten ausgeschnittene Stück der Parallelkurve S_δ verstanden, ein $\delta_2 > 0$ so gewählt, daß für alle $\delta < \delta_2$

$$\left| \int_{S_\delta - S'_\delta} \left|\frac{\partial u_1}{\partial n}\right| d\sigma_\delta - \int_{S-S'} |f|\, d\sigma \right|, \quad \left| \int_{S_\delta - S'_\delta} \left|\frac{\partial u_2}{\partial n}\right| d\sigma_\delta - \int_{S-S'} |f|\, d\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{8A} \tag{5}$$

ausfällt. Dann ist wegen (3), (4) und (5)

$$\int_{S'_\delta} \left|\frac{\partial u_1}{\partial n}\right| d\sigma_\delta = \int_{S_\delta} \left|\frac{\partial u_1}{\partial n}\right| d\sigma_\delta - \int_{S} |f|\, d\sigma - \int_{S_\delta - S'_\delta} \left|\frac{\partial u_1}{\partial n}\right| d\sigma_\delta + \int_{S-S'} |f|\, d\sigma + \int_{S'} |f|\, d\sigma < \frac{3\varepsilon}{8A}, \quad \int_{S'_\delta} \left|\frac{\partial u_2}{\partial n}\right| d\sigma_\delta < \frac{3\varepsilon}{8A}. \tag{6}$$

Ist noch für alle $\delta < \delta_3$

$$\int_{S_\delta - S'_\delta} \left|\frac{\partial v}{\partial n}\right| d\sigma_\delta < \frac{\varepsilon}{4A},$$

so bekommen wir wegen

$$\int_{S_\delta} \left|\frac{\partial v}{\partial n}\right| d\sigma_\delta = \int_{S'_\delta} + \int_{S_\delta - S'_\delta} \leqq \int_{S'_\delta} \left(\left|\frac{\partial u_1}{\partial n}\right| + \left|\frac{\partial u_2}{\partial n}\right| \right) d\sigma_\delta + \int_{S_\delta - S'_\delta} \left|\frac{\partial v}{\partial n}\right| d\sigma_\delta \tag{7}$$

mit Rücksicht auf (2) schließlich

$$\left| \int_{S_\delta} v \frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma_\delta \right| < \varepsilon, \qquad (\delta < \operatorname{Min}(\delta_1, \delta_2, \delta_3)), \tag{8}$$

woraus unter Beachtung der auf T_δ angewendeten Greenschen Formel

$$\int_T \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right\} d\tau = \lim_{\delta \to 0} \int_{T_\delta} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right\} d\tau_\delta = 0 \tag{9}$$

($d\tau$, $d\tau_\delta$ die Volumenelemente in T, T_δ)

folgt; damit ist die Einzigkeit bewiesen [12]).

---

[12]) Die Anwendung von Parallelkurven bei Behandlung der Greenschen Formeln, allerdings für durchweg stetige Normalableitung auf dem Rande, findet sich meines Wissens zuerst bei A. Liapounoff, Journ. de Math. (5) 4 (1898), S. 241–311.

b) Dritte Randwertaufgabe.

Wie in IIa) sei wieder der Bereich $T + S$ vorgelegt und auf S eine absolut integrierbare Funktion $f(\sigma)$ gegeben, die an endlich vielen Stellen nicht beschränkt zu sein braucht, im übrigen aber stetig ist und in jedem abgeschlossenen Stetigkeitsintervall gleichmäßig einer L-Bedingung genügt; ferner möge auf S noch eine weitere, dort durchweg stetige und nirgends positive Funktion $h(\sigma)$ erklärt sein ($h \not\equiv 0$). Wir betrachten wieder für $\delta < \delta_0$ die Schar der Parallelflächen S_δ und erklären auf jeder von diesen eine Funktion $h_\delta(\sigma_\delta)$ durch die Festsetzung, daß in zusammengehörigen (d. h. auf der gleichen Normalen zu S liegenden) Punkten

$$h_\delta(\sigma_\delta) = h(\sigma) \tag{10}$$

sein soll. Nunmehr gilt der

Unitätssatz. Es gibt höchstens eine in T reguläre, in $T + S$ dem Absolutbetrag nach beschränkte Lösung der Gleichung $\Delta u = 0$, die so beschaffen ist, daß bei Annäherung an jedes abgeschlossene Stetigkeitsintervall von f auf S $\frac{\partial u}{\partial n} + h_\delta u$ gleichmäßig gegen den Wert $f(\sigma)$ konvergiert und daß

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{S_\delta} \left| \frac{\partial u}{\partial n} + h_\delta u \right| d\sigma_\delta = \int_S |f(\sigma)|\, d\sigma \tag{11}$$

gilt[13]).

---

[13]) Die Existenz des Grenzwertes (11) ist z. B. gesichert, wenn

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{S_\delta} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| d\sigma_\delta = \int_S \left| \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_S \right| d\sigma \quad \text{und} \quad \lim_{\delta \to 0} \int_{S_\delta} |u|\, d\sigma_\delta = \int_S |(u)_S|\, d\sigma \tag{11a}$$

ist, unter $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_S$ bzw. $(u)_S$ die Grenzwerte von $\frac{\partial u}{\partial n}$ bzw. u bei Annäherung an S verstanden, die in allen abgeschlossenen Stetigkeitsintervallen von $f(\sigma)$ gleichmäßig existieren und über S absolut integrierbar sein sollen. Man erkennt nämlich wie in IIa, daß sich $\int_{S'_\delta} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| d\sigma_\delta$ und $\int_{S'_\delta} |u|\, d\sigma_\delta$ gleichmäßig für alle $\delta < \bar{\delta}$ beliebig klein machen lassen. Hieraus ergibt sich aber wegen

$$\int_{S_\delta} \left| \frac{\partial u}{\partial n} + h_\delta u \right| d\sigma_\delta - \int_S |f(\sigma)|\, d\sigma$$

$$= \int_{S'_\delta} \left| \frac{\partial u}{\partial n} + h_\delta u \right| d\sigma_\delta + \int_{S_\delta - S'_\delta} \left| \frac{\partial u}{\partial n} + h_\delta u \right| d\sigma_\delta - \int_{S - S'} |f(\sigma)|\, d\sigma - \int_{S'} |f(\sigma)|\, d\sigma$$

leicht die Gültigkeit von (11).

Beweis. In der Bezeichnungsweise von IIa) findet sich für genügend kleines δ, etwa $\delta < \delta_4$, entsprechend

$$(12)\qquad \int_{S'_\delta} \left|\frac{\partial u_1}{\partial n} + h_\delta u_1\right| d\sigma_\delta, \quad \int_{S'_\delta} \left|\frac{\partial u_2}{\partial n} + h_\delta u_2\right| d\sigma_\delta < \frac{3\varepsilon}{8A}.$$

Es sei jetzt δ_5 so klein gewählt, daß für alle $\delta < \delta_5$ mit $v = u_1 - u_2$

$$(13)\qquad \int_{S_\delta - S'_\delta} \left|\frac{\partial v}{\partial n} + h_\delta v\right| d\sigma_\delta < \frac{\varepsilon}{4A}$$

ausfällt; somit ist

$$(14)\qquad \int_{S_\delta} \left|\frac{\partial v}{\partial n} + h_\delta v\right| d\sigma_\delta < \frac{\varepsilon}{A}$$

und also mit $|v| < A$

$$(15)\qquad \int_{S_\delta} |v| \left|\frac{\partial v}{\partial n} + h_\delta v\right| d\sigma_\delta < \varepsilon, \qquad (\delta < \text{Min}\,(\delta_4, \delta_5)).$$

Hieraus ergibt sich

$$(16)\qquad \left| \int_{T_\delta} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right\} d\tau_\delta - \int_{S_\delta} h_\delta v^2 \, d\sigma_\delta \right| = \left| \int_{S_\delta} v \left(\frac{\partial v}{\partial n} + h_\delta v\right) d\sigma \right| < \varepsilon$$

und daher wegen $h_\delta \leqq 0$

$$(17)\qquad \int_T \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right\} d\tau = \lim_{\delta \to 0} \int_{T_\delta} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right\} d\tau_\delta = 0,$$

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{S_\delta} h_\delta v^2 \, d\sigma_\delta = 0,$$

woraus die Behauptung folgt.

c) Anwendung auf das Potential der einfachen Schicht. Erweiterungen.

Aus den Untersuchungen von Carleman [14]) erkennt man leicht, daß die als Potential der einfachen Schicht dargestellte Lösung die unter a) und b) gestellten Forderungen erfüllt. Bezeichnet nämlich $U(x, y, z) = \int_S \mu'(\sigma) \frac{1}{r} \, d\sigma$

[14]) Vgl. l. c. [2]), insbesondere S. 2ff., Gleichung (2) und (5), wobei die dortigen Betrachtungen sogar für Gebiete mit Kanten (in der Ebene mit Ecken) gelten.

dieses Potential, wobei nach PLEMELJ $\mu'(\sigma)$ die gleichen Eigenschaften wie $f(\sigma)$ aufweist, so ist in unserer Bezeichnungsweise für hinreichend kleine δ, etwa $\delta < \delta^*$,

$$\int_{S'_\delta} \left|\frac{\partial U}{\partial n}\right| d\sigma_\delta < \varepsilon, \qquad \int_{S'_\delta} |U|\, d\sigma_\delta < \varepsilon.$$

Hieraus folgt sogleich, daß die Voraussetzung (1) bzw. die in Fußnote [13]) erwähnten Forderungen (11a) und somit auch (11) erfüllt sind. Da ferner f und also auch μ' in jedem abgeschlossenen Stetigkeitsintervall gleichmäßig einer L-Bedingung genügen, so sind $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ beim Übergang auf ein solches Randintervall stetig[15]). Das Potential der einfachen Schicht ist also die einzige Lösung des Problems.

Es sei noch bemerkt, daß die Betrachtungen natürlich in gleicher Weise in der Ebene gelten, ferner auch im Raume für Gebiete mit Kanten, in der Ebene für Gebiete mit Ecken. In diesem Fall müssen die Betrachtungen, ähnlich wie bei CARLEMAN [l. c.[2])] durchgeführt werden; insbesondere ist es zweckmäßig, die Definition der Parallelflächen bzw. -kurven jetzt wie dort zu modifizieren. Ebenso gelten auch die Unitätssätze bei dem entsprechenden Problem für das Außengebiet von S, wenn man Regularität (im PLEMELJschen Sinne) im Unendlichen verlangt, da dann ja auch die GREENschen Formeln für T_δ gelten. — Besitzt schließlich beim dritten Randwertproblem die Funktion h eine endliche Anzahl von Unendlichkeitsstellen σ_ν, in deren Umgebung sie gleichmäßig Ungleichungen der Form $|h(\sigma)| < \frac{\text{konst}}{r_{\sigma\sigma_\nu}^{\lambda'}}$ $(0 < \lambda' < 1$, $r_{\sigma\sigma_\nu}$ Abstand der Punkte σ und σ_ν) genügt, so lassen sich die Betrachtungen ebenfalls ohne Mühe übertragen. Insbesondere genügt auch jetzt das Potential der einfachen Schicht den Voraussetzungen[16]).

---

[15]) Vgl. z. B. L. LICHTENSTEIN, Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung. Enzykl. d. math. Wiss., Bd. II 3, S. 177—377, insbes. S. 201; die dort aufgeführten Sätze gelten auch im Innern von Kurven- bzw. Flächenstücken. Dann sind auch [vgl. Fußnote [11])] die Voraussetzungen über die Konvergenz von $\frac{\partial u}{\partial n}$ bei Annäherung an S erfüllt.

[16]) An Stelle der 2. Bedingung in (11a) [Fußnote [11])] ist jetzt

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{S_\delta} |h_\delta|\,|u|\, d\sigma_\delta = \int_S |h|\,|u|\, d\sigma$$

zu setzen. Es sei noch bemerkt, daß die Lösungsexistenz beim Außenproblem der dritten Randwertaufgabe die stückweise Stetigkeit von h verlangt. Vgl. l. c.[2a]), wo dies gezeigt wird.

III. Einzigkeit in der Ebene mit Hilfe der konjugierten Potentialfunktion.

a) Die zweite Randwertaufgabe.

Es werde in der Ebene (x, y) ein endliches oder unendliches, von einer einzigen geschlossenen, stetig gekrümmten JORDANschen Kurve S begrenztes Gebiet T betrachtet[13a]); die Punkte von S sind durch ihre, von einem festen Punkt aus gemessene Bogenlänge s gekennzeichnet. Auf S sei eine, abgesehen von endlich vielen Stellen s_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$, an denen sie nicht notwendig beschränkt zu sein braucht, stetige Funktion $f(s)$ gegeben, die in jedem abgeschlossenen, solche Stellen nicht enthaltenden Teilintervall gleichmäßig einer L-Bedingung genügt und die in der Umgebung einer jeden Ausnahmestelle s_ν eine Ungleichung der Form

$$|f(s)| < \frac{C}{|s - s_\nu|^\lambda} \tag{18}$$

$(0 < \lambda < 1$, konstant; C konstant, wie später $C_1, C_2, \ldots)$

befriedigt. Wird weiter $\int_S f(s)\,ds = 0$ vorausgesetzt, so gilt für das zweite Randwertproblem der folgende

Unitätssatz. Es gibt (bis auf eine additive Konstante) höchstens eine in T reguläre, in $T + S$ stetige Lösung u der Gleichung $\Delta u = 0$, deren Normalableitung $\frac{\partial u}{\partial n}$ bei Annäherung an jedes abgeschlossene Stetigkeitsintervall von f gleichmäßig gegen die Wertefolge $f(s)$ konvergiert, wenn noch verlangt wird, daß u auf S, als Funktion von s betrachtet, gleichmäßig einer L-Bedingung genügt und daß, falls T nicht beschränkt ist, für $R \to \infty$

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} = O\left(\frac{1}{R^{1+\tau}}\right) \quad (R^2 = x^2 + y^2;\ \tau > 0, \text{konstant})$$

gilt[17]).

Bevor wir dies beweisen, behaupten wir zunächst den

Hilfssatz. Genügt eine in T reguläre, in $T + S$ stetige Potentialfunktion $v(x, y)$ gleichmäßig auf der stetig gekrümmten Kurve S einer Lipschitz-Bedingung mit dem Exponenten ϱ $(0 < \varrho < 1)$, so erfüllt auch die

---

16a) Es können auch, ohne daß die folgenden Betrachtungen wesentlich geändert werden müßten, eine endliche Anzahl von Ecken oder einspringenden Spitzen zugelassen werden, falls im übrigen die Kurvenstücke von S analytisch sind. Hierin ist z. B. der für manche Anwendungen wichtige Spezialfall der längs einer Strecke aufgeschlitzten Ebene enthalten.

17) Die letzte Forderung, die die Existenz von $\lim_{R\to\infty} u$ sicherstellt, geht über die PLEMELJsche Regularitätsdefinition [vgl. l. c.[7]), S. 4] hinaus, nach der für $R \to \infty$ nur $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} = o\left(\frac{1}{R}\right)$ sein soll.

zu v konjugierte Potentialfunktion $\bar{v}(x, y)$ auf S gleichmäßig eine L-Bedingung mit dem gleichen Exponenten ϱ.

Nach PRIWALOFF [18]) gilt dieser Satz, falls S eine Kreislinie ist; für Bereiche mit stetig gekrümmter Berandung ist er dann leicht zu beweisen:

Bildet nämlich die analytische Funktion $Z(z)$ den endlichen (bzw. unendlichen) Bereich T der Ebene $z = x + iy$ umkehrbar eindeutig und konform auf das Innere (bzw. Äußere) T des Einheitskreises Σ der Ebene $Z = X + iY$ ab, so verhält sich wegen der stetigen Krümmung von S $\frac{dZ}{dz}$ noch auf S stetig und es ist $\left|\frac{dZ}{dz}\right|$ in $T + S$ beschränkt und von Null verschieden [19]). Genügt daher auf S $v(x, y)$ gleichmäßig einer L-Bedingung mit dem Exponenten ϱ, so gilt das gleiche für $v^*(X, Y) = v[x(X, Y), y(X, Y)]$, also nach PRIWALOFF auch für die Konjugierte $\bar{v}^*(X, Y)$ und somit schließlich für $\bar{v}(x, y) = \bar{v}^*[X(x, y), Y(x, y)]$ [19a]).

Nun der Beweis des Unitätssatzes: Wir führen in bekannter Weise das zweite Randwertproblem auf das erste zurück. Die (bis auf eine additive Konstante festgelegte) konjugierte Potentialfunktion $\bar{u}$ einer jeden Lösung u unserer Randwertaufgabe genügt mit Rücksicht auf den eben bewiesenen Hilfssatz unter den Voraussetzungen des Unitätssatzes auf S gleichmäßig einer L-Bedingung, hat, falls T nicht beschränkt ist, unter unseren Annahmen das gleiche Unendlichkeitsverhalten wie u und muß in allen abgeschlossenen Stetigkeitsintervallen von f auf S wegen $\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial s}$ gleichmäßig die Vorgabe

$$\lim_{(x, y) \to s} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s}\right) = -f(s)$$

erfüllen. Hieraus folgt, daß $\bar{u}(x, y)$ bei Annäherung an S stetig in die [wegen (18) überall existierende], wegen $\int_S f(s)\, ds = 0$ bis auf eine additive Konstante C eindeutige Randfunktion

$$F(s) = -\int_{s^*}^{s} f(t)\, dt \quad (s^* \text{ ein beliebiger fester Punkt auf } S)$$

übergehen muß, die tatsächlich mit Rücksicht auf (18) gleichmäßig auf S einer L-Bedingung mit dem Exponenten $1 - \lambda$ genügt [20]). Hierdurch ist

[18]) I. PRIWALOFF, Sur les fonctions conjuguées. Bull. soc. math. France 44 (1916), S. 100–103.

[19]) Vgl. l. c. [15]), S. 254.

[19a]) Unter den Annahmen der Fußnote [16a]) wird sich beim Übergang von $v(x, y)$ zu $\bar{v}(x, y)$ im allgemeinen der L-Exponent ändern, ohne zu verschwinden, Vgl. l. c. [15]), S. 255.

[20]) Das erkennt man leicht folgendermaßen: Wegen der in der Nachbarschaft jeder Stelle s_ν gültigen Ungleichheit $|F(s^{(1)}) - F(s^{(2)})| < C \int_{s^{(1)}}^{s^{(2)}} \frac{ds}{|s - s_\nu|^\lambda}$ findet man

(bis auf eine additive Konstante) die in T (gegebenenfalls einschließlich des unendlich fernen Punktes) reguläre Potentialfunktion $\bar{u}(x, y)$ eindeutig festgelegt, woraus sogleich folgt, daß es (ebenfalls bis auf eine additive Konstante) höchstens eine Lösung u der zweiten Randwertaufgabe geben kann, die den Forderungen des Unitätssatzes genügt.

b) Erfüllung der Voraussetzungen des Unitätssatzes.

Aus den PLEMELJschen Untersuchungen [l. c. [1])] folgt, daß eine Lösung der zweiten Randwertaufgabe sogar unter der Voraussetzung (18) existiert; sie läßt sich als Potential einer einfachen Schicht darstellen und erfüllt, falls T nicht beschränkt ist, unsere Voraussetzungen über das Verhalten für $R \to \infty$. Wie in IIc) erkennt man wieder, daß sich ihre Ableitungen erster Ordnung beim Übergang auf jedes auf S gelegene Stetigkeitsintervall von f stetig verhalten [vgl. Fußnote [15])].

Wir behaupten, daß diese Lösung, die bis auf eine additive Konstante

$$U(x, y) = \int_S \mu'(t) \log \frac{1}{r}\, dt$$

($t = (x_t, y_t)$ der Integrationspunkt auf S, $r^2 = (x - x_t)^2 + (y - y_t)^2$)

lauten möge, auf S gleichmäßig einer L-Bedingung mit dem Exponenten $1 - \lambda$ genügt und daß somit sämtliche Voraussetzungen des Unitätssatzes erfüllt sind.

Wie PLEMELJ zeigte, hat $\mu'(s)$ die gleichen Stetigkeitseigenschaften wie $f(s)$; insbesondere gilt also in der Nachbarschaft der s_ν

$$|\mu'(s)| < \frac{C_1}{|s - s_\nu|^\lambda}. \tag{19}$$

---

z. B. für $s^{(1)} < s^{(2)} \leqq s_\nu$: $|F(s^{(1)}) - F(s^{(2)})| < \frac{C}{1-\lambda}[(s_\nu - s^{(1)})^{1-\lambda} - (s_\nu - s^{(2)})^{1-\lambda}]$, und es ist leicht zu sehen (etwa durch Betrachtung der Funktion $\varphi(\eta) = (1-\eta)^{1-\lambda} - (1-\eta^{1-\lambda})$ mit $\eta = \frac{s^{(2)} - s^{(1)}}{s_\nu - s^{(1)}}$, $0 \leqq \eta \leqq 1$), daß durchweg

$$\frac{(s_\nu - s^{(1)})^{1-\lambda} - (s_\nu - s^{(2)})^{1-\lambda}}{(s^{(2)} - s^{(1)})^{1-\lambda}} \leqq 1$$

ist. Analoges gilt für $s_\nu \leqq s^{(1)} < s^{(2)}$. Ist $s^{(1)} \leqq s_\nu \leqq s^{(2)}$, so gilt wegen $\int_{s^{(1)}}^{s^{(2)}} = \int_{s^{(1)}}^{s_\nu} + \int_{s_\nu}^{s^{(2)}}$ die Abschätzung $|F(s^{(1)}) - F(s^{(2)})| < \frac{C}{1-\lambda}[(s_\nu - s^{(1)})^{1-\lambda} + (s^{(2)} - s_\nu)^{1-\lambda}]$ $\leqq \frac{2C}{1-\lambda}(s^{(2)} - s^{(1)})^{1-\lambda}$.

Die zu U konjugierte Potentialfunktion

$$\overline{U}(x, y) = -\int_S \mu'(t) \operatorname{arctg} \frac{y - y_t}{x - x_t}\, dt + C^* \quad (C^* \text{ eine beliebige Konstante})$$

läßt sich mit $\mu(s) = \int_{\bar{s}}^{s} \mu'(t)\, dt$ [$\bar{s} = (x_{\bar{s}}, y_{\bar{s}})$ ein fester Punkt auf S] und $m = \int_S \mu'(t)\, dt$ [21]) nach einer Integration per partes in der Gestalt [22])

$$(20) \qquad \overline{U}(x, y) = -m \operatorname{arctg} \frac{y - y_{\bar{s}}}{x - x_{\bar{s}}} + \int_S \mu(t) \frac{d}{dt} \left(\operatorname{arctg} \frac{y - y_t}{x - x_t} \right) dt + C^*$$

schreiben. Der Integralausdruck in (20) stellt wegen $\frac{d}{dt}\left(\operatorname{arctg}\frac{y-y_t}{x-x_t}\right) = \frac{d}{dn_t} \log \frac{1}{r}$ das Potential einer Doppelschicht dar. Bei Annäherung des Punktes (x, y) aus T an einem beliebigen Randpunkt $s = (x_s, y_s)$ geht daher $\overline{U}(x, y)$ in den Ausdruck

$$(21) \qquad [\overline{U}(x, y)]_{(x,y) \to s} = -m \operatorname{arctg} \frac{y_s - y_{\bar{s}}}{x_s - x_{\bar{s}}} \pm \pi \mu(s) + \int_S \mu(t) \frac{d}{dn_t} \log \frac{1}{r_{st}}\, dt + C^*$$

über, wobei die Normalenrichtung in das Innere des von S umschlossenen beschränkten Bereiches weist und das $+$- oder $-$-Zeichen zu nehmen ist, je nachdem T beschränkt ist oder nicht. Nun gilt wegen (19), wie man leicht [wie in Fußnote [20])] nachprüft, gleichmäßig auf S

$$(22) \qquad |\mu(s^{(1)}) - \mu(s^{(2)})| < C_2 |s^{(1)} - s^{(2)}|^{1-\lambda};$$

weiter ist auf S $\frac{d}{ds}\left(\operatorname{arctg}\frac{y_s - y_{\bar{s}}}{x_s - x_{\bar{s}}}\right)$ außer im Punkte $\bar{s}$ stetig und bleibt bei Annäherung an $\bar{s}$ beschränkt; der Ausdruck $\int_S \mu(t) \frac{d}{dn_t} \log \frac{1}{r_{st}}\, dt$ besitzt aber wegen (22) eine durchweg stetige Ableitung nach s [23]). Alles in allem ist daher mit Rücksicht auf (21) gleichmäßig auf S

$$|[\overline{U}(x, y)]_{(x,y) \to s^{(1)}} - [\overline{U}(x, y)]_{(x,y) \to s^{(2)}}| < C_3 |s^{(1)} - s^{(2)}|^{1-\lambda}.$$

Hieraus folgt nach dem zu Beginn von IIIa angeführten Hilfssatze, daß gleichmäßig auf S auch

$$(23) \qquad |U(s^{(1)}) - U(s^{(2)})| < C_4 |s^{(1)} - s^{(2)}|^{1-\lambda}$$

gilt, wobei zur Abkürzung $[U(x, y)]_{(x,y) \to s^{(1)}} = U(s^{(1)})$, $[U(x, y)]_{(x,y) \to s^{(2)}} = U(s^{(2)})$ gesetzt ist.

---

[21]) Enthält T den unendlich fernen Punkt, so ist $m = 0$.

[22]) Vgl. z. B. J. Plemelj, l. c. [7]), S. 24.

[23]) Vgl. l. c. [15]), S. 205.

Damit ist gezeigt, daß die in Gestalt eines Potentials einer einfachen Schicht darstellbare Plemelj-Lösung der zweiten Randwertaufgabe die Voraussetzungen des Unitätssatzes erfüllt und somit auch die einzige Lösung ist.

c) Die dritte Randwertaufgabe.

Es sei $h(s)$ eine weitere auf S gegebene und, falls es sich im folgenden um das Innenproblem handelt, wie $f(s)$ beschaffene Funktion, für die insbesondere in der Umgebung der Unendlichkeitsstellen $\bar{s}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, m)$, die nicht mit den zu $f(s)$ gehörigen s_ν zusammenfallen brauchen, eine zu (18) analoge Ungleichung gilt; beim Außenproblem soll $h(s)$ beschränkt und stückweise stetig sein (vgl. die letzte Bemerkung in Fußnote [16]). Wir nehmen ferner an, daß die homogene Integralgleichung für die Belegungsdichte der als Potential einer einfachen Schicht angesetzten Lösung der dritten Randwertaufgabe keine nichttriviale Lösung hat[24]. Dann haben wir für das dritte Randwertproblem den folgenden

Unitätssatz. Es gibt höchstens eine in T reguläre, in $T + S$ stetige Lösung u der Gleichung $\Delta u = 0$, die auf S an allen Stetigkeitsstellen von f und h der Bedingung $\frac{\partial u}{\partial n} + h(s)\, u = f(s)$ genügt, falls noch verlangt wird, daß $\frac{\partial u}{\partial n}$ bei Annäherung an jedes auf S gelegene abgeschlossene Stetigkeitsintervall von f und h gleichmäßig konvergiert, daß ferner u auf S gleichmäßig einer L-Bedingung genügt und daß, wenn T nicht beschränkt ist, für $R \to \infty$ $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} = O\left(\frac{1}{R^{1+\tau}}\right)$ $(R^2 = x^2 + y^2, \tau > 0$, konstant) gilt.

Beweis. Wegen der Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -h(s)\, u + f(s)$$

geht bei Annäherung an jedes abgeschlossene, keine der s_ν und $\bar{s}_\nu$ enthaltende Teilintervall $\frac{\partial u}{\partial n}$ gleichmäßig gegen eine dort gleichmäßig einer L-Bedingung genügende Randfunktion, für die in der Nachbarschaft der s_ν und $\bar{s}_\nu$ eine zu (18) analoge Ungleichung gilt.

Gäbe es nun mehrere, den Voraussetzungen des Unitätssatzes genügende Lösungen des dritten Randwertproblems, so müßte sich eine jede, wie unter III a und III b gezeigt wurde, notwendig in der Gestalt

$$u(x, y) = \int_S \mu'(t) \log \frac{1}{r}\, dt + N \qquad (N \text{ konstant}) \tag{24}$$

darstellen lassen.

---

[24]) Das ist z. B. gewiß für stetiges $h \leqq 0$ $(h \not\equiv 0)$ der Fall, falls es auf S keine Belegung $\varkappa(s)$ gibt, derart, daß $\int_S \varkappa(t) \log \frac{1}{r}\, dt$ identisch in T verschwindet.

Ist T beschränkt, so läßt sich bekanntlich die Konstante N als Potential einer einfachen Schicht schreiben; hieraus folgt, daß sich auch $u(x, y)$ insgesamt als Potential einer einfachen Schicht darstellen lassen muß. Unter unseren Voraussetzungen zeigt aber die Theorie der linearen Integralgleichungen[25]), daß es genau ein einziges solches, der Randbedingung genügendes Potential gibt, womit in diesem Fall die Einzigkeit bewiesen ist.

Ist T nicht beschränkt, so folgt aus der Existenz einer und nur einer Lösung von der Gestalt (24), für die überdies $\int_S \mu'(t)\,dt = 0$ ist[26]), und aus der Zwangsläufigkeit dieser Darstellung, daß auch diese Lösung im Rahmen unserer Voraussetzungen die einzige ist.

IV. Ein zweiter Beweis für das in III b dargestellte Verhalten eines Potentials der einfachen Schicht auf der belegten Kurve.

Im folgenden wird ein zweiter Beweis[27]) dafür gegeben, daß unter der Annahme, daß $\mu'(s)$ in einer gewissen Umgebung der Stellen s_ν,

$$|s - s_\nu| \leqq D_1,$$

gleichmäßig für alle ν einer Ungleichung der Form

$$\mu'(s) < \frac{C_1}{|s - s_\nu|^\lambda} \tag{25}$$

genügt, die Funktion

$$U(x, y) = \int_S \mu'(t) \log \frac{1}{r}\, dt$$

auf S gleichmäßig eine L-Bedingung befriedigt. Obwohl sich jetzt für den L-Exponenten ein kleinerer Wert als $1 - \lambda$ ergibt, ist die folgende Betrachtung doch nützlich, da sie sich ohne Mühe auf den Raum übertragen läßt, was natürlich auf dem in III b beschrittenen Wege unmöglich ist.

Wir betrachten den Ausdruck

$$U(s^{(1)}) - U(s^{(2)}) = \int_S \mu'(t) \left(\log \frac{1}{r_1} - \log \frac{1}{r_2} \right) dt, \tag{26}$$

$$r_1^2 = (x_1 - x_t)^2 + (y_1 - y_t)^2, \qquad r_2^2 = (x_2 - x_t)^2 + (y_2 - y_t)^2,$$

---

[25]) Vgl. J. Plemelj, l. c.[1]), S. 199 f.

[26]) Vgl. hierzu l. c.[2a]), wo der Existenzbeweis durchgeführt wird.

[27]) Wir bedienen uns hier einer ähnlichen Methode, wie sie Korn im Falle beschränkter Belegung anwendete. Vgl. A. Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie, Bd. 1, Berlin 1899, S. 388 f.; ferner: Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der Potentiale von Flächen und Räumen. Sitz.ber. d. math.-phys. Klasse der Bayer. Akad. d. Wiss. **36** (1906), S. 3–36.

unter $s^{(1)} = (x_1, y_1)$ und $s^{(2)} = (x_2, y_2)$ zwei feste Punkte auf S mit dem Abstand $d_{12} = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ und unter (x_t, y_t) den Integrationspunkt t verstanden.

Es sei $2\,D_2$ der kleinste, längs S gemessene Abstand zwischen zwei Unendlichkeitsstellen s_ν; innerhalb des Intervalls

$$|s - s_\nu| \leqq D_2 \tag{27}$$

liegt daher keine weitere Ausnahmestelle.

Es sei weiter $B > 1$ eine feste Konstante. Dann definieren wir eine Zahl $\delta_0 = \delta_0(B)$ wie folgt: Für alle Punktepaare σ_1 und σ_2 auf S, deren geradliniger Abstand δ_{12} der Ungleichung

$$\delta_{12} < \delta_0 \tag{28}$$

genügt, bestehe (man beachte die stetige Krümmung von S) zwischen der absolut kleinsten Bogenlängendifferenz $\sigma_2 - \sigma_1$ und δ_{12} gleichmäßig die Ungleichung

$$1 \leqq \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{\delta_{12}} \leqq B. \tag{29}$$

Insbesondere befinden sich die Punktepaare, deren Bogenlängendifferenzen der Ungleichung

$$|\sigma_1 - \sigma_2| < \delta_0 \tag{30}$$

genügen, unter den Punktepaaren (28).

Ist jetzt

$$D = \mathrm{Min}\,(D_1, D_2, \tfrac{1}{2}\,\delta_0), \tag{31}$$

so liegt in dem Intervall $|s - s_\nu| \leqq D$ keine weitere Ausnahmestelle; ferner gilt dort (25) und (29).

Wir betrachten weiter alle auf S gelegenen Punktepaare $(s^{(1)}, s^{(2)})$, deren geradlinige Abstände d_{12} der Beschränkung

$$d_{12} \geqq \frac{D}{4\,B} \tag{32}$$

genügen. Wegen (29) und $\frac{D}{4\,B} \leqq \frac{\delta_0}{8}$ gilt für diese gewiß

$$|s^{(1)} - s^{(2)}| \leqq \frac{D}{4}. \tag{33}$$

Jetzt werde um den Halbierungspunkt von d_{12} ein Kreis K mit dem Radius

$$\mathsf{P} = a\,d_{12}^{\bar{\lambda}} \qquad (0 < \bar{\lambda} < 1, \text{ konstant}) \tag{34}$$

geschlagen; setzen wir die Konstante

$$a = \left(\frac{D}{4\,B}\right)^{1-\bar{\lambda}}, \tag{35}$$

so ist für die durch (32) erfaßten Punktepaare der Durchmesser von K

$$2\,\mathsf{P} < \frac{D}{2\,B}.$$

Wegen $\frac{D}{2\,B} \leqq \frac{\delta_0}{4}$ ist (29) auf den durch K ausgeschnittenen Bogen S^* (σ', σ'') (vgl. Fig. 2) und auf die zugehörige Sehne anwendbar, und es ergibt sich

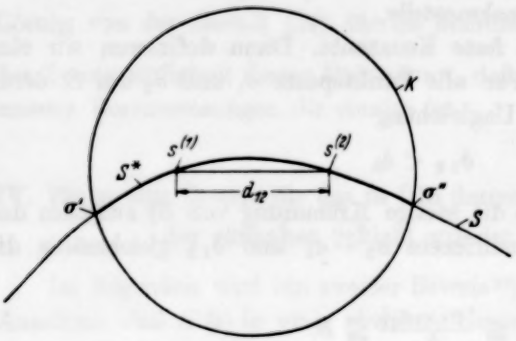

Fig. 2.

Fig. 3.

$$(36)\quad |\sigma' - \sigma''| \leqq \frac{D}{2\,B} \cdot B = \frac{D}{2}.$$

Für die Punktepaare mit (32) ist wegen $\mathsf{P} = \left(\frac{D}{4\,B\,d_{12}}\right)^{1-\bar{\lambda}} d_{12}$

$$(37)\qquad \mathsf{P} \geqq d_{12},$$

d. h. die Punkte $s^{(1)}$, $s^{(2)}$ liegen im Innern von K.

Auf dem von K ausgeschnittenen Bogen S^* liege jetzt (vgl. Fig. 3) eine der Unendlichkeitsstellen s_ν; wegen (36) ist diese gewiß die einzige. Dann gilt zunächst wegen (26) mit Rücksicht auf (25) und (29)

$$(38)\quad \left| \int_{S^*} \mu'(t) \left(\log \frac{1}{r_1} - \log \frac{1}{r_2} \right) dt \right|$$

$$< C_5 \int_{S^*} \frac{1}{|t - s_\nu|^{\bar{\lambda}}} \left(\frac{1}{|t - s^{(1)}|^{\vartheta}} + \frac{1}{|t - s^{(2)}|^{\vartheta}} \right) dt, \quad (\vartheta \text{ beliebig in } 0 < \vartheta < 1 - \bar{\lambda}).$$

Es bezeichne S_1^* den Teil von S^*, für dessen mit t bezeichnete Punkte $|t - s_\nu| \leqq |t - s^{(1)}|$, S_2^* den Teil, für den $|t - s_\nu| > |t - s^{(1)}|$ gilt. Dann ist wegen (29) und (34)

$$(39)\quad \int_{S^*} \frac{1}{|t - s_\nu|^{\bar{\lambda}}} \cdot \frac{1}{|t - s_1^{(1)}|^{\vartheta}} dt = \int_{S_1^*} + \int_{S_2^*} \leqq \int_{S^*} \frac{dt}{|t - s_\nu|^{\bar{\lambda} + \vartheta}} + \int_{S^*} \frac{dt}{|t - s^{(1)}|^{\bar{\lambda} + \vartheta}}$$

$$< C_6\, \mathsf{P}^{1-\bar{\lambda}-\vartheta} < C_7\, d_{12}^{\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda}-\vartheta)}.$$

Eine entsprechende Ungleichung gilt für $\int_{S^*} \frac{1}{|t - s_\nu|^{\bar{\lambda}}} \cdot \frac{1}{|t - s^{(2)}|^{\vartheta}} dt$.

Liegt weiter s_ν zwar nicht auf S^*, ist aber die Bogenlänge zwischen s_ν und dem nächstgelegenen Endpunkte σ' oder σ'' von S^* kleiner als $\frac{1}{2}D$ (gilt also $|t - s_\nu| < \frac{1}{2}D$ für alle t auf S^*) (vgl. Fig. 4), so liegt S^* noch in dem Intervall $|s - s_\nu| \leqq D$, und man gelangt durch eine völlig analoge Betrachtung ebenfalls zu zwei Ungleichungen der Form (39), indem man $|t - s_\nu| \geqq |t - \sigma'|$ bzw. $\geqq |t - \sigma''|$ beachtet. — Liegt schließlich kein Ausnahmepunkt s_ν auf S^* und in der eben genannten Nachbarschaft mit der Bogenlänge $\frac{1}{2}D$, so ist μ' auf S^* gleichmäßig für jede Lage dieses Flächenstückes mit $|t - s_\nu| \geqq \frac{1}{2}D$ für alle t auf S beschränkt. Für die linke Seite von (38) finden sich jetzt erst recht entsprechende Ungleichungen und wir bekommen, alles in allem,

Fig. 4.

$$\left| \int_{S^*} \mu'(t) \left(\log \frac{1}{r_1} - \log \frac{1}{r_2} \right) dt \right| < C_8 d_{12}^{\bar{\lambda}(1-\lambda-\vartheta)}; \tag{40}$$

dabei ist C_8 eine von der Lage der Punkte $s^{(1)}$ und $s^{(2)}$ und von d_{12} unabhängige Konstante, vorausgesetzt, daß d_{12} der Ungleichung (32) genügt.

Der kleinstmögliche Abstand $r_{\min}$ der Punkte $s^{(1)}$ oder $s^{(2)}$ von der Kreislinie K ist mit Rücksicht auf (37) und (34)

$$r_{\min} = P - \frac{d_{12}}{2} \geqq \frac{P}{2} = C_9 d_{12}^{\bar{\lambda}} \text{ [28]}. \tag{41}$$

Für jede Lage des Integrationspunktes $(x_t, y_t) = t$ auf $S - S^*$ ist somit für $d_{12} \leqq \frac{D}{4B}$

$$\left| \log \frac{1}{r_1} - \log \frac{1}{r_2} \right| < C_{10} \frac{d_{12}}{r_{\min}} < C_{11} d_{12}^{1-\bar{\lambda}}, \tag{42}$$

und es gilt daher

$$\left| \int_{S-S^*} \mu'(t) \left(\log \frac{1}{r_1} - \log \frac{1}{r_2} \right) dt \right| < C_{12} d_{12}^{1-\bar{\lambda}} \int_S |\mu'(t)|\, dt = C_{13} d_{12}^{1-\bar{\lambda}}. \tag{43}$$

Wird jetzt noch

$$\text{Min}\,[1 - \bar{\lambda},\ \bar{\lambda}(1 - \lambda - \vartheta)] = \lambda^* \qquad (0 < \lambda^* < 1) \tag{44}$$

gesetzt, so folgt aus (40) und (43) schließlich

$$\left| \int_S \mu'(t) \left(\log \frac{1}{r_1} - \log \frac{1}{r_2} \right) dt \right| < C_{14} d_{12}^{\lambda^*}. \tag{45}$$

Dies gilt zunächst gleichmäßig für alle Punktepaare, die die Ungleichung (32) erfüllen; bei geeigneter Wahl von C_{14} gilt (45) schließlich ganz allgemein.

[28]) Im räumlichen Falle ist von jetzt ab $0 < \bar{\lambda} < \frac{1}{2}$ anzunehmen.

(Eingegangen am 13. Dezember 1941.)

Eine Ungleichung für Vektorlängen.

Von

Hans Hornich in Wien.

In dieser Arbeit soll eine weitgehende Verallgemeinerung der Dreiecksungleichung gezeigt werden, die trotz ihrer Einfachheit und Allgemeinheit nicht bekannt zu sein scheint. Ihr hier gegebener Beweis erfordert einige Umwege und Hilfssätze.

Sind $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_m$ *beliebige* $n+m$ *Vektoren mit* $m \geqq 1$ *und mit*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{b}_j \tag{1}$$

und ist $\mathfrak{c}$ *ein Einheitsvektor eines* R_k, *so gilt die folgende Ungleichung*:

$$\sum_{i=1}^{n} (|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{a}_i|) \leqq \sum_{j=1}^{m} (|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{b}_j|) + n + m - 2. \tag{2}$$

Als einfachster Spezialfall ergibt sich für $m = 1$ und $n = 2$ mit drei beliebigen Vektoren $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$ die Ungleichung:

$$|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{c}| + |\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}| \geqq |\mathfrak{a} + \mathfrak{b}| + |\mathfrak{b} + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{c} + \mathfrak{a}|,$$

welche wieder die Dreiecksungleichung als Spezialfall enthält.

Zum Beweis von (2) setzen wir

$$\sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{a}_i| + \sum_{j=1}^{m} |\mathfrak{b}_j| = R$$

und zeigen den Hilfssatz:

Es ist gleichmäßig für alle $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$, welche (1) erfüllen:

$$\limsup_{R \to \infty} \Big(\sum_{i=1}^{n} (|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{a}_i|) - \sum_{j=1}^{m} (|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{b}_j|) \Big) \leqq n + m - 2. \tag{3}$$

Zunächst ist:

$$|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{a}_i| = \frac{2\,\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{c} + 1}{|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{a}_i|}$$

und analog für die $\mathfrak{b}_j$, so daß wir (3) auch schreiben können:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2\,\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{c} + 1}{|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{a}_i|} - \sum_{j=1}^{m} \frac{2\,\mathfrak{b}_j\,\mathfrak{c} + 1}{|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{b}_j|} \leqq m + n - 2 + o(1) \tag{4}$$

Wir betrachten zunächst den Fall, daß für ein festes $R > 0$ alle $|\mathfrak{a}_i|$ und $|\mathfrak{b}_j| > \frac{R}{2(m+n)}$ sind. Dann können wir $|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| = |\mathfrak{a}_i|\,(1 + \varepsilon_i)$ setzen,

wo ε_i absolut unterhalb einer nur von R abhängigen und mit $R \to \infty$ gegen Null strebenden Schranke liegt; analoges gilt für die $|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}|$. Es ist also:

$$(5)\quad \sum_{i=1}^{n} \frac{2\mathfrak{a}_i\mathfrak{c}+1}{|\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c}|+|\mathfrak{a}_i|} - \sum_{j=1}^{m} \frac{2\mathfrak{b}_j\mathfrak{c}+1}{|\mathfrak{b}_j+\mathfrak{c}|+|\mathfrak{b}_j|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathfrak{a}_i\mathfrak{c}}{|\mathfrak{a}_i|} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\mathfrak{b}_j\mathfrak{c}}{|\mathfrak{b}_j|} + o(1).$$

$$\leqq \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathfrak{a}_i}{|\mathfrak{a}_i|} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\mathfrak{b}_j}{|\mathfrak{b}_j|} \right| + o(1).$$

Wir bestimmen nun das Maximum der Größe $\left|\sum_{i=1}^{m+n} \mathfrak{e}_i\right|$, wo die $\mathfrak{e}_i$ Einheitsvektoren sind und eine Relation

$$\sum_{i=1}^{m+n} \alpha_i \mathfrak{e}_i = 0$$

mit $\alpha_i \geqq 0$ bestehen soll. Sei etwa $\alpha_1 = \operatorname{Max}_i \alpha_i = 1$; dann ist:

$$\left|\sum_{i=1}^{n+m} \mathfrak{e}_i\right| = \left|\sum_{i=2}^{n+m} (1-\alpha_i)\,\mathfrak{e}_i\right| \leqq \sum_{i=2}^{n+m} (1-\alpha_i);$$

wegen $\mathfrak{e}_1 = -\sum_{i=2}^{n+m} \alpha_i \mathfrak{e}_i$ ist aber $\sum_{i=2}^{n+m} \alpha_i \geqq 1$ und $\left|\sum_{i=1}^{n+m} \mathfrak{e}_i\right| \leqq n+m-2$. Diese Zahl ist natürlich auch das Maximum.

Es ist also stets:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathfrak{a}_i}{|\mathfrak{a}_i|} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\mathfrak{b}_j}{|\mathfrak{b}_j|} \right| \leqq n+m-2,$$

und da alle $|\mathfrak{a}_i|$, $|\mathfrak{b}_j| > \frac{R}{2(m+n)}$ sind, so ist

$$(6)\quad \sum_{i=1}^{n} \frac{2\mathfrak{a}_i\mathfrak{c}+1}{|\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c}|+|\mathfrak{a}_i|} - \sum_{j=1}^{m} \frac{2\mathfrak{b}_j\mathfrak{c}+1}{|\mathfrak{b}_j+\mathfrak{c}|+|\mathfrak{b}_j|} \leqq n+m-2+o(1).$$

Seien nun einige der $|\mathfrak{a}_i|$ oder $|\mathfrak{b}_j| \leqq \frac{R}{2(m+n)}$; es muß stets eines der $|\mathfrak{a}_i|$ oder eines der $|\mathfrak{b}_j| > \frac{R}{2(m+n)}$ sein. Wir beachten weiter, daß für ein λ mit $0 \leqq \lambda \leqq 1$ und einem beliebigen Vektor $\mathfrak{a}$ gilt:

$$\frac{(\mathfrak{a}-\lambda\mathfrak{c})\,\mathfrak{c}}{|\mathfrak{a}-\lambda\mathfrak{c}|} \leqq \frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})\,\mathfrak{c}+\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}}{|\mathfrak{a}+\mathfrak{c}|+|\mathfrak{a}|} \leqq \frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{c}+\lambda\mathfrak{c})\,\mathfrak{c}}{|\mathfrak{a}+\mathfrak{c}+\lambda\mathfrak{c}|}.$$

Für alle $|\mathfrak{a}_i| \leqq \frac{R}{2(m+n)}$ ersetzen wir $\frac{2\mathfrak{a}_i\mathfrak{c}+1}{|\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c}|+|\mathfrak{a}_i|}$ auf der linken Seite von (4) durch die größeren Werte $\frac{(\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c}+\lambda\mathfrak{c})\,\mathfrak{c}}{|\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c}+\lambda\mathfrak{c}|}$; es seien deren etwa insgesamt n'. Ist nun ein Glied $|\mathfrak{a}_i|$, etwa $|\mathfrak{a}_n| > \frac{R}{2(m+n)}$, so ersetzen wir das entsprechende Glied auf der linken Seite von (4) durch $\frac{(\mathfrak{a}_n-n'\mathfrak{c}-n'\lambda\mathfrak{c})\,\mathfrak{c}}{|\mathfrak{a}_n-n'\mathfrak{c}-n'\lambda\mathfrak{c}|}$, was für dieses Glied

nur eine Änderung $o(1)$ — und zwar gleichmäßig für alle $\mathfrak{a}_i$ — ergibt. Gibt es aber kein Glied $|\mathfrak{a}_i| > \frac{R}{2(m+n)}$, so muß es ein $\mathfrak{b}_j$, etwa $|\mathfrak{b}_m| > \frac{R}{2(m+n)}$ geben; dann ersetzen wir das entsprechende Glied auf der linken Seite von (4) durch $\frac{(\mathfrak{b}_m + n'\mathfrak{c} + n'\lambda\mathfrak{c})\mathfrak{c}}{|\mathfrak{b}_m + n'\mathfrak{c} + n'\lambda\mathfrak{c}|}$, was für dieses Glied wieder nur eine Änderung $o(1)$ bedeutet.

Analog ist mit den $\mathfrak{b}_j$ zu verfahren, für welche $|\mathfrak{b}_j| \leqq \frac{R}{2(m+n)}$ ist: wir ersetzen $\frac{2\mathfrak{b}_j\mathfrak{c}+1}{|\mathfrak{b}_j+\mathfrak{c}|+|\mathfrak{b}_j|}$ auf der linken Seite von (4) durch die kleineren Werte $\frac{(\mathfrak{b}_j - \lambda\mathfrak{c})\mathfrak{c}}{|\mathfrak{b}_j - \lambda\mathfrak{c}|}$; es seien derer etwa m'. Gibt es ein $\mathfrak{b}_j$ mit $|\mathfrak{b}_j| > \frac{R}{2(m+n)}$, so ersetzen wir das entsprechende Glied auf der linken Seite von (4) durch $\frac{(\mathfrak{b}_j + m'\lambda\mathfrak{c})\mathfrak{c}}{|\mathfrak{b}_j + m'\lambda\mathfrak{c}|}$, was für dieses Glied nur eine Änderung $o(1)$ ergibt. Gibt es aber kein $|\mathfrak{b}_j| > \frac{R}{2(m+n)}$, so gibt es ein $|\mathfrak{a}_i| > \frac{R}{2(m+n)}$ und wir ersetzen das entsprechende Glied auf der linken Seite von (4) durch $\frac{(\mathfrak{a}_i - m'\lambda\mathfrak{c})\mathfrak{c}}{|\mathfrak{a}_i - m'\lambda\mathfrak{c}|}$, was wieder nur eine Änderung $o(1)$ gibt.

Für die so abgeänderte und — abgesehen von Größen $o(1)$ — vergrößerte linke Seite von (4) ist dieselbe Überlegung wie oben anzuwenden: es ist dann wieder

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2\mathfrak{a}_i\mathfrak{c}+1}{|\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c}|+|\mathfrak{a}_i|} - \sum_{j=1}^{m} \frac{2\mathfrak{b}_j\mathfrak{c}+1}{|\mathfrak{b}_j+\mathfrak{c}|+|\mathfrak{b}_j|} \leqq m+n-2+o(1).$$

Damit ist (3) vollständig nachgewiesen.

Dem weiteren Beweis von (2) schicken wir folgende Bemerkung voraus: Wir können für diesen Beweis alle Vektoren $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_j$, $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c} \neq 0$ voraussetzen. Ist ein $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c} = 0$ oder ein $\mathfrak{b}_j = 0$, so reduziert sich (2) auf eine Summe von Dreiecksungleichungen. Die beiden anderen Fälle erledigen sich durch Rekursion:

Ist ein $\mathfrak{a}_i = 0$, so kommt man auf den Fall von $m + n - 1$ Vektoren, indem man den betreffenden $\mathfrak{a}$-Vektor streicht.

Ist ein $\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c} = 0$, etwa $\mathfrak{b}_m = -\mathfrak{c}$, so lassen wir das Glied mit $\mathfrak{b}_m$ fort, und da dadurch $\sum \mathfrak{b}_j$ um $\mathfrak{c}$ vermehrt wird, fügen wir zu den $\mathfrak{c}$-Vektoren noch $\mathfrak{a}_{n+1} = \mathfrak{c}$ hinzu; die Gesamtzahl der $\mathfrak{a}$- und $\mathfrak{b}$-Vektoren bleibt $m + n$. Es ist dann:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{a}_i|) - \sum_{j=1}^{m-1} (|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{b}_j|)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{a}_i|) - \sum_{j=1}^{m} (|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{b}_j|).$$

Es bleibt dann noch der Fall, daß alle m $\mathfrak{b}$-Vektoren $= -\mathfrak{c}$ sind. Führt man den angegebenen Vorgang m-mal durch, so erhalten wir die zu beweisende Ungleichung:

$$\sum_{i=1}^{n+m} (|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{a}_i|) \leqq n + m - 2,$$

wo $\sum_{i=1}^{n+m} \mathfrak{a}_i = 0$ und $\mathfrak{a}_{n+m} = \mathfrak{c}$ ist.

Es ist dann $\mathfrak{a}_{n+m-1} = -\mathfrak{c} - \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2 - \cdots - \mathfrak{a}_{n+m-2}$ und die zu beweisende Ungleichung:

$$\sum_{i=1}^{n+m-2} (|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{a}_i|) - (|\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_{n+m-2} + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_{n+m-2}|) \leqq n + m - 3,$$

also die Ungleichung (2) mit einem $\mathfrak{b}$- und $n + m - 2$ $\mathfrak{a}$-Vektoren.

Für $n + m = 2$ ist die Ungleichung (2) ohne weiteres zu verifizieren; sonst wird an keiner Stelle des Beweises Rekursion verwendet. Wir können daher fortan die Ungleichung (2) für die genannten Fälle als bewiesen annehmen.

Aus unserer Ungleichung (3) ergibt sich:

Soll die Funktion

$$f(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_j) = \sum_{i=1}^{n} (|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{a}_i|) - \sum_{j=1}^{m} (|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{b}_j|)$$

auch Werte $> m + n - 2$ annehmen, so müßten auch Extremwerte $> m + n - 2$ auftreten; wir gehen also daran, die Extreme von $f(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_j)$ aufzusuchen. Wir ersetzen dabei $\mathfrak{b}_m = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i - \sum_{j=1}^{m-1} \mathfrak{b}_j$; wir bemerken ferner, daß mit Ausnahme der Stellen, an denen einer der Vektoren $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}_j$, $\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}$ verschwindet, f stets differenzierbar ist; in den ausgeschlossenen Fällen konnten wir (2) als bewiesen annehmen.

Für die Extreme von f gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_i} = \frac{\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}}{|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}|} - \frac{\mathfrak{a}_i}{|\mathfrak{a}_i|} - \frac{\mathfrak{b}_m + \mathfrak{c}}{|\mathfrak{b}_m + \mathfrak{c}|} + \frac{\mathfrak{b}_m}{|\mathfrak{b}_m|} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$-\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{b}_j} = \frac{\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}}{|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}|} - \frac{\mathfrak{b}_i}{|\mathfrak{b}_i|} - \frac{\mathfrak{b}_m + \mathfrak{c}}{|\mathfrak{b}_m + \mathfrak{c}|} + \frac{\mathfrak{b}_m}{|\mathfrak{b}_m|} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m - 1)$$

oder es ist für $i = 1 \ldots n$, $j = 1 \ldots m$:

$$\frac{\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}}{|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}|} - \frac{\mathfrak{a}_i}{|\mathfrak{a}_i|} = \frac{\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}}{|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}|} - \frac{\mathfrak{b}_j}{|\mathfrak{b}_j|} = \mathfrak{A}. \tag{7}$$

Wir können annehmen, daß für höchstens einen der $\mathfrak{a}$- und $\mathfrak{b}$-Vektoren

$$|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| = |\mathfrak{a}_i| \quad \text{bzw.} \quad |\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}| = |\mathfrak{b}_j| \tag{8}$$

gilt: andernfalls folgte (2) schon aus Dreiecksungleichungen. Gibt es einen

$\mathfrak{a}$- oder $\mathfrak{b}$-Vektor, für den (8) gilt, so ist der Vektor $\mathfrak{A} = \mathfrak{c} \cdot \alpha$ ($\alpha \neq 0$) und alle $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$, für welche (8) nicht gilt, sind linear von $\mathfrak{c}$ abhängig: unter den Vektoren $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$ sind also höchstens zwei linear unabhängig. Gibt es endlich keinen Vektor, für den (8) gilt, so sind alle Vektoren $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$ linear aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{c}$ zusammenzusetzen.

Die Vektoren $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$ liegen also auf einer ebenen Vektormannigfaltigkeit $\mathfrak{E}$. Bezeichnet man mit $(\mathfrak{v}, \mathfrak{w})$ den orientierten Winkel zweier Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ aus $\mathfrak{E}$, so folgt mit einem beliebigen Vektor $\mathfrak{e} \neq 0$ aus $\mathfrak{E}$ aus (7):

$$\begin{aligned}(9)\qquad &\sin\frac{(\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c},\mathfrak{e})+(\mathfrak{a}_i,\mathfrak{e})}{2}\sin\frac{(\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c},\mathfrak{e})-(\mathfrak{a}_i,\mathfrak{e})}{2}\\ &=\sin\frac{(\mathfrak{b}_j+\mathfrak{c},\mathfrak{e})+(\mathfrak{b}_j,\mathfrak{e})}{2}\sin\frac{(\mathfrak{b}_j+\mathfrak{c},\mathfrak{e})-(\mathfrak{b}_j,\mathfrak{e})}{2}.\end{aligned}$$

Denkt man sich den Vektor $\mathfrak{e}$ um $\frac{\pi}{2}$ gedreht, quadriert und addiert die so entstehenden Gleichungen (9), so wird für alle i und j:

$$(10)\qquad \sin^2\frac{(\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c},\mathfrak{e})-(\mathfrak{a}_i,\mathfrak{e})}{2}=\sin^2\frac{(\mathfrak{b}_j+\mathfrak{c},\mathfrak{e})-(\mathfrak{b}_j,\mathfrak{e})}{2}=\varrho.$$

Ist $\varrho = 0$, so ist $(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}, \mathfrak{e}) - (\mathfrak{a}_i\mathfrak{e}) = (\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}, \mathfrak{a}_i) \equiv 0\,(2\pi)$, also alle $\mathfrak{a}_i$ und ebenso alle $\mathfrak{b}_j$ sind linear von $\mathfrak{c}$ abhängig: dieser Fall wird am Ende des Beweises behandelt.

Ist $\varrho \neq 0$, so folgt aus (9) weiter:

$$(11)\qquad \sin[(\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c},\mathfrak{e})+(\mathfrak{a}_i,\mathfrak{e})]=\sin[(\mathfrak{b}_j+\mathfrak{c},\mathfrak{e})+(\mathfrak{b}_j,\mathfrak{e})]$$

und wegen der Willkür von $\mathfrak{e}$:

$$(12)\qquad (\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c},\mathfrak{e})+(\mathfrak{a}_i,\mathfrak{e})\equiv(\mathfrak{b}_j+\mathfrak{c},\mathfrak{e})+(\mathfrak{b}_j,\mathfrak{e})\,(2\pi).$$

Aus (10) folgt wieder entweder

$$(13\,a)\qquad (\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c},\mathfrak{e})-(\mathfrak{a}_i,\mathfrak{e})\equiv(\mathfrak{b}_j+\mathfrak{c},\mathfrak{e})-(\mathfrak{b}_j,\mathfrak{e})\,(2\pi)$$

oder

$$(13\,b)\qquad (\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c},\mathfrak{e})-(\mathfrak{a}_i,\mathfrak{e})\equiv(\mathfrak{b}_j,\mathfrak{e})-(\mathfrak{b}_j+\mathfrak{c},\mathfrak{e})\,(2\pi).$$

Aus (12) und (13a) folgt

$$(\mathfrak{a}_i,\mathfrak{e})\equiv(\mathfrak{b}_j,\mathfrak{e})\,(\pi),$$
$$(\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c},\mathfrak{e})\equiv(\mathfrak{b}_j+\mathfrak{c},\mathfrak{e})\,(\pi).$$

Es sind also $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$ linear abhängig und ebenso $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}$. Dann ist entweder $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}_j$ oder es sind sowohl $\mathfrak{a}_i$ als $\mathfrak{b}_j$ linear von $\mathfrak{c}$ abhängig. Den ersteren Fall können wir gleich ausscheiden, da dann (2) sofort aus Dreiecksungleichungen folgt.

Aus (12) und (13b) folgt

$$(\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c},\mathfrak{e})\equiv(\mathfrak{b}_j,\mathfrak{e})\,(\pi),$$
$$(\mathfrak{a}_i,\mathfrak{e})\equiv(\mathfrak{b}_j+\mathfrak{c},\mathfrak{e})\,(\pi).$$

Es sind also $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}_j$ linear abhängig und ebenso $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}$. Dann sind entweder sowohl $\mathfrak{a}_i$ als $\mathfrak{b}_j$ von $\mathfrak{c}$ linear abhängig, oder wenn weder $\mathfrak{a}_i$ noch $\mathfrak{b}_j$ linear von $\mathfrak{c}$ abhängen, muß $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{b}_j + \mathfrak{c} = 0$ gelten. Wir zeigen, daß dieser letztere Fall nicht eintreten kann, sondern daß alle $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$ linear von $\mathfrak{c}$ abhängig sein müssen. Wäre etwa $\mathfrak{a}_1$ nicht von $\mathfrak{c}$ linear abhängig, so müßte, und zwar mit jedem $\mathfrak{b}_j$ gelten: $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_j + \mathfrak{c} = 0$, d. h. alle $\mathfrak{b}_j$ wären einander gleich und nicht von $\mathfrak{c}$ linear abhängig; dann müßten aber auch wieder alle $\mathfrak{a}_i$ der Gleichung genügen $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{b}_j + \mathfrak{c} = 0$ und ebenfalls alle $\mathfrak{a}_i$ einander gleich und nicht von $\mathfrak{c}$ linear abhängig sein. Es wäre aber dann:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{b}_j = n\,\mathfrak{a}_1 = m\,\mathfrak{b}_1.$$

Weiter müßte gelten $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{c} = 0$, also $\mathfrak{a}_1 = -\frac{m}{m+n}\,\mathfrak{c}$, also $\mathfrak{a}_1$ entgegen der Voraussetzung von $\mathfrak{c}$ linear abhängig.

Es ist also schließlich nur der Fall zu untersuchen, daß alle $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$ linear von $\mathfrak{c}$ abhängig sind.

Sei also $\mathfrak{a}_i = \alpha_i \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}_j = \beta_j \mathfrak{c}$; dann ist die Ungleichung zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n} (|\alpha_i + 1| - |\alpha_i|) - \sum_{j=1}^{m} (|\beta_j + 1| - |\beta_j|) \leqq n + m - 2,$$

wo also die α_i und β_j beliebige reelle Zahlen mit $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_j$ und $m \geqq 1$ sei.

Wir zerlegen die n Zahlen α_i in drei Klassen: mit α_i' bezeichnen wir die Zahlen α_i mit $\alpha_i' > 0$, mit α_i'' die mit $-1 \leqq \alpha_i'' \leqq 0$ und mit α_i''' die mit $\alpha_i''' < -1$; die Anzahlen der α_i in diesen drei Klassen seien n', n'', n''', also $n' + n'' + n''' = n$. Analog zerlegen wir die m Zahlen β_j; deren Anzahlen seien m', m'', m''' und $m' + m'' + m''' = m$. Je nachdem α_i der ersten, zweiten oder dritten Klasse angehört, ist dann $|\alpha_i + 1| - |\alpha_i| = 1$, $1 - 2|\alpha_i''|$, -1; ebenso für die β_j.

Die zu beweisende Ungleichung hat dann die folgende Gestalt:

$$-\Sigma |\alpha_i''| + \Sigma |\beta_i''| \leqq n''' + m' + m'' - 1.$$

Wegen $\Sigma |\beta_i''| \leqq m''$ ist diese Ungleichung sicher erfüllt, wenn $n''' > 0$ oder $m' > 0$ sind. Wir nehmen also weiterhin $n''' = m' = 0$ an und hätten dann zu zeigen:

$$\Sigma |\beta_i''| \leqq \Sigma |\alpha_i''| + m'' - 1.$$

Nun ist

$$-\Sigma |\beta_i''| + \Sigma \beta_i''' = \Sigma \alpha' - \Sigma |\alpha_i''|,$$

also ist zu zeigen

$$-\Sigma \alpha_i' + \Sigma \beta_i''' \leqq m'' - 1;$$

wäre nun

$$-\Sigma \alpha_i' + \Sigma \beta_i''' > m'' - 1,$$

so müßte, weil links eine Zahl $\leqq 0$ steht, $m'' = 0$ sein und weiter

$$|-\Sigma \alpha_i' + \Sigma \beta_i'''| < 1$$

und

$$\Sigma |\beta_i'''| < 1$$

und wegen $|\beta_i'''| > 1$ ist auch $m''' = 0$. Also wäre $m = m' + m'' + m''' = 0$ entgegen unserer Voraussetzung.

Bemerkenswert ist die Voraussetzung $m \geqq 1$, während die Anzahl der $\mathfrak{a}$-Vektoren nicht beschränkt ist.

Für den Spezialfall $m = 1$, $n = 2$ hat Herr Hlawka mir einen rein algebraischen Beweis angegeben:

Es ist, wenn man die Relation

$$|\mathfrak{a}|^2 + |\mathfrak{b}|^2 + |\mathfrak{c}|^2 + |\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}|^2 = |\mathfrak{a} + \mathfrak{b}|^2 + |\mathfrak{b} + \mathfrak{c}|^2 + |\mathfrak{c} + \mathfrak{a}|^2$$

berücksichtigt:

$$\begin{aligned} &|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{c}| - |\mathfrak{a} + \mathfrak{b}| - |\mathfrak{b} + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{c} + \mathfrak{a}| + |\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}| \\ &= (|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| - |\mathfrak{a} + \mathfrak{b}|)\left(1 - \frac{|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{a} + \mathfrak{b}|}{|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{c}| + |\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}|}\right) \\ &+ (|\mathfrak{b}| + |\mathfrak{c}| - |\mathfrak{b} + \mathfrak{c}|)\left(1 - \frac{|\mathfrak{b}| + |\mathfrak{c}| + |\mathfrak{b} + \mathfrak{c}|}{|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{c}| + |\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}|}\right) \\ &+ (|\mathfrak{c}| + |\mathfrak{a}| - |\mathfrak{c} + \mathfrak{a}|)\left(1 - \frac{|\mathfrak{c}| + |\mathfrak{a}| + |\mathfrak{c} + \mathfrak{a}|}{|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{c}| + |\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}|}\right) \geqq 0. \end{aligned}$$

Wir geben schließlich noch einige Ungleichungen, die sich als Spezialfälle von (2) ergeben.

Für $m = 2$, $n = 1$ ist mit drei willkürlichen Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$:

$$|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| - |\mathfrak{c}| + |\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}| \leqq |\mathfrak{a} + \mathfrak{b}| + |\mathfrak{b} + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{c} + \mathfrak{a}|.$$

Für $m = 3$, $n = 0$ ist:

$$|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{a} + \mathfrak{b}| \leqq |\mathfrak{a} + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{b} + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{a} + \mathfrak{b} - \mathfrak{c}| + |\mathfrak{c}|.$$

Für beliebige Vektoren $\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_m$ und $\mathfrak{c}$ gilt ($n = 1$):

$$\sum_{j=1}^{m} |\mathfrak{b}_j| - \left|\sum_{j=1}^{m} \mathfrak{b}_j\right| \leqq \sum_{j=1}^{m} |\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}| - \left|\sum_{j=1}^{m} \mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}\right| + (m-1)\,|\mathfrak{c}|.$$

(Eingegangen am 9. Februar 1942.)

Über gewisse Halbverbände und kommutative Semigruppen.

Erster Teil.

Von

Fritz Klein-Barmen in Wuppertal.

Einleitung.

Ein *Halbverband* in bezug auf eine Verknüpfung $\circ$ kann nicht zugleich eine kommutative *Semigruppe* in bezug auf $\circ$ sein, wenn man von dem belanglosen Fall absieht, daß nur ein einziges Element vorhanden ist. Die Gleichung

$$a \circ x = a$$

hat nämlich, wenn der Operationsbereich ein Halbverband ist, im allgemeinen mehrere Lösungen, dagegen höchstens eine Lösung, wenn es sich um eine Semigruppe handelt. Noch viel weniger kann natürlich ein *Verband* zu einer Semigruppe ausgebaut werden, wenn dabei verlangt wird, daß die Semigruppenverknüpfung zugleich eine der beiden Verbandsverknüpfungen sein soll.

Andererseits stimmen aber Halbverband und kommutative Semigruppe in ihrer Konstitution weitgehend überein. Beide Bereiche haben in dem weiterhin als *Holoid* bezeichneten Operationsbereich ihr gemeinsames Fundament. Eine wichtige Etappe auf dem Wege zum Holoid bildet das *Assoziativ*. In der vorliegenden Arbeit entwickeln und untersuchen wir die in Assoziativ und Holoid verankerte Begriffswelt. Eine besonders bedeutsame Klasse von Holoiden soll Gegenstand einer weiteren Arbeit sein.

§ 1.

Assoziativ und Holoid.

1. Grundgegebenheit sei eine von der Nullmenge verschiedene, im übrigen endliche oder unendliche Menge M, deren Elemente einer durch $\circ$ symbolisierten *Verknüpfung* fähig sind. Die Verknüpfung werde durch die folgenden *Axiome* näher bestimmt:

A I. Sind a, b zwei beliebige Elemente aus M, so gibt es in M ein Element c derart, daß gilt

$$a \circ b = c.$$

A II. Für drei beliebige Elemente a, b, c aus M gilt

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

A III. Für zwei beliebige Elemente a, b aus M gilt

$$a \circ b = b \circ a.$$

Erklärung 1. Eine Menge M mit einer den Axiomen A I und A II genügenden Elementverknüpfung $\circ$ heiße ein *Assoziativ*[1]) in bezug auf $\circ$. Ist überdies A III in Kraft, so sprechen wir von einem *kommutativen* Assoziativ. Ein Assoziativ werde als *endlich* oder *unendlich* bezeichnet, je nachdem es aus endlich oder unendlich vielen Elementen besteht. Unter der *Ordnung* eines endlichen Assoziativs werde die Anzahl der verschiedenen Elemente verstanden, aus denen das Assoziativ besteht.

Da wir es im allgemeinen nur mit einer einzigen Elementverknüpfung zu tun haben, können keine Mißverständnisse entstehen, wenn an Stelle von $a \circ b$ einfach ab geschrieben wird. Wir machen in dieser Arbeit von beiden Schreibweisen Gebrauch.

Weiterhin sei M ein kommutatives Assoziativ.

Aus A I und A II folgt, daß für $n \geqq 1$ das „Produkt"

$$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_1 \ldots a_n$$

existiert. Dasselbe geht, wenn insbesondere

$$a_\nu = a \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

ist, in die „Potenz" a^n über.

Ohne auf den Beweis einzugehen, merken wir den folgenden Satz an, der besagt, daß in M die gewöhnlichen Potenzregeln in Kraft sind:

Satz 1. *Sind m, n positive ganze Zahlen, so gilt für beliebige Elemente a, b aus M*

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad a^m b^m = (ab)^m.$$

Erklärung 2. Ein Element e aus M heiße ein *ausgezeichnetes Element erster Art*, wenn für jedes Element a aus M

$$a \circ e = a$$

[1]) Die Bezeichnung „Assoziativ" für derartige Bereiche habe ich in [A. V. 4], S. 87 vorgeschlagen. — In das Literaturverzeichnis am Schluß der jetzigen Arbeit habe ich auch einige neuere Untersuchungen aufgenommen, die im Zusammenhang mit der Theorie der Verbände stehen, ohne daß in ihnen das in der vorliegenden Arbeit behandelte Problem unmittelbar berührt wird.

gilt. Ferner heiße ein Element f aus M ein *ausgezeichnetes Element zweiter Art*, wenn für jedes Element a aus M

$$a \circ f = f$$

gilt.

Satz 2. *Es gibt in M höchstens ein ausgezeichnetes Element erster Art und höchstens ein ausgezeichnetes Element zweiter Art.*

Beweis. Sind e und e' ausgezeichnete Elemente erster Art, so gilt

$$e'e = e', \quad ee' = e,$$

woraus nach A III die Identität von e und e' folgt. Entsprechend beweist man den zweiten Teil der Behauptung.

Dagegen reichen die bisherigen Axiome nicht zur Sicherung der *Existenz* der ausgezeichneten Elemente aus. So gibt es sowohl kommutative Assoziative mit einem ausgezeichneten Element erster Art als auch solche ohne ein derartiges Element; ebenso gibt es sowohl kommutative Assoziative mit einem ausgezeichneten Element zweiter Art als auch solche ohne ein derartiges Element. Beispiele zeigen, daß alle vier durch Kombination sich ergebenden Fälle realisiert werden können.

2. Wir engen den Begriff des kommutativen Assoziativs dadurch ein, daß wir auf M zwei weitere *Axiome* einwirken lassen:

A IV. Es gibt in M ein ausgezeichnetes Element erster Art.

A V. Sind a, b und x, y Elemente aus M derart, daß

$$a = b \circ x, \quad b = a \circ y$$

gilt, so ist

$$a = b.$$

Erklärung 3. Ein kommutatives Assoziativ in bezug auf $\circ$, das den Axiomen A IV und A V genügt, heiße ein *Holoid*[2]) in bezug auf $\circ$. Das nach Satz 2 eindeutig bestimmte ausgezeichnete Element erster Art werde stets mit e bezeichnet.

Das Axiom A V hat zur Folge, daß ein Holoid in bezug auf $\circ$ nicht zugleich eine *Gruppe* in bezug auf $\circ$ sein kann, wenigstens keine solche, die aus mehr als einem Element besteht. Wäre M nämlich eine Gruppe in bezug auf $\circ$, so müßte es zu zwei verschiedenen Elementen a, b zwei Elemente x, y geben derart, daß

$$a = bx, \quad b = ay$$

gilt, was im Widerspruch zu A V steht.

---

[2]) Zur Verhütung von Mißverständnissen mache ich darauf aufmerksam, daß der „holoide Bereich" von J. KÖNIG kein Holoid im Sinne der jetzigen Erklärung 3 ist; vgl. KÖNIG [1], S. 7.

Dagegen kann ein Holoid in bezug auf $\circ$ sehr wohl auch eine *Semigruppe* in bezug auf $\circ$ sein; wir gehen darauf in § 5 genauer ein.

Hinsichtlich der *endlichen* Holoide macht der folgende Satz eine bemerkenswerte Feststellung, wobei noch zu erwähnen ist, daß bei dem Beweis desselben das Axiom A IV nicht in Aktion tritt.

Satz 3. *Jedes endliche Holoid besitzt ein ausgezeichnetes Element zweiter Art.*

Beweis. Es sei M ein endliches Holoid von der Ordnung m. Die Behauptung ist für $m = 1$ richtig; also werde $m > 1$ angenommen. Sind

$$a_1, \ldots, a_m$$

die verschiedenen Elemente von M, so existiert das durch

$$f = a_1 \ldots a_m \tag{1}$$

bestimmte Element f und infolgedessen auch für jedes a_μ das durch

$$a'_\mu = f a_\mu \tag{2}$$

bestimmte Element a'_μ. Weiter gibt es für jedes a'_μ ein Element b_μ derart, daß

$$f = a'_\mu b'_\mu \tag{3}$$

gilt; man erhält b'_μ dadurch, daß man auf der rechten Seite von (1) das Element a'_μ isoliert und die übrigen Elemente zu einem einzigen Element zusammenfaßt. Aus (2) und (3) folgt nach A V

$$a'_\mu = f \qquad (\mu = 1, \ldots, m),$$

so daß f wegen (2) das ausgezeichnete Element zweiter Art ist.

Was die *unendlichen* Holoide anbetrifft, so kann man sowohl solche mit einem ausgezeichneten Element zweiter Art als auch solche ohne ein derartiges Element konstruieren.

§ 2.

Die Beziehung $\supseteq$.

Für ein eingehenderes Studium der Holoide reicht die *verknüpfungstheoretische* Betrachtungsweise, so wertvoll sie auch ist, allein nicht aus. Einen tieferen Einblick in die Feinstruktur der Holoide gewinnt man erst, wenn die *beziehungstheoretische*[3]) Betrachtungsweise hinzukommt. Die wichtigste Beziehung ist, unter M weiterhin ein Holoid verstanden, die in der folgenden Erklärung beschriebene Relation $\supseteq$:

[3]) Das Wort „Beziehung" ist hier in engerer Bedeutung gebraucht; es ist darunter eine *zweigliedrige* Beziehung zu verstehen.

Erklärung 4. Sind a, b Elemente aus M, so sei dann und nur dann

$$a \supseteq b,$$

wenn es in M wenigstens ein Element x gibt derart, daß

$$a = b \circ x$$

gilt. Mit $a \supseteq b$ sei $b \subseteq a$ gleichbedeutend. Findet $a \supseteq b$ statt, so heiße a ein *Oberelement* von b und umgekehrt b ein *Unterelement* von a.

Die besondere Bedeutung der Beziehung $\supseteq$ beruht darauf, daß vermöge derselben der Begriff des Holoids rein beziehungstheoretisch aufgebaut werden kann, worauf wir aber in der vorliegenden Arbeit nicht weiter eingehen.

Satz 4. 1. *Mit*

$$a \supseteq b, \quad b \supseteq c$$

gilt

$$a \supseteq c.$$

Beweis. Aus

$$a = bx, \quad b = cy$$

folgt

$$a = cyx.$$

Satz 4. 2. *Für jedes a gilt*

$$a \supseteq a, \quad a \supseteq e$$

und, falls das ausgezeichnete Element zweiter Art[4]) *existiert, auch*

$$f \supseteq a.$$

Beweis: Axiom A IV und Erklärung 2.

Satz 4. 3. *Mit*

$$a \supseteq b, \quad b \supseteq a$$

gilt

$$a = b.$$

Beweis: Axiom A V.

Diese drei Sätze besagen, daß M eine in bezug auf die Beziehung $\supseteq$ *teilweise geordnete* Menge ist. Insbesondere gibt uns der Satz 4. 2 die Berechtigung, e auch als die *untere Spitze* oder das *unterste Element* von M und entsprechend f — vorausgesetzt, daß f existiert — als die *obere Spitze* oder das *oberste Element* von M zu bezeichnen. Hinzuzufügen ist noch, daß bei einer rein beziehungstheoretischen Begründung des Holoidbegriffes — in der vorliegenden Arbeit handelt es sich um eine Axiomatisierung, die im wesentlichen verknüpfungstheoretischer Natur ist — die drei letzten Sätze zu Axiomen erhoben werden.

[4]) Dieses Element werde immer mit f bezeichnet, es sei denn, daß einmal eine andere Bezeichnung zweckmäßiger ist.

Satz 5. *Sind*

$$a_1, \ldots, a_n \tag{4}$$

Elemente aus M *derart, daß*

$$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu = e$$

gilt, so ist

$$a_\nu = e \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt $e \supseteq a_\nu$, woraus sich die Behauptung nach den Sätzen 4. 2 und 4. 3 ergibt.

Satz 6. *Zu vorgegebenen Elementen* (4) *gibt es mindestens ein Element* x *derart, daß gilt*

$$x \supseteq a_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Beweis. Das Produkt der Elemente (4) hat die gewünschte Eigenschaft.

Ohne weiteres leuchtet die Richtigkeit der beiden folgenden Sätze ein:

Satz 7. 1. *Mit*

$$a_\nu \supseteq b_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

gilt

$$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu \supseteq \prod_{\nu=1}^{n} b_\nu.$$

Satz 7. 2. *Für* $n \geqq k$ *gilt*

$$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu \supseteq \prod_{\varkappa=1}^{k} a_\varkappa.$$

Mit $a \supseteq b$ ist sowohl $a = b$ als auch $a \neq b$ verträglich. Im zweiten Fall kann man eine weitere *Beziehung* einführen:

Erklärung 5. Daß

$$a \supseteq b, \quad a \neq b$$

stattfindet, werde auch durch

$$a \supset b$$

zum Ausdruck gebracht. Mit $a \supset b$ sei $b \subset a$ gleichbedeutend.

Der Satz 4. 1 kann nun leicht folgendermaßen verschärft werden:

Satz 8. *Mit*

$$a \supset b, \quad b \supseteq c \quad \textit{bzw.} \quad a \supseteq b, \quad b \supset c$$

gilt

$$a \supset c.$$

Erklärung 6. Es seien a, b Elemente aus M derart, daß $a \supset b$ gilt. Gibt es in M kein Element x derart, daß

$$a \supset x, \quad x \supset b$$

gilt, so heiße a ein *oberer Nachbar* von b und umgekehrt b ein *unterer Nachbar* von

Satz 9. *Ist M endlich und sind a, b Elemente aus M derart, daß $a \supset b$ gilt, so hat a mindestens einen unteren Nachbarn und b mindestens einen oberen Nachbarn.*

Beweis. Aus Symmetriegründen genügt es, den ersten Teil der Behauptung zu beweisen. Ist b selbst ein unterer Nachbar von a, so ist die Behauptung richtig. Ist b kein unterer Nachbar von a, so gibt es ein Element b_1 derart, daß

$$a \supset b_1, \quad b_1 \supset b$$

gilt. Wir können also $a \supset b$ durch $a \supset b_1$ ersetzen und wie vorher schließen. Das damit eingeleitete Verfahren liefert eine endliche Folge von Elementen

$$b, \ b_1, \ b_2, \ \ldots.$$

Wegen

$$b \subset b_1 \subset b_2 \subset \cdots$$

bricht diese Folge mit einem Element b_r ab, das sich leicht als ein unterer Nachbar von a erweist.

Es ist zu beachten, daß der letzte Satz nur unter gewissen Einschränkungen auf *unendliche* Holoide ausgedehnt werden kann.

§ 3.

Die Beziehung $\perp$.

Auf der im vorhergehenden Paragraphen geschaffenen Basis führen wir eine weitere wichtige Holoidbeziehung ein:

Erklärung 7. Sind a, b Elemente aus M derart, daß das System

$$a \supseteq x, \quad b \supseteq x$$

nur die sicher vorhandene Lösung $x = e$ besitzt, so mögen a und b *fremd* zueinander heißen. Daß a und b fremd zueinander sind, werde durch $a \perp b$ ausgedrückt.

Satz 10. 1. *Mit $a \perp b$ gilt $b \perp a$.*

Satz 10. 2. *Für jedes a gilt $a \perp e$.*

Satz 11. *Sind a, b und a', b' Elemente aus M derart, daß*

$$a \perp b, \quad a \supseteq a', \quad b \supseteq b'$$

gilt, so ist auch

$$a' \perp b'.$$

Beweis. Die Behauptung sei falsch. Dann gibt es ein Element x derart, daß

$$a' \supseteq x, \quad b' \supseteq x, \quad x \neq e$$

gilt, woraus nach Satz 4.1

$$a \supseteq x, \quad b \supseteq x$$

folgt, was der Voraussetzung widerspricht.

Satz 12. 1. *Mit*

$$a \supseteq b, \quad a \perp b$$

gilt

$$b = e.$$

Beweis. Andernfalls hätte das System

$$a \supseteq x, \quad b \supseteq x$$

die von e verschiedene Lösung $x = b$.

Satz 12. 2. *Mit*

$$a = b, \quad a \perp b$$

gilt

$$a = b = e.$$

Beweis: Satz 12. 1.

Satz 13. 1. *Sind die n Elemente*

$$a_1, \ldots, a_n \qquad (n \geqq 2)$$

zu je zweien fremd und ist

$$c = a_1 \ldots a_n,$$

so gilt mit

(5) $$a_\nu \neq e \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

für alle a_ν

(6) $$a_\nu \neq c.$$

Beweis. Wäre die Behauptung falsch und fände etwa $a_1 = c$ statt, so wäre

$$a_1 = a_1 \ldots a_n,$$

also

$$a_1 \supseteq a_\nu,$$

was für $\nu \neq 1$ wegen

$$a_1 \perp a_\nu, \quad a_\nu \neq e$$

nach Satz 12. 1 unmöglich ist.

Wie der folgende Satz zeigt, läßt sich der Satz 13. 1 für $n = 2$ umkehren.

Satz 13. 2. *Sind die beiden Elemente a, b zueinander fremd und ist $c = ab$, so gilt mit*

$$a \neq c, \quad b \neq c$$

auch

$$a \neq e, \quad b \neq e.$$

Beweis. Wäre die Behauptung falsch und fände etwa $a = e$ statt, so wäre

$$c = eb = b.$$

Dagegen läßt sich der Satz 13. 1 — das bestätigt das folgende Beispiel — für $n > 2$ nicht mehr umkehren. Die Elemente

$$a_1, \ldots, a_n \qquad (n > 2)$$

seien zu je zweien fremd; es sei

$$c = a_1 \ldots a_n.$$

Weiter sei

$$a_1 \neq e, \quad a_2 \neq e,$$

aber

$$a_3 = \cdots = a_n = e,$$

so daß (5) nicht durchweg in Kraft ist. Trotzdem hat (6) Gültigkeit, wie sich folgendermaßen ergibt. Wegen

$$c \supseteq a_1 \supset e$$

und Satz 8 gilt

$$c \supset e, \quad \text{also} \quad c \neq e,$$

so daß

$$c \neq a_3, \ldots, c \neq a_n$$

ist. Wegen

$$a_1 \perp a_2, \quad c = a_1 a_2, \quad a_1 \neq e, \quad a_2 \neq e$$

ist ferner nach Satz 13. 1

$$c \neq a_1, \quad c \neq a_2.$$

Erklärung 8. Sind die Elemente

$$a_1, \ldots, a_n \qquad (n \geqq 2) \tag{7}$$

zu je zweien fremd und sämtlich von e verschieden, so heiße (7) ein $\mathfrak{F}$-*System*[5]. Gilt überdies

$$a_1 \ldots a_n = a,$$

so heiße (7) ein $\mathfrak{F}$-*System für* a.

Zwei $\mathfrak{F}$-Systeme, die sich nur in der Reihenfolge der konstituierenden Elemente unterscheiden, sollen als nicht wesentlich verschieden angesehen werden.

Satz 14. *Ist* (7) *ein* $\mathfrak{F}$-*System und sind*

$$b_1, \ldots, b_n \tag{8}$$

[5]) Das $\mathfrak{F}$-System ist nicht zu verwechseln mit $\mathfrak{F}$-Folge und $\mathfrak{F}$-Menge in [Verb. 8], S. 231ff. und [Verb. 9], S. 55ff.

Elemente derart, daß

$$a_\nu \supseteq b_\nu \supset e \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

gilt, so ist auch (8) *ein* $\mathfrak{F}$*-System.*

Beweis: Satz 11.

Satz 15. *Es sei* (7) *ein* $\mathfrak{F}$*-System für* a*. Ist dann*

$$b_1, \ldots, b_m \tag{9}$$

ein $\mathfrak{F}$*-System für eines der Elemente* (7)*, etwa für* a_ν*, so ist auch das durch Zusammensetzung entstehende System*

$$a_1, \ldots, a_{\nu-1}, \quad b_1, \ldots, b_m, \quad a_{\nu+1}, \ldots, a_n \tag{10}$$

ein $\mathfrak{F}$*-System für* a*.*

Beweis. Die Elemente (10) sind nach Satz 11 zu je zweien fremd. Sie sind ferner sämtlich von e verschieden. Schließlich gilt

$$a_1 \ldots a_{\nu-1} b_1 \ldots b_m a_{\nu+1} \ldots a_n = a.$$

Der durch (9) bewirkte Übergang von (7) zu (10) möge als eine *Verfeinerung* des ersten $\mathfrak{F}$-Systems bezeichnet werden.

Erklärung 9. Unter einem *optimalen* $\mathfrak{F}$-System für a werde ein $\mathfrak{F}$-System für a verstanden, das nicht weiter verfeinert werden kann.

In dieser Arbeit betrachten wir nur $\mathfrak{F}$-Systeme, die aus endlich vielen Elementen bestehen.

§ 4.

Unabhängigkeit. Einfache Elemente.

Wir bauen die holoide Begriffswelt weiter aus und knüpfen zu diesem Zweck wieder an die Beziehung $\supseteq$ an.

Erklärung 10. Zwei Elemente a, b aus M, für die weder

$$a \supseteq b \quad \text{noch} \quad a \subseteq b$$

gilt, mögen voneinander *unabhängig* oder — nach einem neuerlichen, brieflich gemachten Vorschlag von A. Korselt — *unvergleichbar* heißen. Symbolisch werde die Unabhängigkeit von a und b durch $a \,\mathrm{U}\, b$ und die Abhängigkeit, also Vergleichbarkeit, durch $a \,\overline{\mathrm{U}}\, b$ ausgedrückt.

Satz 16. 1. *Mit* $a \,\mathrm{U}\, b$ *gilt* $b \,\mathrm{U}\, a$*; mit* $a \,\overline{\mathrm{U}}\, b$ *gilt* $b \,\overline{\mathrm{U}}\, a$*.*

Satz 16. 2. *Für jedes* a *gilt*

$$a \,\overline{\mathrm{U}}\, a, \quad a \,\overline{\mathrm{U}}\, e$$

und, falls das oberste Element f *existiert, auch* $a \,\overline{\mathrm{U}}\, f$*.*

Satz 17. *Ist*

$$a_1, \ldots, a_n$$

ein $\mathfrak{F}$*-System, so sind die Elemente* a_ν *zu je zweien voneinander unabhängig.*

Beweis. Wären zwei Elemente, etwa a_1 und a_2, voneinander abhängig, so müßte nach Satz 12. 1 entweder

$$a_1 = e \quad \text{oder} \quad a_2 = e$$

sein.

Erklärung 11. Ein Element a aus M, dessen Unterelemente einschließlich a und e zu je zweien voneinander abhängig sind, heiße ein *einfaches* Element von M.

Satz 18. *Jedes Unterelement eines einfachen Elementes ist selbst ein einfaches Element; insbesondere ist e ein einfaches Element.*

Erklärung 12. Ein von e verschiedenes Element a aus M, das nur e und a als Unterelemente hat, heiße ein *Primelement* von M.

Satz 19. *Jedes Primelement ist zugleich ein einfaches Element.*

Satz 20. *Jedes Primelement ist ein oberer Nachbar von e und umgekehrt.*

Nach Satz 9 enthält also jedes endliche Holoid, das aus mehr als einem Element besteht, Primelemente und damit auch einfache Elemente.

Satz 21. *Für kein einfaches Element gibt es ein* $\mathfrak{F}$*-System.*

Beweis. Wäre a ein einfaches Element mit einem $\mathfrak{F}$-System, so müßten die das $\mathfrak{F}$-System bildenden Elemente als Unterelemente eines einfachen Elementes zu je zweien voneinander abhängig sein, was dem Satz 17 widerspricht.

Erklärung 13. Sind die ein $\mathfrak{F}$-System konstituierenden Elemente

$$a_1, \ldots, a_n \tag{11}$$

sämtlich einfache Elemente, so heiße (11) ein *einfaches* $\mathfrak{F}$-System.

Satz 22. *Ist* (11) *ein einfaches* $\mathfrak{F}$*-System für ein Element a, so ist* (11) *auch ein optimales* $\mathfrak{F}$*-System für a.*

Beweis. Wäre die Behauptung falsch, so müßte sich (11) verfeinern lassen. Es müßte also für mindestens ein Element von (11) ein $\mathfrak{F}$-System geben. Das ist aber nach Satz 21 unmöglich.

Hinzuzufügen ist, daß sich der Satz 22 ohne Inanspruchnahme von weiteren passenden Axiomen nicht umkehren läßt.

Die naheliegende Doppelfrage, welche Elemente eines Holoids mindestens ein bzw. genau ein einfaches $\mathfrak{F}$-System aufweisen, ist so zu beantworten: Nach Satz 21 kommt keinem einfachen Element ein derartiges System zu;

dagegen gibt es im allgemeinen unter den übrigen Elementen — Beispiele bestätigen das — sowohl solche mit keinem als auch solche mit einem als auch solche mit mehr als einem einfachen $\mathfrak{F}$-System. Nur neue Axiome können hier Ordnung schaffen. Die Probleme, die damit erwachsen und nach einer Lösung drängen, sollen im dritten Teil der Arbeit behandelt werden. Dabei wird auch die Frage nach der Umkehrung von Satz 22 ihre Erledigung finden.

§ 5.

Halbverband und Semigruppe.

1. Bereits in der Einleitung wurde bemerkt, daß das kommutative Holoid die gemeinsame Grundlage für gewisse Halbverbände und Semigruppen bildet. In diesem Paragraphen soll auf den hier vorliegenden Sachverhalt näher eingegangen werden. Die genannten Bereiche ergeben sich dadurch, daß das bisher betrachtete Axiomensystem um zwei Axiome — es sind dies aber nicht die am Schluß von § 4 gemeinten — bereichert wird. Die beiden zusätzlichen *Axiome* lauten:

H. Für jedes Element a aus $\boldsymbol{M}$ gilt

$$a \circ a = a.$$

S. Sind a, b und a' Elemente aus $\boldsymbol{M}$ derart, daß

$$a \circ b = a' \circ b$$

gilt, so ist

$$a = a'.$$

Wie ebenfalls in der Einleitung gezeigt worden ist, kann keine Holoidverknüpfung diesen beiden Axiomen zugleich genügen. Im folgenden lassen wir zunächst das Axiom H und sodann das Axiom S auf das als Grundgegebenheit fungierende Holoid $\boldsymbol{M}$ einwirken.

2. Die Axiome A I bis A V und H sind im logischen Sinn nicht alle voneinander unabhängig, wie der folgende Satz besagt:

Satz 23. *Das Axiom* A V *ist eine Folge der Axiome* A II, A III *und* H.

Beweis. Gilt

$$a = bx, \quad b = ay,$$

so ist nach H und A II

$$a = b(bx) = ba, \quad b = a(ay) = ab,$$

woraus sich nach A III die Identität von a und b ergibt, so daß das Axiom A V in Kraft ist.

Im System der Axiome A I bis A V und H kann also A V unterdrückt werden. Man erkennt so, daß das System dieser Axiome einen *Halbverband*[6]) in bezug auf die Verknüpfung $\circ$ definiert. Gibt es für jedes Element a aus M nur *endlich* viele Elemente x, y aus M derart, daß

$$x \circ y = a$$

gilt — und das ist beispielsweise der Fall, wenn M ein endliches Holoid ist —, so bewirkt das Axiom H nicht nur, daß M zu einem Halbverband, sondern darüber hinaus zu einem *Verband*[7]) wird, und zwar zu einem Verband in bezug auf die folgendermaßen erklärten Verknüpfungen $\cup$ und $\cap$: Die Verbandsverknüpfung $\cup$ ist mit der Holoidverknüpfung $\circ$ identisch, so daß also dann und nur dann $a = a \cup b$ ist, wenn $a \supseteq b$ stattfindet; die andere Verbandsverknüpfung ist dadurch bestimmt, daß dann und nur dann $a = a \cap b$ ist, wenn $a \subseteq b$ stattfindet.

3. Wir gehen zur Besprechung des Axioms S über. Durch S wird das Holoid M zu einer *kommutativen Semigruppe* in bezug auf $\circ$ ausgebaut. Anders wie soeben ist A V keine logische Folge von S und den übrigen Axiomen. Gilt

$$a = bx, \quad b = ay,$$

so folgt zwar nach A II und A III

$$ab = abxy$$

und daraus nach A IV und S

$$xy = e;$$

es läßt sich aber nicht

$$x = y = e$$

erzwingen. Ist nämlich die Semigruppe M insbesondere eine *Gruppe* in bezug auf $\circ$, so sind wohl die Axiome A I bis A IV und S realisiert; dagegen ist, wenn der Operationsbereich aus mehr als einem Element besteht, das Axiom A V nicht in Kraft.

4. Wenn es auch unmöglich ist, daß ein Holoid sowohl ein Halbverband als auch eine Semigruppe in bezug auf ein und dieselbe Verknüpfung ist, so ist es doch andererseits keineswegs ausgeschlossen, daß ein und dieselbe Menge M in bezug auf eine erste Verknüpfung $\circ$ ein dem Axiom H genügendes Holoid, also ein Halbverband ist und zugleich in bezug auf eine zweite Verknüpfung $\odot$ ein dem Axiom S genügendes Holoid, also eine kommutative Semigruppe darstellt. Dabei können die Verknüpfungen $\circ$ und $\odot$, die nach dem Vorhergehenden stets voneinander verschieden sind, noch *gekoppelt* sein, d. h. sich gegenseitig mehr oder weniger stark beeinflussen. Von den ver-

[6]) Vgl. [H. 1], S. 33.
[7]) Vgl. [H. 1], S. 43.

schiedenen Koppelungsmöglichkeiten mag eine besonders wichtige hier Erwähnung finden. Bedeuten $\supseteq$ und $\trianglerighteq$ die den Verknüpfungen $\bigcirc$ und $\odot$ entsprechenden und in Erklärung 4 beschriebenen Fundamentalbeziehungen, so wird durch das folgende *Axiom* K eine sehr starke Koppelung ausgesprochen:

K. Sind a, b Elemente aus M derart, daß $a \supseteq b$ gilt, so gilt auch $a \trianglerighteq b$ und umgekehrt.

Nebenbei folgt aus K, daß ein und dasselbe Element von M sowohl untere Spitze in bezug auf $\bigcirc$ als auch in bezug auf $\odot$ ist.

Dafür ein Modell. Ist M die Menge der *natürlichen Zahlen*, d. h. die aus den Zahlen 1, 2, ... bestehende Menge, so darf, wie man sich leicht überzeugt, $a \bigcirc b$ als das *kleinste gemeinschaftliche Vielfache* und $a \odot b$ als das *gewöhnliche Produkt* von a und b aufgefaßt werden. Bei dieser Interpretation haben die beiden Abhängigkeiten

$$a \supseteq b, \quad a \trianglerighteq b$$

denselben Sinn; jede besagt, daß a ein ganzzahliges Vielfaches von b ist, so daß 1 die untere Spitze von M sowohl in bezug auf $\bigcirc$ als auch in bezug auf $\odot$ ist. Demnach ist für dieses Modell das Axiom K in Kraft.

Literaturverzeichnis.

C. Carathéodory.

[4] Über die Differentiation von Maßfunktionen. Math. Zeitschr. **46** (1940), S. 181–189.

[5] Bemerkungen zum Riesz-Fischerschen Satz und zur Ergodentheorie. Abh. aus dem Math. Seminar der Hansischen Universität **14** (1941), S. 351–389.

F. Klein-Barmen.

[Verb. 8] Über die ausgezeichneten Darstellungen der Elemente verzahnter harmonischer Verbände. Deutsche Math. **2** (1937), S. 216–241.

[Verb. 9] Ein weiterer Beitrag zum Problem der Zerlegung der Elemente gewisser harmonischer Verbände. Ebenda **3** (1938), S. 46–64.

[H. 1] Axiomatische Untersuchungen zur Theorie der Halbverbände und Verbände. Ebenda **4** (1939), S. 32–43.

[A. V. 4] Über Verbände mit einer weiteren assoziativen und kommutativen Elementverknüpfung. Math. Zeitschr. **47** (1940), S. 85–104.

[A. V. 5] Molekulare Verbände. Ebenda **47** (1941), S. 373–394.

J. König.

[1] Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen. Leipzig 1903.

F. Riesz.

[1] Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires. Ann. of Math. **41** (1940), S. 174–206.

[2] Sur la théorie ergodique des espaces abstraits. Acta scient. math. (Ungarn) **10** (1941), S. 1–20.

(Eingegangen am 10. Januar 1942.)

Über das asymptotische Verhalten der Lösungen gewisser linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Von

Otto Haupt in Erlangen.

---

1. In einer kürzlich erschienenen Note[1]) beweist Herr D. CALIGO folgendes: In der Differentialgleichung

$$(D) \qquad y'' + f(x)\, y = 0$$

sei $f(x)$ stetig in $[a, +\infty)$ und $f(x) = O(x^{-2-\beta})$ für passendes $\beta > 0$, wenn $x \to +\infty$. Dann existiert und ist endlich $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-1} y(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} y'(x)$ für jede Lösung $y(x)$ von (D).

2. Das eben erwähnte Theorem von Herrn CALIGO ist Spezialfall eines Satzes, welcher im folgenden (Nr. 3 und 4) für lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung formuliert und bewiesen werden soll. Dieser Satz ist auch für $n = 2$ allgemeiner als das Theorem von Herrn CALIGO: Einerseits nämlich umfaßt unser Satz nicht nur homogene, sondern auch inhomogene lineare Differentialgleichungen, andererseits wird, z. B. für den Fall der Differentialgleichung (D) (vgl. Nr. 1), in unserem Satz die in Nr. 1 erwähnte Bedingung $f(x) = O(x^{-2-\beta})$ abgeschwächt zur Forderung, daß $xf(x)$ absolut integrierbar sei. Schließlich erscheint unser Beweisverfahren einfacher als das von Herrn CALIGO.

Am Schlusse vorliegender Note (vgl. Nr. 5) wird auf weitere Verallgemeinerungsmöglichkeiten hingewiesen.

3. Der in Aussicht genommene Satz lautet so:

Satz. *Vor.: Es seien* $h(x)$ *und* $g_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$, *stetig in* $\mathfrak{D} = [a, +\infty)$, $a > 0$. *Ferner sei* $x^{n-1-\nu} g_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$, *absolut integrierbar*[2]) *und es sei* $h(x)$ *integrierbar in* $\mathfrak{D}$.

---

[1]) D. CALIGO, Comportamento asintotico degli integrali dell'equazione $y''(x) + A(x)y(x) = 0$, nella ipotesi $\lim\limits_{x \to +\infty} A(x) = 0$. Boll. Unione Mat. Italiana, ser. II, Anno III, Nr. 4 (1941), S. 286–295 = Publicazioni dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo, Consiglio Nazionale delle Ricerche, Roma 1941, Nr. 100.

[2]) *Alle* im folgenden auftretenden *Limiten* beziehen sich auf $x \to +\infty$ und sind als *eigentlich* (endlich) anzunehmen. Es heißt $F(x)$ integrierbar bzw. absolut integrierbar, wenn der Limes von

$$\int_a^x f(\xi)\, d\xi \quad \text{bzw. von} \quad \int_a^x |F(\xi)|\, d\xi$$

existiert. Die Integrale können dabei als RIEMANNsche angenommen werden.

Beh.: *Für jede Lösung* $y(x)$ *von*

$$(L_n) \qquad L_n(y) = y^{(n)} + g_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + g_1(x)\,y' + g_0(x)\,y = h(x)$$

gilt:

$$(A) \qquad \lim_{x \to +\infty} (n-1-\nu)!\; x^{\nu+1-n} y^{(\nu)}(x), \qquad \nu = 0, 1, \ldots, n-1,$$

existiert, wobei alle diese Limiten einander gleich sind.

4. Der Beweis ergibt sich so:

4.1. Wir setzen

$$(Y_{n-1}) \qquad L^*_{n-1}(y) = y^{(n-1)}(x) = \varphi(x).$$

Dabei soll also $\varphi(x)$ stetig sein in $\mathfrak{D}$. Zufolge (Y_{n-1}) gilt dann

$$(Y) \qquad y(x) = \frac{1}{(n-2)!}\int_b^x (x-u)^{n-2}\,\varphi(u)\,du + \sum_{\varrho=0}^{n-2} \frac{1}{\varrho!}\,c_\varrho\,(x-b)^\varrho,$$

wo die b, c_ϱ, $\varrho = 0, 1, \ldots, n-2$, (beliebig wählbare) Konstanten sind ($a \leqq b$). Daher gilt allgemeiner

$$(Y_\nu) \quad y^{(\nu)}(x) = \frac{1}{(n-2-\nu)!}\int_b^x (x-u)^{n-2-\nu}\,\varphi(u)\,du + \sum_{\varrho=\nu}^{n-2} \frac{1}{(\varrho-\nu)!}\,c_\varrho\,(x-b)^{\varrho-\nu},$$

$$\nu = 0, \ldots, n-2.$$

4.2. Zum Beweise von (A) *genügt* es, die *Existenz von* $\lim y^{(n-1)}$ sicherzustellen. Denn alsdann gilt, wie bekannt, (A) für alle ν.

In der Tat besitzt dann $(n-1-\nu)\left(\int_b^x (x-u)^{n-2-\nu}\,\varphi(u)\,du\right) x^{\nu+1-n}$, für $\nu = 0, 1, \ldots, n-2$, den Limes $\varphi_0 = \lim y^{(n-1)}(x)$, woraus wegen (Y_ν) die Behauptung (A) folgt.

4.3. Aus (Y_ν) (Nr. 4. 1) ergibt sich weiter:

Jeder Lösung von $L_n(y) = h(x)$, *welche der Bedingung*

$$(L_{n-1}) \qquad \lim y^{(n-1)}(x) \text{ } \textit{existiert}$$

genügt, entspricht vermöge (Y_{n-1}) *und* (Y) (Nr. 4. 1) *eindeutig eine stetige Lösung* $\varphi(x)$ *der Integralgleichung*

$$(V) \qquad \varphi(x) = J(\varphi; x) + H(x; c_0, \ldots, c_{n-1}),$$

$$J(\varphi; x) =$$

$$= -\int_b^x g_{n-1}(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi - \int_b^x \left\{\int_b^\xi \left[\sum_{\nu=0}^{n-2} \frac{1}{(n-2-\nu)!}\,g_\nu(\xi)\,(\xi-u)^{n-2-\nu}\right]\varphi(u)\,du\right\} d\xi,$$

$$H(x; c_0, \ldots, c_{n-1}) = c_{n-1} + \int_b^x h(\xi)\,d\xi + \sum_{\varrho=0}^{n-2} c_\varrho\,h_\varrho(x),$$

wobei die $h_\varrho(x)$ lineare Verbindungen von Gliedern der Form

$$(H) \qquad \int_b^x g_\nu(\xi)\,\xi^t\,d\xi \text{ mit } 0 \leqq t \leqq n-\nu-2, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-2,$$

also insbesondere unabhängig von $\varphi(x)$ sind. Es ist b mit $a \leqq b$ beliebig wählbar.

Für $\varphi(x)$ ist dabei überdies die Bedingung erfüllt

$$(\Omega) \qquad \lim \varphi(x) \text{ existiert.}$$

Umgekehrt wird durch jede stetige, (Ω) erfüllende Lösung $\varphi(x)$ von (V) vermittelst (Y) eine, (L_{n-1}) erfüllende Lösung $y(x)$ von $L_n(y) = h(x)$ geliefert.

4. 4. Die $c_0, \ldots, c_{n-2}, c_{n-1}$ sind gleich den „Anfangswerten" $y(b), \ldots, y^{(n-2)}(b), y^{(n-1)}(b)$ von $y(x)$ in $x = b$. Es ist aber eine Lösung y von $L_n(y) = h(x)$ eindeutig in $[a, +\infty)$ durch ihre Anfangswerte in $x = b$ festgelegt. Daher genügt zum Beweise des Satzes in Nr. 3 der Nachweis, daß bei beliebig vorgegebenen $c_0, \ldots, c_{n-1}$ (mindestens) eine Lösung $\varphi(x)$ von (V) existiert und daß diese Lösung der Bedingung (Ω) genügt, wenn nur b mit $b \geqq a$ passend gewählt wird. Dieser Nachweis gelingt in bekannter Weise durch Konstruktion mittels schrittweiser Näherung[3]; und zwar gelingt die Konstruktion vermöge der (bis jetzt noch nicht benutzten) Voraussetzung, daß $x^{n-1-\nu} g_\nu(x)$ bzw. $h(x)$ absolut integrierbar bzw. integrierbar sein soll $(\nu = 0, \ldots, n-1)$.

5. Der in Nr. 3 ausgesprochene Satz gibt eine hinreichende Bedingung dafür, daß die Differentialgleichung $L_n(y) = h(x)$ unter den

„Randbedingungen": I) $y^{(\nu)}(b) = B_\nu$, $\nu = 0, \ldots, n-1$, und

II) $\lim y^{(n-1)}(x)$ existiert,

bei beliebig vorgegebenem B_ν und hinreichend großem b[4]) Lösungen besitzt.

Der wesentliche Beweisgedanke bestand (Nr. 4. 1) darin, zunächst die aus der Randbedingung II) entspringende Differentialgleichung $L^*_{n-1}(y) = y^{(n-1)}(x) = \varphi(x)$ für beliebiges, stetiges, bei $x \to +\infty$ konvergierendes $\varphi(x)$ zu lösen und damit eine *Integraldarstellung für y vermittelst $\varphi(x)$* zu erhalten [vgl. (Y) in Nr. 4. 1]. Indem man mittels dieser Integraldarstellung $\varphi(x)$ an Stelle von $y(x)$ in die Differentialgleichung $L_n(y) = h(x)$ einführt, erhält man eine *in $\varphi(x)$ lineare Integro-Differentialgleichung*, welche vermittelst einer Quadratur in eine lineare Integralgleichung (V) zweiter Art für $\varphi(x)$ übergeht und welche, zusammen mit der Forderung, daß $\lim \varphi(x)$

---

[3]) Vgl. HAUPT, Über Lösungen linearer Differentialgleichungen mit Asymptoten. Math. Zeitschr. **48** (1942), S. 212–220.

[4]) Aus dem Eindeutigkeitssatz für $L_n(y) = h(x)$ bzw. für (V) folgt, daß statt $x = b$ auch $x = a$ genommen werden kann. Die Annahme, daß b hinreichend groß sein solle, ist nur zur Vereinfachung des Existenzbeweises in Nr. 4. 4 gemacht.

existiert, gleichwertig ist mit $L_n(y) = h(x)$ zusammen mit den Randbedingungen I) II).

5.1. Die soeben erwähnte *Zurückführung der „Randwertaufgabe" für* $L_n(y) = h(x)$ *auf eine lineare Integralgleichung* mit der Nebenbedingung, daß für eine Lösung $\varphi(x)$ dieser Integralgleichung $\lim \varphi(x)$ existiert, ist genau so auch in dem *allgemeinen Falle* möglich, in welchem die *Randbedingung* II) *darin besteht, daß irgend ein vorgeschriebener linearer Differentialausdruck* $(n-1)$*-ter Ordnung*

$$L^*_{n-1}(y) = y^{(n-1)} + k_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots + k_0(x)y$$

für $x \to +\infty$ *einen Limes besitzt, wenn für* y *die betrachtete Lösung* $y(x)$ *von* $L_n(y) = h(x)$ *eingesetzt wird.*

Um dies einzusehen, braucht man nur $L^*_{n-1}(y) = \varphi(x)$ zu setzen.

In dieses allgemeinere Problem ordnet sich die in einer vorangehenden Note[3]) (für $n = 2$) behandelte Aufgabe ein, Lösungen von $L_n(y) = h(x)$ zu bestimmen, welche asymptotische Parabeln $(n-1)$-ten Grades besitzen; diese Aufgabe entspricht nämlich[5]) dem Falle, daß

$$L^*_{n-1}(y) = x^n \frac{d^{n-1}}{d\,x^{n-1}}\,[x^{-1}\,y\,(x)].$$

5.2. Tritt an Stelle von $L^*_{n-1}(y)$ ein linearer Differentialausdruck $L^*_{n-\tau}(y)$ der Ordnung $(n-\tau)$ mit $2 \leqq \tau \leqq n-1$, so führt das in Nr. 5 geschilderte Verfahren wiederum zu einer linearen Integro-Differentialgleichung für $\varphi(x)$.

5.3. Eine hier anschließende Frage ist die nach weniger fordernden hinreichenden Bedingungen dafür, daß beispielsweise die in vorliegender Note betrachtete Randwertaufgabe (vgl. Nr. 5) zu vorgegebenen B_ν eine Lösung besitzt; und damit die Frage nach Abschwächung der über die $g_\nu(x)$ und über $h(x)$ gemachten Stetigkeits- bzw. Integrabilitätsvoraussetzungen[6]). Wir behalten uns vor, später darauf zurückzukommen, ebenso wie auf die in Nr. 5. 1. und 5. 2. angeschnittenen Verallgemeinerungen.

---

[5]) Vgl. HAUPT, Über Asymptoten ebener Kurven. Journ. f. d. r. u. angew. Math. 152 (1922), S. 8, (D_0).

[6]) Vgl. dazu a. a. O.[3]), Nr. 2. 3. 1. In Betracht käme ferner u. a. der Übergang zu LEBESGUE-Integralen. In diesem Zusammenhang sei noch hingewiesen auf eine [a. a. O.[1]) nicht erwähnte] Arbeit von D. CALIGO, Un criterio di sufficiente stabilità per le soluzioni dei sistemi di equazioni integrali e sue applicazioni, Atti d. reale Accad. Italia, Rend. Cl. sci. fis., mat. e nat., 7. s., vol. I (1940), 497 ff.

(Eingegangen am 10. 2. 1942.)

Ein Kriterium für die algebraischen Zahlen.

Von

C. Pisot in Greifswald.

Seit LAGRANGE ist bekannt, daß die reellen algebraischen Zahlen zweiten Grades durch die Periodizität ihrer Kettenbruchentwicklung gekennzeichnet sind. Es ist vielfach versucht worden, diese schöne Eigenschaft auf algebraische Zahlen höheren Grades zu übertragen, und es gibt manche Ergebnisse in dieser Richtung. Stellt man die formale Einfachheit der Rechnung in den Vordergrund, wie das z. B. in der JACOBIschen Verallgemeinerung der Kettenbrüche[1]) geschieht, so ist es bisher noch nicht gelungen, die Frage nach der Periodizität dieser Entwicklung zu entscheiden. Wenn man aber die Schärfe der Annäherung als erstes Erfordernis ansieht, wie dies unter anderem für H. MINKOWSKIS Kriterium[2]) gilt, so muß man die Periodizität und besonders die Einfachheit der Rechnungen aufgeben.

Die Periodizität bedingt eine gewisse Regelmäßigkeit in der Verteilung der Näherungsbrüche; darin werden wir die Grundlage unseres Kriteriums erblicken. Vorliegende Arbeit hat ihren Ausgangspunkt in früheren Untersuchungen des Verfassers[3]); eine vorbereitende Note erschien in den Comptes Rendus der Akademie von Paris[4]). Es wurde aber nach Möglichkeit versucht, eine geschlossene Darstellung zu bringen und dem Leser die Kenntnisnahme früherer Originalarbeiten zu ersparen.

Wir bezeichnen durchweg mit *kleinen lateinischen Buchstaben* ganze rationale Zahlen und mit $C_1, C_2, \ldots$ geeignete, von n unabhängige positive feste Zahlen.

Zuerst wollen wir unser Kriterium an den Zahlen zweiten Grades erläutern. Es sei ξ eine reelle algebraische Zahl zweiten Grades. Aus der Periodizität der Kettenbruchentwicklung von ξ folgt das Vorhandensein von unendlich vielen verschiedenen rationalen Näherungsbrüchen $\frac{u_n}{v_n}$, die folgende Eigenschaften haben:

---

[1]) JACOBI, Journ. f. reine u. angew. Math. 69 (1868), S. 29–64; Werke 6, S. 385–426.

[2]) MINKOWSKI, Gött. Nachr. 1899, S. 64–88; Ges. Abh. 1, S. 293–315.

[3]) PISOT, Annali Sc. Norm. Pisa, Ser. 2, 7 (1938), S. 205–248.

[4]) PISOT, C. R. Akad. Paris 206 (1938), S. 1862–1864.

A. Regelmäßigkeit der Verteilung. *Es gibt eine Zahl* $\varrho > 1$ *und ein festes Zahlenpaar* C_1, C_2, *so daß zugleich*

$$|u_{n+1} - \varrho u_n| < \frac{C_1}{|u_n|} \quad \text{und} \quad |v_{n+1} - \varrho v_n| < \frac{C_2}{|v_n|}$$

besteht.

B. Schärfe der Annäherung. *Es gilt die Ungleichung:*

$$|u_n - \xi v_n| < \frac{1}{|v_n|}.$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $\frac{p_k}{q_k}$ den k-ten Näherungsbruch bei der Entwicklung von ξ in einen regelmäßigen Kettenbruch. Nach Lagrange wird der Kettenbruch für ξ periodisch; d. h. es sei ξ_k der k-te vollständige Quotient, der durch

$$\xi = \frac{p_{k+1}\xi_k + p_k}{q_{k+1}\xi_k + q_k} \tag{1}$$

erklärt ist, dann gibt es eine natürliche Zahl h, so daß

$$\xi_{k+h} = \xi_k \qquad \text{für } k > k_0. \tag{2}$$

Nach (1) erhält man

$$\xi_k = -\frac{p_k - \xi q_k}{p_{k+1} - \xi q_{k+1}} \quad \text{und} \quad \xi_{k+h} = -\frac{p_{k+h} - \xi q_{k+h}}{p_{k+h+1} - \xi q_{k+h+1}}.$$

Aus (2) folgt daraus das Vorhandensein einer Zahl ϱ, für die

$$\varrho\,(p_{k+h} - \xi\, q_{k+h}) = (-1)^h (p_k - \xi q_k) \tag{3}$$

und zugleich

$$\varrho\,(p_{k+h+1} - \xi q_{k+h+1}) = (-1)^h (p_{k+1} - \xi\, q_{k+1}) \tag{4}$$

gilt. Durch vollständige Induktion nach k sieht man, daß (3) für alle $k > k_0$ gilt; ϱ ist deshalb von k unabhängig. Eliminieren wir ξ aus den zwei Gleichungen (3) und (4), so erhält man

$$\begin{vmatrix} \varrho\, p_{k+h} & -(-1)^h p_k & \varrho\, q_{k+h} & -(-1)^h q_k \\ \varrho\, p_{k+h+1} & -(-1)^h p_{k+1} & \varrho\, q_{k+h+1} & -(-1)^h q_{k+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$p_{k+h}\, q_{k+h+1} - p_{k+h+1}\, q_{k+h} = (-1)^h (p_k\, q_{k+1} - p_{k+1}\, q_k) = \pm 1$$

ergibt sich eine Gleichung

$$\varrho^2 + a\,\varrho + (-1)^h = 0, \tag{5}$$

wobei a eine gewisse, von k unabhängige, ganze rationale Zahl bedeutet. Die Norm von ϱ hat den Betrag Eins, ϱ ist also eine Einheit, die nach (3) dem Körper von ξ angehört. Außerdem ist

$$\begin{aligned}\varrho &= (-1)^h \frac{p_k - \xi q_k}{p_{k+h} - \xi q_{k+h}} \\ &= \left(-\frac{p_k - \xi q_k}{p_{k+1} - \xi q_{k+1}}\right)\left(-\frac{p_{k+1} - \xi q_{k+1}}{p_{k+2} - \xi q_{k+2}}\right) \cdots \left(-\frac{p_{k+h-1} - \xi q_{k+h-1}}{p_{k+h} - \xi q_{k+h}}\right) \\ &= \xi_k \xi_{k+1} \cdots \xi_{k+h-1}.\end{aligned}$$

Da aber alle $\xi_k > 1$ sind, ist auch $\varrho > 1$.

Die Gleichung (3) für k und für $k + h$ gibt

$$\varrho = (-1)^h \frac{p_{k+h} - \xi q_{k+h}}{p_{k+2h} - \xi q_{k+2h}} \quad \text{und} \quad \varrho^2 = \frac{p_k - \xi q_k}{p_{k+2h} - \xi q_{k+2h}}.$$

Durch Eintragen in die Gleichung (5) folgt daraus

$$(p_{k+2h} - \xi q_{k+2h}) + a\,(p_{k+h} - \xi q_{k+h}) + (-1)^h (p_k - \xi q_k) = 0.$$

Da ξ irrational ist, spaltet sich diese Gleichung in das System

$$\begin{aligned} p_{k+2h} + a p_{k+h} + (-1)^h p_k &= 0, \\ q_{k+2h} + a q_{k+h} + (-1)^h q_k &= 0, \end{aligned}$$

das für alle $k > k_0$ gilt. Bezeichnen wir für beliebiges festes $k > k_0$ mit u_n die Zahl p_{k+nh} und mit v_n die Zahl q_{k+nh}, so gelten also folgende lineare Rekursionen:

$$\begin{aligned} u_{n+2} + a u_{n+1} + (-1)^h u_n &= 0, \\ v_{n+2} + a v_{n+1} + (-1)^h v_n &= 0. \end{aligned}$$

Es sei ϱ' die zu ϱ konjugierte Wurzel der Gleichung (5). Die Lösungen dieser Rekursionen kann man bekanntermaßen auf die Form

$$\begin{aligned} u_n &= \lambda \varrho^n + \lambda' \varrho'^n, \\ v_n &= \mu \varrho^n + \mu' \varrho'^n \end{aligned}$$

bringen, wo λ, λ', μ, μ' geeignete Konstanten bedeuten. Aus diesen Formeln erhält man:

$$u_{n+1} - \varrho u_n = \lambda'(\varrho' - \varrho)\varrho'^n \quad \text{und} \quad v_{n+1} - \varrho v_n = \mu'(\varrho' - \varrho)\varrho'^n.$$

Da aber $|\varrho'| = \frac{1}{\varrho}$, so strebt ϱ'^n mit wachsendem n nach Null, und

$$\varrho^n = \frac{u_n}{\lambda} - \frac{\lambda'}{\lambda}\varrho'^n > C_3 |u_n|.$$

Folglich ist

$$|u_{n+1} - \varrho u_n| = \frac{|\lambda'(\varrho' - \varrho)|}{\varrho^n} < \frac{C_1}{|u_n|}.$$

Ebenso sieht man ein, daß

$$|v_{n+1} - \varrho v_n| < \frac{C_3}{|v_n|}.$$

Die Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ besitzen also die Eigenschaft A. Die Eigenschaft B folgt sofort aus der Tatsache, daß $\frac{u_n}{v_n}$ Kettenbruchnäherungen sind.

Diese Eigenschaften lassen sich nun auf beliebige reelle algebraische Zahlen übertragen und wir werden nachweisen, daß wir darin ein Kriterium für diese algebraischen Zahlen erblicken können. Es gilt nämlich folgender Satz I, sowie seine Umkehrung Satz II:

Satz I. *Jeder reellen algebraischen Zahl ξ vom Grade s kann man eine unendliche Folge von Näherungsbrüchen $\frac{u_n}{v_n}$ mit folgenden Eigenschaften zuordnen:*

A. Regelmäßigkeit der Verteilung. *Es gibt eine Zahl $\alpha > 1$ und positive feste Zahlen C_4, C_5, ε, so daß zugleich*

$$|u_{n+1} - \alpha u_n| < \frac{C_4}{|u_n|^\varepsilon} \quad \text{und} \quad |v_{n+1} - \alpha v_n| < \frac{C_5}{|v_n|^\varepsilon}$$

besteht.

B. Schärfe der Annäherung. *Es gibt eine feste Zahl C_6, so daß mit demselben ε*

$$|u_n - \xi v_n| < \frac{C_6}{|v_n|^\varepsilon}$$

gilt.

Zusatz. *Jedes ε der vorbemerkten Art kann den Wert $\frac{1}{s-1}$ nicht überschreiten. Man kann aber die Existenz eines beliebig nahe an $\frac{1}{s-1}$ gelegenen ε durch geeignete Wahl von α erzwingen.*

Satz II. *Jede reelle Zahl ξ, die eine unendliche Folge von Näherungsbrüchen $\frac{u_n}{v_n}$ mit der Eigenschaft* A *besitzt, ist algebraisch; ihr Grad s kann den Wert $1 + \frac{1}{\varepsilon}$ nicht überschreiten, und die Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ besitzen die Eigenschaft* B.

Aus dem Satz II fließt also auch die Tatsache, daß die Eigenschaften A und B nicht unabhängig sind, sondern daß B eine Folge von A ist.

Um die Schärfe der Annäherung zu beurteilen, können wir bemerken, daß wir auf diese Weise $s-1$ linear unabhängige Zahlen $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(s-1)}$ des Körpers von ξ durch Näherungsbrüche $\frac{u_n^{(1)}}{v_n}, \frac{u_n^{(2)}}{v_n}, \cdots, \frac{u_n^{(s-1)}}{v_n}$ mit gleichem Nenner annähern können. Dabei nennen wir die Zahlen $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(s-1)}$ linear unabhängig, wenn wir kein System nicht sämtlich verschwindender ganzer rationalen Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_s$ so finden können, daß

$$c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)} + \cdots + c_{s-1} \xi^{(s-1)} + c_s = 0$$

wird. Für die Schärfe der Annäherung gilt dann

$$|u_n^{(r)} - \xi^{(r)} v_n| < \frac{C_7}{|v_n|^\varepsilon} \quad \text{für } r = 1, 2, \ldots, s-1. \tag{6}$$

Es ist aber bekannt, daß $\frac{1}{s-1}$ der größte Exponent ε ist, der für alle Systeme von $s-1$ linear unabhängigen Zahlen gleichzeitige Näherungen mit (6) gestattet. Wenn $\varepsilon = \frac{1}{s-1}$, haben wir also den Typus der bestmöglichen gleichzeitigen Annäherung durch rationale Brüche mit gleichem Nenner. Dieser Fall kann aber nur für Körper zweiten Grades oder Körper dritten Grades mit zwei imaginären konjugierten Körpern erhalten werden.

Um den Satz I zu beweisen, zeigen wir, daß eine Zahl die Rolle von α spielen kann, wenn sie größer als Eins und eine ganze algebraische Zahl des Körpers von ξ ist, deren sämtliche Konjugierten dem Betrage nach kleiner als Eins sind. Daß es solche Zahlen gibt, lehrt uns folgender Hilfssatz:

Hilfssatz 1. *In jedem reellen algebraischen Zahlkörper gibt es ganze algebraische Zahlen α, die den Ungleichungen*

$$\alpha > 1 \quad \textit{und} \quad |\alpha_r| < 1 \qquad \textit{für } r = 2, \ldots, s \tag{7}$$

genügen. Hierbei ist s der Grad des Körpers und $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ sind die von α verschiedenen Konjugierten von α.

Beweis. Es sei $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ eine Basis für die ganzen Zahlen des Körpers; die konjugierten Zahlen $\omega_{1,r}, \omega_{2,r}, \ldots, \omega_{s,r}$ für $r = 2, \ldots, s$ bilden eine Basis für die konjugierten Körper. Jede ganze Zahl α und ihre Konjugierten sind dann von der Form:

$$\begin{aligned} \alpha &= x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \cdots + x_s\omega_s \\ \alpha_r &= x_1\omega_{1,r} + x_2\omega_{2,r} + \cdots + x_s\omega_{s,r} \quad \text{für } r = 2, \ldots, s \end{aligned} \tag{8}$$

mit ganzen rationalen $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Die Determinante Δ der $\omega_{h,r}$ ist die Quadratwurzel aus der Diskriminante des Körpers, also von Null verschieden. Nach dem Minkowskischen Satze über Linearformen, kann man ganze rationale $x_1, x_2, \ldots, x_s$, die nicht alle verschwinden, so finden, daß

$$|\alpha| \leqq \beta \quad \text{und} \quad |\alpha_r| \leqq \gamma \qquad \text{für } r = 2, \ldots, s,$$

wenn nur die Zahlen β, γ der Ungleichung

$$\beta\gamma^{s-1} \geqq |\Delta|$$

genügen. Wählen wir nun $\gamma < 1$, so folgt aus $|\operatorname{Norm}\alpha| \geqq 1$, daß

$$1 \leqq |\operatorname{Norm}\alpha| = |\alpha\alpha_2 \ldots \alpha_s| \leqq |\alpha|\,\gamma^{s-1} < |\alpha|.$$

Die Zahl α oder $-\alpha$ erfüllt daher die Ungleichungen (7). Wir haben somit das Vorhandensein solcher Zahlen α bewiesen. Wählen wir noch β so, daß

$\beta\gamma^{s-1} = |\Delta|$, so erkennen wir sogar die Existenz von Zahlen α, die der Zusatzbedingung

$$\alpha\gamma^{s-1} \leqq |\Delta| \tag{9}$$

genügen.

Die Gleichung s-ten Grades für α ist irreduzibel. Würde sie nämlich in Faktoren zerlegbar sein, so hätte einer dieser Faktoren nur Wurzeln, deren Betrag kleiner als Eins wäre; die Norm einer solchen Wurzel hätte also einen Betrag kleiner als Eins und wäre somit Null, denn diese Norm ist eine ganze rationale Zahl. Eine der Zahlen α_r wäre daher Null; das ist aber unmöglich, denn die Ausdrücke (8) können die Null nur darstellen, wenn $x_1 = x_2 = \cdots = x_s = 0$.

Beweis von Satz I. Es sei nun ξ eine reelle algebraische Zahl s-ten Grades; ξ läßt sich auf unendlich viele Weisen als Quotient $\frac{\lambda}{\mu}$ zweier ganzen Zahlen λ, μ des Körpers von ξ darstellen. Wir bezeichnen mit dem Index $r = 2, \ldots, s$ die Konjugierten der vorkommenden Zahlen des Körpers von ξ. Es sei α eine ganze Zahl des Körpers, die den Ungleichungen (7) des Hilfssatzes 1 genügt. Die Ausdrücke

$$u_n = \lambda\alpha^n + \lambda_2\alpha_2^n + \cdots + \lambda_s\alpha_s^n,$$
$$v_n = \mu\alpha^n + \mu_2\alpha_2^n + \cdots + \mu_s\alpha_s^n$$

sind ganze rationale Zahlen. Man hat

$$u_{n+1} - \alpha u_n = \lambda_2(\alpha_2 - \alpha)\alpha_2^n + \cdots + \lambda_s(\alpha_s - \alpha)\alpha_s^n,$$
$$v_{n+1} - \alpha v_n = \mu_2(\alpha_2 - \alpha)\alpha_2^n + \cdots + \mu_s(\alpha_s - \alpha)\alpha_s^n.$$

Da aber $|\alpha_2| < 1, \ldots, |\alpha_s| < 1$, so streben $\alpha_2^n, \ldots, \alpha_s^n$ mit wachsendem n nach Null. Denken wir uns die $|\alpha_r|$ der Größe nach geordnet, etwa

$$|\alpha_2| \geqq |\alpha_3| \geqq \cdots \geqq |\alpha_s|,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \alpha u_n| &< C_8 |\alpha_2|^n, \\ |v_{n+1} - \alpha v_n| &< C_9 |\alpha_2|^n. \end{aligned} \tag{10}$$

Aus

$$\alpha^n = \frac{u_n}{\lambda} - \left(\frac{\lambda_3}{\lambda}\alpha_2^n + \cdots + \frac{\lambda_s}{\lambda}\alpha_s^n\right) = \frac{v_n}{\mu} - \left(\frac{\mu_3}{\mu}\alpha_2^n + \cdots + \frac{\mu_s}{\mu}\alpha_s^n\right)$$

schließen wir das Vorhandensein von Konstanten C_{10}, C_{11}, so daß

$$\alpha^n > C_{10}|u_n| \quad \text{und} \quad \alpha^n > C_{11}|v_n|.$$

Es sei nun ε der Exponent für den

$$|\alpha_2| = \frac{1}{\alpha^\varepsilon},$$

dann ist $\varepsilon > 0$, und man erhält aus (10)

$$|u_{n+1} - \alpha u_n| < \frac{C_8}{\alpha^{\varepsilon n}} < \frac{C_4}{|u_n|^\varepsilon} \quad \text{und} \quad |v_{n+1} - \alpha v_n| < \frac{C_9}{\alpha^{\varepsilon n}} < \frac{C_5}{|v_n|^\varepsilon}.$$

Die Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ besitzen somit die Eigenschaft A.

Um auch die Eigenschaft B abzuleiten, bilden wir

$$u_n - \xi v_n = u_n - \frac{\lambda}{\mu} v_n = \left(\lambda_2 - \frac{\lambda}{\mu}\mu_2\right)\alpha_2^n + \cdots + \left(\lambda_s - \frac{\lambda}{\mu}\mu_s\right)\alpha_s^n.$$

Wie oben schließen wir daraus, daß

$$|u_n - \xi v_n| < \frac{C_6}{|v_n|^\varepsilon}.$$

Gleichzeitige Näherungen. In einem Körper vom Grade s gibt es höchstens $s-1$ linear unabhängige Zahlen; es seien $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(s-1)}$ solche $s-1$ linear unabhängige Zahlen des Körpers. Man kann sie als Quotienten $\xi^{(r)} = \frac{\lambda^{(r)}}{\mu}$ für $r = 1, 2, \ldots, s-1$ ganzer algebraischen Zahlen mit gleichem Nenner μ darstellen. Die Zahlen:

$$\begin{aligned} u_n^{(r)} &= \lambda^{(r)}\alpha^n + \lambda_2^{(r)}\alpha_2^n + \cdots + \lambda_s^{(r)}\alpha_s^n \quad \text{für } r = 1, 2, \ldots, s-1, \\ v_n &= \mu\alpha^n + \mu_2\alpha_2^n + \cdots + \mu_s\alpha_s^n \end{aligned}$$

sind ganz rational und wie oben erhält man

$$|u_n^{(r)} - \xi^{(r)} v_n| < \frac{C_{13}}{|v_n|^\varepsilon} \quad \text{für } r = 1, 2, \ldots, s-1.$$

Schärfe der Annäherung. Um nun den Exponenten ε abzuschätzen, beachten wir, daß

$$\alpha\,|\alpha_2|^{\frac{1}{s}} = 1 \leqq |\operatorname{Norm}\alpha| = \alpha\,|\alpha_2 \ldots \alpha_s| \leqq \alpha\,|\alpha_2|^{s-1}. \tag{11}$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{\varepsilon} \geqq s-1 \quad \text{oder} \quad \varepsilon \leqq \frac{1}{s-1}.$$

Das Gleichheitszeichen kann hier nur stehen, wenn es in (11) überall steht, also wenn

$$1 = |\operatorname{Norm}\alpha| = \alpha\,|\alpha_2|^{s-1}.$$

Es muß daher α eine Einheit sein, deren Konjugierte alle den gleichen Betrag haben. Minkowski[5]) hat aber nachgewiesen, daß es solche Einheiten nur gibt in den Körpern zweiten Grades und in den Körpern dritten Grades mit imaginären Konjugierten; ihre Existenz ist in diesen Körpern trivial. Diese Fälle sind also die einzigen, wo wir $\varepsilon = \frac{1}{s-1}$, also die besten gleichzeitigen Näherungen haben können. In den Körpern zweiten Grades erhalten wir so

[5]) Minkowski, Acta math. **26** (1902), S. 333–351; Ges. Abh. **1**, S. 357–371.

im wesentlichen die Kettenbruchnäherungen. Wenn ξ keinem solchen Körper zweiten oder dritten Grades angehört, ist $\varepsilon < \frac{1}{s-1}$; wir wollen aber zeigen, daß ε bei geeignet gewähltem α beliebig nahe an $\frac{1}{s-1}$ gewählt werden kann.

Im Hilfssatz 1 haben wir das Vorhandensein von Zahlen α nachgewiesen, die der Ungleichung (9) genügen. Für solche Zahlen ist somit

$$\alpha|\alpha_2|^{s-1} \leqq \alpha\gamma^{s-1} \leqq |\Delta|.$$

Aber $|\alpha_2| = \alpha^{-s}$, folglich ist

$$\alpha^{1-s(s-1)} \leqq |\Delta|,$$

also

$$\varepsilon \geqq \left(1 - \frac{\log|\Delta|}{\log\alpha}\right)\frac{1}{s-1}.$$

Da α beliebig groß gewählt werden kann, ist es möglich, für die Größe $1 - \frac{\log|\Delta|}{\log\alpha}$ einen von Eins beliebig wenig verschiedenen Wert zu erhalten. In Verbindung mit der Ungleichung $\varepsilon < \frac{1}{s-1}$ ergibt sich dadurch unsere Behauptung.

Berechnung der Zahlen α. Die Zahlen α, deren Bedeutung in dieser Frage hier hervortritt, können auch leicht numerisch berechnet werden. Betrachten wir nämlich für eine beliebige ganze algebraische Zahl ν des Körpers von α die ganze rationale Zahl

$$w_n = \nu\alpha^n + \nu_2\alpha_2^n + \cdots + \nu_s\alpha_s^n.$$

Dann strebt $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ für wachsendes n nach α, und zwar ist

$$\left|\frac{w_{n+1}}{w_n} - \alpha\right| < \frac{C_{13}}{|w_n|^{1+\varepsilon}} < \frac{C_{14}}{|w_{n+1}|^{1+\varepsilon}}.$$

Man hat also

$$\left|w_{n+2} - \frac{w_{n+1}}{w_n}w_{n+1}\right| < |w_{n+2} - \alpha w_{n+1}| + \frac{C_{14}}{|w_{n+1}|^{\varepsilon}} < \frac{C_{13}+C_{14}}{|w_{n+1}|^{\varepsilon}}.$$

Dieser Ausdruck strebt nach Null und es gibt somit einen Index m, so daß für $n > m$ immer

$$\left|w_{n+2} - \frac{w_{n+1}^2}{w_n}\right| < \frac{1}{2} \tag{12}$$

wird; das heißt für $n > m$ ist w_{n+2} die an $\frac{w_{n+1}^2}{w_n}$ am nächsten liegende ganze Zahl. Man kann also die Folge der Zahlen w_n, von w_m, w_{m+1} ausgehend, durch einfache Rechnungen bestimmen. Als Grenzwert von $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ kann dann die Zahl α mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden; es ist

$$\left|\frac{w_{n+1}}{w_n} - \alpha\right| < \frac{C_{13}}{|w_n|^{1+\varepsilon}}.$$

Wir streifen hier folgende Frage: Von zwei beliebigen ganzen rationalen Zahlen w_0, w_1 mit $|w_0| \leqq |w_1|$ ausgehend, bestimmen wir eine Folge von ganzen rationalen Zahlen w_n durch die Ungleichung (12) für $n \geqq 0$. Man sieht leicht ein, daß $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ für wachsendes n einen Grenzwert hat. Ich möchte nun folgende Vermutung aussprechen, deren Beweis neue Einblicke in die Eigenschaften der algebraischen Zahlen eröffnen würde:

Der Grenzwert von $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ für jedes Paar w_0, w_1 mit $|w_0| \leqq |w_1|$ ist eine ganze algebraische Zahl α, deren Konjugierte Beträge haben, die den Wert Eins nicht überschreiten [6]).

Beweis von Satz II. Wir setzen voraus, daß die Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ die Eigenschaft A besitzen. Aus der Ungleichung

$$|u_{n+1} - \alpha u_n| < \frac{C_4}{|u_n|^s} \tag{13}$$

werden wir ableiten, daß die Potenzreihe

$$f(\zeta) = u_0 + u_1 \zeta + \cdots + u_n \zeta^n + \cdots \tag{14}$$

eine rationale Funktion der komplexen Veränderlichen ζ darstellt. Daraus wird sich ergeben, daß α eine ganze algebraische Zahl ist, die den Ungleichungen (7) des Hilfssatzes 1 genügt.

Zuerst zeigen wir: *Aus der Ungleichung* (13) *folgt das Vorhandensein einer Zahl* $\delta > 1$ *und einer Konstanten* C_{15}, *so daß*

$$|u_{n+1} - \alpha u_n| < \frac{C_{15}}{\lambda_n} \tag{15}$$

für alle n *gilt.*

Da es unendlich viele verschiedene Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ gibt, ist $|u_n|$ nicht beschränkt; es gibt daher einen Index m, so daß

$$|u_m| > \frac{C_4}{\alpha - 1}. \tag{16}$$

Dann ist

$$|u_{m+1}| > \alpha |u_m| - \frac{C_4}{|u_m|^s} \geqq \alpha |u_m| - C_4 = |u_m| \left(\alpha - \frac{C_4}{|u_m|}\right) > |u_m|.$$

Die Zahl u_{m+1} erfüllt also auch die Ungleichung (16) und durch vollständige Induktion nach n schließen wir, daß dann für alle $n \geqq m$

$$|u_n| > \frac{C_4}{\alpha - 1}$$

gilt, und die $|u_n|$ mit n wachsen. Man hat daher

$$|u_{n+1}| > |u_n| \left(\alpha - \frac{C_4}{|u_n|}\right) > |u_n| \left(\alpha - \frac{C_4}{|u_m|}\right).$$

---

[6]) Siehe zu dieser Vermutung auch [3]).

Setzen wir noch

$$\alpha - \frac{C_4}{|u_m|} = \beta,$$

so ist nach (16)

$$\beta > 1$$

und es wird für $n \geqq m$

$$|u_{n+1}| > \beta |u_n| > \cdots > \beta^{n+1-m} |u_m|.$$

Es gibt somit eine Konstante C_{16}, so daß für alle n

$$|u_n| > C_{16} \beta^n$$

gilt. Tragen wir diese Abschätzung in die Ungleichung (13), so erhalten wir die gesuchte Ungleichung (15), wenn wir $\delta = \beta, > 1$ setzen.

Untersuchung der Potenzreihe (14). Wir setzen

$$\varphi_{n+1} = u_{n+1} - \alpha u_n.$$

Durch Multiplikation der Potenzreihe (14) mit $1 - \alpha\zeta$ erhält man

$$(1 - \alpha\zeta) f(\zeta) = u_0 + \varphi_1 \zeta + \cdots + \varphi_n \zeta^n + \cdots$$

Die Ungleichung (15) zeigt, daß diese Reihe für $|\zeta| < \delta$ konvergiert, also ist $f(\zeta)$ im Kreise $|\zeta| < \delta$ fortsetzbar und regulär bis auf einen einfachen Pol im Punkte $\zeta = \frac{1}{\alpha}$. Borel [7]) hat aber bewiesen: *Eine analytische Funktion, die eine Potenzreihenentwicklung mit rational-ganzzahligen Koeffizienten um den Nullpunkt besitzt und meromorph ist in einem Kreise* $|\zeta| < \delta$ *mit* $\delta > 1$, *ist eine rationale Funktion, deren Zähler und Nenner ganze rationale Koeffizienten haben.* Fatou [8]) hat noch gezeigt, daß das konstante Glied des Nenners Eins ist, daß also alle Nullstellen des Nenners reziproke Werte von ganzen algebraischen Zahlen sind. Nach diesen Sätzen ist daher $f(\zeta)$ eine rationale Funktion. Im Kreise $|\zeta| < \delta$ hat $f(\zeta)$ nur einen einfachen Pol im Punkte $\zeta = \frac{1}{\alpha}$. Die Zahl α ist also ganz algebraisch. Bezeichnen $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ die Konjugierten von α, so sind $\frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_s}$ auch einfache Nullstellen des Nenners von $f(\zeta)$, sie müssen also im Gebiet $|\zeta| \geqq \delta$ liegen; folglich gelten die Ungleichungen $|\alpha_r| \leqq \frac{1}{\delta} < 1$ für $r = 2, \ldots, s$, und die ganze algebraische Zahl α genügt den Ungleichungen (7).

Bestimmung von u_n. Um u_n zu berechnen, zerlegen wir die rationale Funktion $f(\zeta) = \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)}$ in Partialbrüche. $Q(\zeta)$ kann keine anderen Nullstellen

[7]) Borel, Bull. Sci. math. **18** (1894), S. 22–25.

[8]) Fatou, Acta math. **30** (1906), S. 369–371. Ein Beweis wird auch S. 317 dieser Abhandlung gegeben.

als $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_s}$ haben, denn sonst wäre $Q(\zeta)$ in Faktoren zerlegbar, von denen einer nur Wurzeln hätte mit Beträgen, die mindestens so groß wie δ wären. Ihre reziproken Werte wären ganze algebraische Zahlen und der Betrag ihrer Norm kleiner als Eins, also Null. Diese Zahlen wären somit Null, und würden also in $Q(\zeta)$ nicht auftreten. Man hat daher, mit gewissen Konstanten, $\lambda, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$:

$$f(\zeta) = \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)} = \frac{\lambda}{1-\alpha\zeta} + \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2\zeta} + \cdots + \frac{\lambda_s}{1-\alpha_s\zeta},$$

und zwar ist

$$\lambda = -\frac{P\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\frac{1}{\alpha}Q'\left(\frac{1}{\alpha}\right)}, \qquad \lambda_r = -\frac{P\left(\frac{1}{\alpha_r}\right)}{\frac{1}{\alpha_r}Q'\left(\frac{1}{\alpha_r}\right)} \quad \text{für } r = 2, \ldots, s.$$

λ gehört folglich zum Körper von α, und $\lambda_2, \ldots, \lambda_s$ sind die Konjugierten von λ. Wird jetzt jeder Partialbruch einzeln in eine Potenzreihe entwickelt, so erhalten wir durch Identifizieren mit der Potenzreihe (14) für $f(\zeta)$

$$u_n = \lambda\alpha^n + \lambda_2\alpha_2^n + \cdots + \lambda_s\alpha_s^n.$$

Schätzung des Grades s von α. Aus dem Ausdruck für u_n leiten wir wie im Beweis von Satz I ab, daß es eine Konstante C_{17} gibt, so daß

$$|u_n| > C_{17}\,\alpha^n.$$

Tragen wir dies in die Ungleichung (13), so folgt daraus, daß

$$|\varphi_{n+1}| = |u_{n+1} - \alpha u_n| < \frac{C_{18}}{\alpha^{\varepsilon n}}.$$

Der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$(1-\alpha\zeta)f(\zeta) = u_0 + \varphi_1\zeta + \cdots + \varphi_n\zeta^n + \cdots$$

ist daher mindestens α^ε; andererseits wissen wir aber, daß er genau den Wert $\frac{1}{|\alpha_2|}$ hat, wenn wieder $|\alpha_2| \geqq |\alpha_r|$ für $r = 3, \ldots, s$ ist. Es ist also

$$\alpha^\varepsilon \leqq \frac{1}{|\alpha_2|}.$$

Bezeichnen wir mit ε' den Exponenten für den $|\alpha_2| = \frac{1}{\alpha^{\varepsilon'}}$, so ist $\varepsilon \leqq \varepsilon'$. Da wir aber schon bewiesen haben, daß $\varepsilon' \leqq \frac{1}{s-1}$, so wird

$$s \leqq 1 + \frac{1}{\varepsilon'} \leqq 1 + \frac{1}{\varepsilon}.$$

Schluß des Beweises von Satz II. Aus der Ungleichung

$$|v_{n+1} - \alpha v_n| < \frac{C_5}{|v_n|^\varepsilon}$$

folgt in gleicher Weise, daß es eine Zahl μ des Körpers von α gibt, so daß

$$v_n = \mu\alpha^n + \mu_2\alpha_2^n + \cdots + \mu_s\alpha_s^n.$$

Da $\alpha > 1$ und $|\alpha_r| < 1$ für $r = 2, \ldots, s$, strebt $\frac{u_n}{v_n}$ mit wachsendem n nach $\frac{\lambda}{\mu}$. Somit erhalten wir $\xi = \frac{\lambda}{\mu}$, also ist ξ algebraisch.

Man hat noch

$$u_n - \xi v_n = u_n - \frac{\lambda}{\mu} v_n = \left(\lambda_2 - \frac{\lambda}{\mu}\mu_2\right)\alpha_2^n + \cdots + \left(\lambda_s - \frac{\lambda}{\mu}\mu_s\right)\alpha_s^n,$$

folglich ist

$$|u_n - \xi v_n| < \frac{C_{19}}{|v_n|^{\varepsilon'}} \leqq \frac{C_6}{|v_n|^{\varepsilon}},$$

denn $\varepsilon \leqq \varepsilon'$. Die Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ besitzen also auch die Eigenschaft B; man sieht dadurch, daß diese Eigenschaft sich aus der Eigenschaft A ergibt, somit nicht von ihr unabhängig ist.

Bemerkung. In diesem Beweis hätten wir den Satz von Borel durch einen Satz von A. Thue[9]) ersetzen können, der sich zwar aus dem Borelschen Satze ableiten läßt, aber von Thue anders bewiesen wurde. Dieser Satz lautet: *Es seien λ, α zwei reelle Zahlen, u_n die an $\lambda\alpha^n$ am nächsten liegende ganze rationale Zahl. Gibt es zwei Zahlen $\delta > 1$ und C_{20}, so daß für alle n*

$$|\lambda\alpha^n - u_n| < \frac{C_{20}}{\delta^n}$$

ist, so ist α algebraisch. Diese Bemerkung wird uns die Erweiterung von Satz II in zwei verschiedenen Richtungen ermöglichen.

Besitzt eine Folge von ganzen rationalen Zahlen $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ die Eigenschaft A, dann gibt es einen Index m, so daß

$$|u_{n+1} - \alpha u_n| < \tfrac{1}{2} \qquad \text{für } n \geqq m$$

wird. Es ist also u_{n+1} die an αu_n am nächsten liegende ganze Zahl, und die Folge der u_n ist somit für $n \geqq m$ leicht berechenbar. Im allgemeinen ist es aber umständlich, diesen Index m zu bestimmen. Im folgenden Satz III werden wir nun unter den Zahlen α eine Klasse auszeichnen, für welche $m = 0$ ist. Mit Hilfe dieser Zahlen, die wir mit ϱ bezeichnen, wird also die Ermittlung der Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ einer algebraischen Zahl ξ mit den Eigenschaften A und B nur einfache Rechnungen erfordern; es ist somit unsere Forderung in der Einleitung weitgehend erfüllt. Wir werden das Verfahren auch geometrisch deuten.

---

[9]) Thue, Norske Vid. Selsk. Skr. (1912–2) Nr. 20 (15 S.).

Satz III. *In jedem reellen algebraischen Zahlkörper gibt es Zahlen ϱ mit folgender Eigenschaft:*

Bildet man, von zwei ganzen rationalen Zahlen $u_0 \neq 0$ und $v_0 \neq 0$ ausgehend, zwei Folgen von Zahlen u_n und v_n nach folgender Vorschrift:

Vorschrift C. *Für alle $n \geqq 0$ ist u_{n+1} die an ϱu_n, und v_{n+1} die an ϱv_n am nächsten liegende ganze rationale Zahl, also*

$$|u_{n+1} - \varrho u_n| < \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad |v_{n+1} - \varrho v_n| < \tfrac{1}{2} \qquad \text{für } n \geqq 0. \tag{17}$$

Dann bilden $\frac{u_n}{v_n}$ eine Folge von Näherungsbrüchen einer algebraischen Zahl ξ des Körpers von ϱ mit den Eigenschaften A *und* B *(wobei ϱ die Zahl α vertritt). Jede Zahl des Körpers kann auf diese Weise mit Hilfe der gleichen Zahl ϱ erhalten werden.*

Die Folgen u_n und v_n sind durch die Vorschrift C eindeutig bestimmt, denn wie wir gleich zeigen werden, ist ϱ eine erzeugende Zahl des Körpers, also irrational, und somit niemals

$$|u_{n+1} - \varrho u_n| = \tfrac{1}{2} \quad \text{oder} \quad |v_{n+1} - \varrho v_n| = \tfrac{1}{2}.$$

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich aus folgendem Hilfssatz:

Hilfssatz 2: *Es sei ϱ eine ganze algebraische Zahl, ϱ_r für $r = 2, \ldots, s$ ihre Konjugierten, und sie genüge der Ungleichung:*

$$\prod_{r=2}^{s} (1 + |\varrho_r|) \leqq 2. \tag{18}$$

a) *In jedem reellen algebraischen Zahlkörper gibt es solche Zahlen ϱ.*

b) *Es sei $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ eine Folge von ganzen rationalen Zahlen, die nach der Vorschrift C aus u_0 gebildet ist. Dann ist jeder Zahl $u_0 \neq 0$ eine Zahl $\lambda \neq 0$ des Körpers von ϱ so zugeordnet, daß*

$$u_n = \lambda \varrho^n + \lambda_2 \varrho_2^n + \cdots + \lambda_s \varrho_s^n$$

gilt.

Beweis von a). Wir bemerken zuerst, daß aus der Ungleichung (18) folgt, daß jede Zahl ϱ eine Zahl α ist, folglich ist sie eine erzeugende Zahl des Körpers. In den Körpern vom zweiten Grade ist sogar umgekehrt auch jede Zahl α eine Zahl ϱ, denn aus $|\alpha_2| < 1$ folgt $1 + |\alpha_2| < 2$. In den anderen Körpern kann man das Vorhandensein solcher Zahlen ϱ mit der gleichen Methode wie im Hilfssatz 1 nachweisen. Man kann aber auch für ϱ eine ganzzahlige Potenz α^m einer Zahl α wählen. Die Konjugierten von α^m sind die Zahlen α_r^m für $r = 2, \ldots, s$; sie streben also mit wachsendem m nach Null, und man kann die Ungleichung (18) erfüllen, wenn man m genügend groß wählt.

Beweis von b). Es sei

$$\varrho^s + a_1 \varrho^{s-1} + \cdots + a_s = 0 \tag{19}$$

die irreduzible Gleichung mit ganz-rationalen Koeffizienten, der ϱ genügt. Wir setzen

$$\varphi_{n+1} = u_{n+1} - \varrho u_n$$

und errechnen daraus, daß:

$$u_{n+r} = \varphi_{n+r} + \varrho\,\varphi_{n+r-1} + \cdots + \varrho^{r-1}\varphi_{n+1} + \varrho^r u_n.$$

Bilden wir nun die ganze rationale Zahl

$$w_n = u_{n+s} + a_1 u_{n+s-1} + \cdots + a_s u_n,$$

so wird, unter Berücksichtigung von (19),

$$(20)\quad w_n = \varphi_{n+s} + (\varrho + a_1)\varphi_{n+s-1} + \cdots + (\varrho^{s-1} + a_1\varrho^{s-2} + \cdots + a_{s-1})\varphi_{n+1}$$
$$= \varphi_{n+s} + \theta_1\varphi_{n+s-1} + \cdots + \theta_{s-1}\varphi_{n+1},$$

wobei wir für $r = 1, 2, \ldots, s-1$

$$\theta_r = \varrho^r + a_1\varrho^{r-1} + \cdots + a_r$$

gesetzt haben. Es gilt folgende Identität in ζ:

$$(\zeta - \varrho)(\zeta^{s-1} + \theta_1\zeta^{s-2} + \cdots + \theta_{s-1}) = \zeta^s + a_1\zeta^{s-1} + \cdots + a_s.$$

Daraus ersehen wir, daß die θ_r die elementarsymmetrischen Funktionen der $s-1$ Zahlen $\varrho_2, \ldots, \varrho_s$ sind. Es ist folglich

$$1 + |\theta_1| + \cdots + |\theta_{s-1}| = 1 + |\varrho_2 + \cdots + \varrho_s| + \cdots + |\varrho_2 \ldots \varrho_s|$$
$$\leqq \prod_{r=2}^{s} (1 + |\varrho_r|) \leqq 2.$$

Aus der Bedingung (17)

$$|u_{n+1} - \varrho u_n| = |\varphi_{n+1}| < \tfrac{1}{2} \qquad \text{für alle } n \geqq 0$$

folgt nun in (20):

$$|w_n| < \tfrac{1}{2}(1 + |\theta_1| + \cdots + |\theta_{s-1}|) \leqq 1.$$

Die ganze rationale Zahl w_n verschwindet also für alle n, das heißt aber, die Zahlen u_n genügen der linearen Rekursion

$$(21)\qquad u_{n+s} + a_1 u_{n+s-1} + \cdots + a_s u_n = 0.$$

Betrachten wir wieder die Potenzreihe in ζ

$$f(\zeta) = u_0 + u_1\zeta + \cdots + u_n\zeta^n + \cdots,$$

so wird

$$(1 + a_1\zeta + \cdots + a_s\zeta^s) f(\zeta) = P(\zeta),$$

wobei $P(\zeta)$ ein Polynom mit rational-ganzzahligen Koeffizienten ist, dessen Grad $s-1$ nicht überschreitet, denn die Koeffizienten der höheren Potenzen von ζ verschwinden alle nach (21). Es ist somit $f(\zeta)$ eine rationale Funktion

von ζ, deren Pole in den Punkten $\frac{1}{\varrho}, \frac{1}{\varrho_2}, \ldots, \frac{1}{\varrho_s}$ liegen. Wie beim Beweis von Satz II entnimmt man dieser Tatsache, daß

$$u_n = \lambda \varrho^n + \lambda_2 \varrho_2^n + \cdots + \lambda_s \varrho_s^n,$$

wo $\lambda \neq 0$ eine Zahl des Körpers von ϱ bedeutet und $\lambda_2, \ldots, \lambda_s$ ihre Konjugierten.

Aus der erhaltenen Formel für u_n schließen wir wie im Beweis von Satz I, daß

$$|u_{n+1} - \varrho u_n| < \frac{C_{21}}{|u_n|^\varepsilon}.$$

Der Exponent ε ist die schon eingeführte Größe, für die $|\varrho_2| \varrho^\varepsilon = 1$ ist, wenn $|\varrho_2|$ die größte der Zahlen $|\varrho_2|, \ldots, |\varrho_s|$ bedeutet. Da ϱ eine Zahl α des Hilfssatzes 1 ist, so gilt

$$\varepsilon \leqq \frac{1}{s-1}.$$

Man kann aber auch $\varrho = \alpha^m$ wählen mit geeignetem m; in diesem Falle ist ε mit dem entsprechenden Exponenten für α identisch. Es gibt also auch Zahlen ϱ, für die ε beliebig nahe an $\frac{1}{s-1}$ gewählt werden kann.

Schluß des Beweises von Satz III. Betrachten wir nun zwei Folgen $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ und $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$, die nach der Vorschrift C aus den Zahlen $u_0 \neq 0$ und $v_0 \neq 0$ entstehen. Nach Hilfssatz 2 sind ihnen zwei Zahlen $\lambda \neq 0$ und $\mu \neq 0$ des Körpers von ϱ so zugeordnet, daß

$$u_n = \lambda \varrho^n + \lambda_2 \varrho_2^n + \cdots + \lambda_s \varrho_s^n,$$
$$v_n = \mu \varrho^n + \mu_2 \varrho_2^n + \cdots + \mu_s \varrho_s^n,$$

somit genügen dann die Folgen u_n und v_n den schärferen Ungleichungen

$$|u_{n+1} - \varrho u_n| < \frac{C_{21}}{|u_n|^\varepsilon} \quad \text{und} \quad |v_{n+1} - \varrho v_n| < \frac{C_{22}}{|u_n|^\varepsilon}.$$

Der Bruch $\frac{u_n}{v_n}$ strebt mit wachsendem n nach $\frac{\lambda}{\mu} = \xi$, also nach einer algebraischen Zahl, die dem Körper von ϱ angehört. Für die Schärfe der Annäherung gilt die Ungleichung

$$|u_n - \xi v_n| < \frac{C_{23}}{|v_n|^\varepsilon}.$$

Die Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ besitzen daher die Eigenschaften A und B.

Umgekehrt sei ξ eine beliebige Zahl des Körpers von ϱ. Man kann immer ξ als Quotient $\frac{\lambda}{\mu}$ zweier ganzen Zahlen λ und μ des Körpers darstellen, die außerdem den Ungleichungen

$$(22) \qquad \begin{aligned} |\lambda_2(\varrho - \varrho_2)| + \cdots + |\lambda_s(\varrho - \varrho_s)| &< \tfrac{1}{2}, \\ |\mu_2(\varrho - \varrho_2)| + \cdots + |\mu_s(\varrho - \varrho_s)| &< \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

genügen. Bezeichnen wir nämlich mit λ', μ' zwei ganze Zahlen des Körpers für die $\xi = \frac{\lambda'}{\mu'}$ gilt. Die Konjugierten der Zahl $\lambda' \varrho^m$ sind dann die Zahlen $\lambda'_r \varrho_r^m$, wo $r = 2, \ldots, s$; diejenigen von $\mu' \varrho^m$ sind die Zahlen $\mu'_r \varrho_r^m$ für $r = 2, \ldots, s$. Mit wachsendem Exponenten m streben diese Konjugierten nach Null, und man kann m so bestimmen, daß die Ungleichungen

$$|\lambda'_2 \varrho_2^m (\varrho - \varrho_2)| + \cdots + |\lambda'_s \varrho_s^m (\varrho - \varrho_s)| < \tfrac{1}{2},$$
$$|\mu'_2 \varrho_2^m (\varrho - \varrho_2)| + \cdots + |\mu'_s \varrho_s^m (\varrho - \varrho_s)| < \tfrac{1}{2}$$

gelten. Die ganzen algebraischen Zahlen $\lambda = \lambda' \varrho^m$ und $\mu = \mu' \varrho^m$ erfüllen dann die Bedingungen (22), und es ist $\xi = \frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{\lambda}{\mu}$. Die Zahlen

$$u_n = \lambda \varrho^n + \lambda_2 \varrho_2^n + \cdots + \lambda_s \varrho_s^n,$$
$$v_n = \mu \varrho^n + \mu_2 \varrho_2^n + \cdots + \mu_s \varrho_s^n$$

sind ganz rational, und es ist

$$u_{n+1} - \varrho u_n = \lambda_2 (\varrho_2 - \varrho) \varrho_2^n + \cdots + \lambda_s (\varrho_s - \varrho) \varrho_s^n,$$
$$v_{n+1} - \varrho v_n = \mu_2 (\varrho_2 - \varrho) \varrho_2^n + \cdots + \mu_s (\varrho_s - \varrho) \varrho_s^n.$$

Die Ungleichungen (22) zeigen uns dann, daß

$$|u_{n+1} - \varrho u_n| < \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad |v_{n+1} - \varrho v_n| < \tfrac{1}{2}$$

für alle $n \geqq 0$ gilt. Die Folgen u_n und v_n entstehen also aus u_0 und v_0 durch die Vorschrift C, und die Quotienten $\frac{u_n}{v_n}$ sind Näherungsbrüche von ξ, welche die Eigenschaften A und B besitzen.

Geometrische Konstruktion der Näherungsbrüche. In einer Ebene betrachten wir das Gitter der Punkte mit rational-ganzzahligen Koordinaten in bezug auf ein rechtwinkliges Achsensystem OX, OY. In dieser Ebene zeichnen wir die Geraden G und G', deren Gleichungen $Y = \varrho X$ und $Y = \frac{1}{\varrho} X$ lauten. Von einem Gitterpunkt u_0 auf OX ausgehend, ziehen wir die Parallele zu OY bis zum Gitterpunkt, der am nächsten an G liegt; von diesem Punkte aus ziehen wir die Parallele zu OX bis zum Gitterpunkt, der am nächsten an G' liegt, und wiederholen diese Konstruktion ins Unendliche. Auf diese Weise erhalten wir einen unendlichen Streckenzug K, der aus den Strecken K_0, $K_1, \ldots, K_n, \ldots$ zusammengesetzt ist, die abwechselnd parallel zu OY und OX sind. Es sei L, bestehend aus den Strecken $L_0, L_1, \ldots, L_n, \ldots$, der Streckenzug, der auf entsprechende Weise von dem Gitterpunkt v_0 auf OY ausgeht, wo wir aber mit L_0 parallel zu OX beginnen. Die Strecken mit gleichem Index K_n und L_n stehen dann senkrecht aufeinander; sie oder ihre Verlängerungen schneiden sich in Gitterpunkten, deren Koordinaten wir mit u_n, v_n bezeichnen wollen, und zwar soll u_n für gerades n die Abszisse und für ungerades n die Ordinate des Punktes bedeuten. Satz III lehrt uns dann, daß

sich die erhaltenen Gitterpunkte u_n, v_n zwei Geraden $Y = \xi X$ und $Y = \frac{1}{\xi} X$ so nähern, daß

$$|u_n - \xi v_n| < \frac{C_{23}}{|v_n|^\varrho}.$$

Die Größe ξ ist eine algebraische Zahl des Körpers von ϱ, und jede algebraische Zahl dieses Körpers kann auf diese Weise mit Hilfe der gleichen Geraden G und G' angenähert werden.

Wenn der Körper vom zweiten Grade ist, erhalten wir die besten Näherungen, wenn wir für ϱ eine Einheit wählen, dann tritt uns der Fall der Kettenbruchnäherungen wieder entgegen. Wir kommen sogar hier mit einer einzigen Zahl ϱ für alle Zahlen des Körpers aus. Das kommt daher, daß wir die für die Kettenbruchnäherungen gültige Ungleichung

$$|u_n - \xi v_n| < \frac{1}{|v_n|}$$

durch die etwas weniger fordernde Bedingung

$$|u_n - \xi v_n| < \frac{C_{23}}{|v_n|}$$

ersetzt haben.

Wir hatten angedeutet, daß der Beweis von Satz II sich entweder auf den Beweis von Thue oder auf denjenigen von Borel stützen konnte, die von verschiedenen Grundgedanken ausgehen. Diese beiden Richtungen können nun ausgebaut und wesentlich verschärft werden; sie führen so zu zwei verschiedenen Erweiterungen Satz IV a) und Satz IV b) von Satz II, der in beiden Sätzen enthalten ist. Wir werden die Beweise von den Sätzen IV a) und IV b) vollständig geben, so daß dadurch auch Satz II vollständig bewiesen ist, ohne daß die vorherige Kenntnis der Arbeiten von Thue oder Borel erforderlich ist. Satz IV lautet:

Satz IV. *Die reelle Zahl ξ besitze eine unendliche Folge von verschiedenen Näherungsbrüchen $\frac{u_n}{v_n}$. Wir setzen*

$$\varphi_{n+1} = u_{n+1} - \alpha u_n \quad \text{und} \quad \psi_{n+1} = v_{n+1} - \alpha v_n.$$

Die Zahl ξ ist algebraisch, wenn man eine Zahl $\alpha > 1$ so finden kann, daß eine von beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

a) *Es gilt zugleich*

$$|\varphi_n| \leqq \frac{1}{2e\alpha(1+\log|u_0|)}, \; u_0 \neq 0 \quad \text{und} \quad |\psi_n| \leqq \frac{1}{2e\alpha(1+\log|v_0|)}, \; v_0 \neq 0$$

für alle $n = 1, 2, \ldots$. Die Zahl e bedeutet die Basis der natürlichen Logarithmen. Der Grad von ξ kann die kleinste der beiden Größen $1 + \log|u_0|$ und $1 + \log|v_0|$ nicht überschreiten.

b) *Es gilt zugleich*

$$|\varphi_n|^2 + |\varphi_{n+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{2n}|^2 \leqq \frac{1}{4\alpha^2}$$

und

$$|\psi_n|^2 + |\psi_{n+1}|^2 + \cdots + |\psi_{2n}|^2 \leqq \frac{1}{4\alpha^2}$$

für alle genügend großen n, also für alle $n \geqq m$.

Beweis von Satz IVa). Wir zeigen zunächst, daß aus der Ungleichung

$$|\varphi_n| \leqq \frac{1}{2e\alpha(1+\log|u_0|)} \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots \tag{23}$$

folgt, daß α eine ganze algebraische Zahl ist, für deren Konjugierten $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ die Ungleichungen

$$|\alpha_r| \leqq 1 \qquad \text{für } r = 2, \ldots, s \tag{24}$$

gelten. Hierzu genügt es zu zeigen, daß für die u_n eine lineare Rekursion mit ganzen Koeffizienten besteht. Wie wir beim Beweis vom Hilfssatz 2 gesehen haben, stellt nämlich dann die schon dort betrachtete Potenzreihe

$$f(\zeta) = u_0 + u_1\zeta + \cdots + u_n\zeta^n + \cdots \tag{25}$$

eine rationale Funktion von ζ dar, deren Zähler und Nenner ganz-rationale Koeffizienten besitzen. Da nach (23) der Ausdruck $|u_{n+1} - \alpha u_n|$ beschränkt ist, so hat $f(\zeta)$ im Kreise $|\zeta| < 1$ nur einen einfachen Pol im Punkte $\zeta = \frac{1}{\alpha}$. Nach dem Satz von Fatou ist daher α eine ganze algebraische Zahl und alle ihre Konjugierten liegen im Kreis $|\zeta| \leqq 1$, genügen also den Ungleichungen (24). Auf dem Kreis $|\zeta| = 1$ können aber Nullstellen des Nenners von $f(\zeta)$ liegen, die zu $\frac{1}{\alpha}$ nicht konjugiert sind; wir bezeichnen solche Nullstellen mit $\frac{1}{\alpha_h}$, wobei $h \geqq s+1$. Die Zahlen α_h mit $h \geqq s+1$ sind auch ganz algebraisch; die Beträge ihrer Konjugierten können den Wert Eins nicht überschreiten. Aus den Ungleichungen

$$1 \leqq |\text{Norm } \alpha_h| \leqq 1$$

folgt, daß α_h und alle Konjugierten den Betrag Eins haben; diese Zahlen α_h sind also Einheitswurzeln und liegen alle auf dem Kreis $|\zeta| = 1$. Sie können eventuell auch mehrfache Nullstellen des Nenners sein; mit α_h für $h = s+1, \ldots, l$ bezeichnen wir dann die verschiedenen unter ihnen.

Mit noch unbestimmten ganzen rationalen Zahlen $k, b_0, b_1, \ldots, b_k$ bilden wir die ganze rationale Zahl

$$w_n = b_0 u_{n+k} + b_1 u_{n+k-1} + \cdots + b_k u_n.$$

Wir bezeichnen mit b eine obere Schranke für alle $|b_0|, |b_1|, \ldots, |b_k|$ und mit φ eine obere Schranke für alle $|\varphi_n|$. Wir wollen nun zeigen:

Bestimmt man die Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_k$ *so, daß* $w_0 = 0$, *und ist*

$$\varphi < \frac{1}{(k+1)b},$$

so folgt daraus $w_n = 0$ *für alle* $n \geqq 0$.

Beweis. Wir schließen durch vollständige Induktion nach n. Nehmen wir an, daß schon $w_n = 0$ bewiesen ist, dann wird

$$w_{n+1} = w_{n+1} - \alpha w_n = b_0 \varphi_{n+k+1} + b_1 \varphi_{n+k} + \cdots + b_k \varphi_{n+1},$$

also

$$|w_{n+1}| \leqq (k+1)\, b\, \varphi < 1.$$

Da aber w_{n+1} ganz rational ist, muß $w_{n+1} = 0$ sein.

Wir wollen nun untersuchen, wie wir $w_0 = 0$ erhalten können. Dazu zeigen wir:

Für jedes $k \geqq 1$ *kann man ganze rationale* $b_0, b_1, \ldots, b_k$ *so finden, daß* $w_0 = 0$, *wenn die obere Schranke* b *der Zahlen* $|b_0|, |b_1|, \ldots, |b_k|$ *und die obere Schranke* φ *der Zahlen* $|\varphi_1|, |\varphi_2|, \ldots, |\varphi_n|, \ldots$ *den Ungleichungen*

$$b \geqq 2\alpha |u_0|^{\frac{1}{k}} - 1 \quad \textit{und} \quad \varphi < \frac{1}{(k+1)b}$$

genügen.

Beweis. Wir benützen das Dirichletsche Schubfachprinzip.. Wir betrachten alle Ausdrücke von der Form

$$w_0' = b_0' |u_k| + b_1' |u_{k-1}| + \cdots + b_k' |u_0|,$$

wo die b_r' nichtnegative ganze rationale Zahlen mit

$$0 \leqq b_r' \leqq b \qquad \text{für } r = 0, 1, \ldots, k$$

bedeuten. Solche Ausdrücke gibt es genau $(b+1)^{k+1}$. Für jeden wird

$$w_0' \leqq b(|u_k| + |u_{k-1}| + \cdots + |u_0|). \tag{26}$$

Aus

$$|\varphi_r| = |u_r - \alpha u_{r-1}| \leqq \varphi$$

schließt man durch vollständige Induktion nach r, daß

$$|u_r| \leqq \alpha^r \left(|u_0| + \frac{r\varphi}{\alpha}\right) \leqq \alpha^k \left(|u_0| + \frac{r\varphi}{\alpha}\right) \qquad \text{für } r \leqq k.$$

Wir erhalten somit aus (26)

$$w_0' \leqq b\, \alpha^k \left\{(k+1)|u_0| + \frac{k(k+1)\varphi}{2\alpha}\right\}.$$

Da aber

$$\varphi < \frac{1}{(k+1)b},$$

so folgt daraus

$$w_0' < (k+1)\,b\,\alpha^k|u_0| + (k+1)\,\alpha^k \frac{k}{2\alpha(k+1)} < (k+1)(b+1)\,\alpha^k|u_0| - 1,$$

denn

$$\frac{k}{2\alpha(k+1)} < \frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{(k+1)\,\alpha^k} \leqq |u_0| - \frac{1}{(k+1)\,\alpha^k}.$$

Ist nun die Anzahl der Ausdrücke w_0' größer als die Anzahl der Werte, die von der ganzen rationalen Zahl w_0' angenommen werden können, so gibt es zwei verschiedene Systeme nichtnegativer ganzen Zahlen $b_0', b_1', \ldots, b_k'$ und $b_0'', b_1'', \ldots, b_k''$, so daß

$$b_0'|u_k| + b_1'|u_{k-1}| + \cdots + b_k'|u_0| = b_0''|u_k| + b_1''|u_{k-1}| + \cdots + b_k''|u_0|.$$

Dann ist

$$(b_0' - b_0'')\,|u_k| + (b_1' - b_1'')\,|u_{k-1}| + \cdots + (b_k' - b_k'')\,|u_0| = 0.$$

Die Koeffizienten der $|u_r|$ sind hier nicht alle Null, und ihre Beträge überschreiten nicht die Schranke b. Durch geeignete Vorzeichenänderung folgt daraus das Vorhandensein eines Ausdruckes

$$w_0 = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \cdots + b_k u_0 = 0,$$

wobei $|b_r| \leqq b$ für $r = 0, 1, \ldots, k$ ist.

Die Anzahl der Ausdrücke w_0' ist aber $(b+1)^{k+1}$, diejenige der Zahlenwerte, die w_0' annehmen kann, ist kleiner als $(b+1)(k+1)\,\alpha^k|u_0|$. Es gibt also einen Ausdruck w_0, der den Wert Null hat, wenn

$$(b+1)^{k+1} \geqq (b+1)(k+1)\,\alpha^k|u_0|, \tag{27}$$

also wenn

$$b + 1 \geqq (k+1)^{\frac{1}{k}}\,\alpha\,|u_0|^{\frac{1}{k}}.$$

Aber

$$(k+1)^{\frac{1}{k}} \leqq 2 \qquad \text{für } k \geqq 1,$$

die Ungleichung (27) ist daher sicher erfüllt, wenn

$$b + 1 \geqq 2\,\alpha\,|u_0|^{\frac{1}{k}}$$

gilt, und unsere Behauptung ist erwiesen.

Wir zeigen nun:

Wenn die ganze Zahl k den Ungleichungen

$$\log|u_0| < k \leqq 1 + \log|u_0|$$

genügt, so ist

$$(k+1)|u_0|^{\frac{1}{k}} < e\,(1 + \log|u_0|).$$

Die Zahl e ist die Basis der natürlichen Logarithmen.

Beweis. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem OX, OY betrachten wir die Kurve H, deren Gleichung

$$Y = 1 + \log(1 + X) \tag{H}$$

lautet. Die Gerade D, die der Gleichung

$$Y = \frac{1}{k} X + \log(k + 1) \tag{D}$$

genügt, schneidet H, wie man sofort sieht, für $X = k$. Für $X = k - 1$ ist aber

$$\frac{1}{k}(k - 1) + \log(k + 1) < 1 + \log(1 + k - 1),$$

denn

$$\log(k + 1) = \log k + \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \log k + \frac{1}{k}.$$

Der Punkt $X = k - 1$ von D liegt also unter dem entsprechenden Punkt von H. Aber H ist nach unten konkav, somit liegt im ganzen Intervall $k - 1 \leqq X < k$ die Gerade D unter der Kurve H. Anders ausgedrückt: Für

$$X < k \leqq 1 + X$$

gilt

$$\frac{1}{k} X + \log(k + 1) < 1 + \log(1 + X).$$

Setzen wir hier $X = \log|u_0|$, so gilt für

$$\log|u_0| < k \leqq 1 + \log|u_0|$$

die Ungleichung

$$\frac{1}{k} \log|u_0| + \log(k + 1) < 1 + \log(1 + \log|u_0|)$$

oder

$$(k + 1)\,|u_0|^{\frac{1}{k}} < e\,(1 + \log|u_0|).$$

Schluß des Beweises von Satz IVa). Es sei nun

$$\varphi \leqq \frac{1}{2\,e\,\alpha\,(1 + \log|u_0|)}.$$

Wir wählen eine ganze Zahl k, die durch die Ungleichungen

$$\log|u_0| < k \leqq 1 + \log|u_0|$$

bestimmt ist, dann wird

$$\varphi < \frac{1}{2\,\alpha\,(k + 1)\,|u_0|^{\frac{1}{k}}}.$$

Es sei b diejenige ganze Zahl, die den Ungleichungen

$$2\,\alpha\,|u_0|^{\frac{1}{k}} - 1 \leqq b < 2\,\alpha\,|u_0|^{\frac{1}{k}}$$

genügt, dann ist

$$\varphi < \frac{1}{(k+1)\,b}.$$

Alle Zwischensätze werden anwendbar, und es ist somit bewiesen, daß α eine ganze algebraische Zahl ist, deren Grad s den Wert $k \leqq 1 + \log |u_0|$ nicht überschreiten kann und deren Konjugierte den Ungleichungen $|\alpha_r| \leqq 1$ für $r = 2, \ldots, s$ genügen. Für die Folge u_n gilt die lineare Rekursion

$$b_0 u_{n+k} + b_1 u_{n+k-1} + \cdots + b_k u_n = 0. \tag{28}$$

Es ist also

$$Q(\zeta) = b_0 + b_1 \zeta + \cdots + b_k \zeta^k$$

der Nenner der durch die Potenzreihe (25) dargestellten rationalen Funktion. Die Wurzeln von $Q(\zeta) = 0$ sind die Zahlen $\frac{1}{\alpha}$ und $\frac{1}{\alpha_r}$ für $r = 2, \ldots, l$. Die Zahlen $\frac{1}{\alpha_h}$ für $h = s+1, \ldots, l$ sind die eventuell auch als mehrfache Wurzeln von $Q(\zeta) = 0$ auftretenden Einheitswurzeln. Die Methode, die wir in Satz II benützt haben, zeigt uns, daß die Lösung der Rekursion (28) auf die Form

$$u_n = \lambda \alpha^n + \lambda_2 \alpha_2^n + \cdots + \lambda_s \alpha_s^n + \alpha_{s+1}^n P_{s+1}(n) + \cdots + \alpha_l^n P_l(n)$$

gebracht werden kann. Hierbei ist λ eine algebraische Zahl des Körpers von α und $P_h(n)$ für $h = s+1, \ldots, l$ bezeichnet ein Polynom in n, dessen Grad kleiner als die Vielfachheit der Wurzel $\frac{1}{\alpha_h}$ von $Q(\zeta) = 0$ ist. Wir wollen nun zeigen, daß der Grad dieser Polynome Null sein muß, also:

Die Polynome $P_h(n)$ für $h = s+1, \ldots, l$ reduzieren sich auf Konstanten λ_h. Es sei $g \geqq 0$ der höchste Grad der Polynome $P_h(n)$, der für $h = s+1, \ldots, l$ wirklich vorkommt. Bezeichnen wir mit λ_h den Koeffizienten von n^g in $P_h(n)$, so verschwinden für $h = s+1, \ldots, l$ nicht alle λ_h. Es wird

$$\varphi_{n+1} = u_{n+1} - \alpha u_n = \lambda_2(\alpha_2 - \alpha)\alpha_2^n + \cdots + \lambda_s(\alpha_s - \alpha)\alpha_s^n + \sigma_n,$$

wobei

$$\sigma_n = \{\alpha_{s+1} P_{s+1}(n+1) - \alpha P_{s+1}(n)\}\alpha_{s+1}^n + \cdots + \{\alpha_l P_l(n+1) - \alpha P_l(n)\}\alpha_l^n.$$

Der Koeffizient von n^g in σ_n ist

$$\lambda_{s+1}(\alpha_{s+1} - \alpha)\alpha_{s+1}^n + \cdots + \lambda_l(\alpha_l - \alpha)\alpha_l^n. \tag{29}$$

Dieser Koeffizient nimmt unendlich oft einen von Null verschiedenen Wert η an. Betrachten wir nämlich folgendes Gleichungssystem für $\lambda_{s+1}(\alpha_{s+1} - \alpha), \ldots, \lambda_l(\alpha_l - \alpha)$:

$$\begin{aligned}
&\lambda_{s+1}(\alpha_{s+1} - \alpha) + \cdots + \lambda_l(\alpha_l - \alpha) = 0\\
&\lambda_{s+1}(\alpha_{s+1} - \alpha)\alpha_{s+1} + \cdots + \lambda_l(\alpha_l - \alpha)\alpha_l = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\lambda_{s+1}(\alpha_{s+1} - \alpha)\alpha_{s+1}^{l-s-1} + \cdots + \lambda_l(\alpha_l - \alpha)\alpha_l^{l-s-1} = 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

Die Determinante der Koeffizienten ist von Null verschieden, da wir $\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_l$ verschieden voneinander vorausgesetzt haben. Das System hat also nur die Lösung

$$\lambda_{s+1}(\alpha_{s+1} - \alpha) = \cdots = \lambda_l(\alpha_l - \alpha) = 0.$$

Aber auch α ist von allen α_h mit $h = s+1, \ldots, l$ verschieden, denn $\alpha > 1$ und $|\alpha_h| = 1$; somit wäre $\lambda_{s+1} = \cdots = \lambda_l = 0$, was wir ausgeschlossen hatten. Mindestens eine der Größen (30) ist folglich eine von Null verschiedene Zahl η. Es gibt also einen Exponenten c mit $0 \leqq c < l - s$, so daß

$$\lambda_{s+1}(\alpha_{s+1} - \alpha)\,\alpha_{s+1}^c + \cdots + \lambda_l(\alpha_l - \alpha)\,\alpha_l^c = \eta \neq 0.$$

Da die Zahlen $\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_l$ Einheitswurzeln sind, gibt es einen Exponenten d, so daß für alle $h = s+1, \ldots, l$

$$\alpha_h^d = 1$$

gilt. Der Ausdruck (29) nimmt also den Wert η an für alle Exponenten von der Form

$$n = dt + c,$$

wo t eine beliebige nichtnegative rationale ganze Zahl ist. Für diese Werte von n wird daher σ_n unendlich groß, wenn $g \geqq 1$. Die Summe

$$\lambda_2(\alpha_2 - \alpha)\,\alpha_2^n + \cdots + \lambda_s(\alpha_s - \alpha)\,\alpha_s^n = \varphi_{n+1} - \sigma_n$$

bleibt aber beschränkt. Aus den Voraussetzungen von Satz IV a) folgt auch, daß $|\varphi_{n+1}|$ beschränkt ist. Wir haben somit einen Widerspruch, wenn $g > 0$, folglich ist $g = 0$ und u_n hat die Form

$$u_n = \lambda\,\alpha^n + \lambda_2\,\alpha_2^n + \cdots + \lambda_s\,\alpha_s^n + \lambda_{s+1}\,\alpha_{s+1}^n + \cdots + \lambda_l\,\alpha_l^n.$$

In gleicher Weise folgt aus der Bedingung

$$|\varphi_n| < \frac{1}{2\,e\,\alpha\,(1 + \log|v_0|)} \qquad \text{für alle } n \geqq 1,$$

daß es Zahlen $\mu, \mu_2, \ldots, \mu_f$ gibt, so daß

$$v_n = \mu\,\alpha^n + \mu_2\,\alpha_2^n + \cdots + \mu_s\,\alpha_s^n + \mu_{s+1}\,\alpha_{s+1}'^n + \cdots + \mu_f\,\alpha_f'^n,$$

wobei μ dem Körper von α angehört und $f \geqq s$. Die Zahlen α_h' für $h = s+1, \ldots, f$ sind etwaige vorkommende Einheitswurzeln, und es ist $f \leqq k' \leqq 1 + \log|v_0|$. Da α die einzige Zahl ist, deren Betrag größer als Eins ist, so streben die Brüche $\frac{u_n}{v_n}$ mit wachsendem n dem Grenzwert $\frac{\lambda}{\mu}$ zu; folglich ist $\xi = \frac{\lambda}{\mu}$ eine algebraische Zahl des Körpers von α, und Satz IV a) ist bewiesen.

Beweis von Satz IV b). Es genügt wieder zu zeigen, daß die Bedingung

$$|\varphi_n|^2 + |\varphi_{n+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{2n}|^2 \leqq \frac{1}{4\alpha^2} \qquad \text{für } n > m \tag{31}$$

das Bestehen einer linearen Rekursion mit ganzen rationalen Koeffizienten

$$b_0 u_{n+k} + b_1 u_{n+k-1} + \cdots + b_k u_n = 0 \tag{32}$$

bedingt. Schreiben wir diese Rekursion (32) für $k+1$ aufeinanderfolgende Werte von n, so ergibt sich, daß die Determinanten

$$d_k^{(n)} = \begin{vmatrix} u_n & u_{n+1} & \cdots & u_{n+k} \\ u_{n+1} & u_{n+2} & \cdots & u_{n+k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{n+k} & u_{n+k+1} & \cdots & u_{n+2k} \end{vmatrix}$$

für alle n verschwinden. Umgekehrt folgt aus dem Verschwinden der Determinanten $d_k^{(n)}$ für alle n, daß alle Gleichungen (32) auflösbar sind in rationalen, also auch in ganzen rationalen Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_k$, die nicht alle verschwinden.

Zum Beweis wollen wir annehmen, daß k die kleinste Zahl ist, für die

$$d_k^{(n)} = 0 \qquad \text{für alle } n = 0, 1, \ldots.$$

Es ist dann $d_{k-1}^{(0)} \neq 0$. Bildet man nämlich die Determinante der Unterdeterminanten der vier Eckelemente von $d_k^{(n)}$, so erhält man nach einer bekannten Laplaceschen Formel die Beziehung

$$d_{k-1}^{(n)} d_{k-1}^{(n+2)} - (d_{k-1}^{(n+1)})^2 = d_k^{(n)} d_{k-2}^{(n+2)}. \tag{33}$$

Aus dieser Formel schließt man, unter Berücksichtigung von $d_k^{(n)} = 0$, daß aus $d_{k-1}^{(h)} = 0$ folgt $d_{k-1}^{(h+1)} = 0$ und, falls $h \geqq 2$, auch $d_{k-1}^{(h-1)} = 0$. Wäre also $d_{k-1}^{(0)} = 0$, so würden auch alle anderen Determinanten $d_{k-1}^{(n)}$ verschwinden, das aber widerspricht der Wahl von k. Die gleiche Schlußweise zeigt uns noch, daß die Determinanten $d_{k-1}^{(n)}$ für $n \geqq 1$ entweder sämtlich verschwinden oder sämtlich von Null verschieden sind.

Wir wollen zuerst den Fall untersuchen, wo alle $d_{k-1}^{(n)} \neq 0$. Für jeden Wert von $n = 0, 1, \ldots$ hat das System

$$\begin{aligned} b_0 u_{n+k} &+ b_1 u_{n+k-1} + \cdots + b_k u_n &&= 0 \\ b_0 u_{n+k+1} &+ b_1 u_{n+k} + \cdots + b_k u_{n+1} &&= 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_0 u_{n+2k-1} &+ b_1 u_{n+2k-2} + \cdots + b_k u_{n+k-1} &&= 0 \end{aligned}$$

eine Lösung in ganzen rationalen Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_k$, und es ist $b_0 \neq 0$ und $b_k \neq 0$, weil $d_{k-1}^{(n)} \neq 0$ und $d_{k-1}^{(n+1)} \neq 0$. Formt man mit Hilfe dieser Gleichungen die Determinante $d_k^{(n)}$ um, so ergibt sich

$$0 = d_k^{(n)} = \frac{1}{b_0} (b_0 u_{n+2k} + b_1 u_{n+2k-1} + \cdots + b_k u_{n+k}) d_{k-1}^{(n)}.$$

Es ist also

$$b_0 u_{n+2k} + b_1 u_{n+2k-1} + \cdots + b_k u_{n+k} = 0,$$

und die Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_k$ sind auch Lösungen für das System, das dem Werte $n+1$ entspricht; folglich sind $b_0, b_1, \ldots, b_k$ von n unabhängig, das heißt die Folge u_n genügt einer Rekursion (32).

Betrachten wir nun den Fall, daß alle $d_{k-1}^{(n)}$ für $n \geqq 1$ verschwinden. Das System

$$\begin{aligned} b_0 u_k &+ b_1 u_{k-1} + \cdots + b_k u_0 = 0 \\ b_0 u_{k+1} &+ b_1 u_k + \cdots + b_k u_1 = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_0 u_{2k-1} &+ b_1 u_{2k-2} + \cdots + b_k u_{k-1} = 0 \end{aligned}$$

läßt für b_k nur die Lösung $b_k = 0$ zu, denn $d_{k-1}^{(0)} \neq 0$ und $d_{k-1}^{(1)} = 0$. In der Rekursion tritt folglich u_0 überhaupt nicht auf. Die Determinanten $d_{k-1}^{(n)}$, die aus der Folge $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ gebildet werden, verschwinden aber alle, somit sind wir für diese Folge auf die Anfangsaufgabe zurückgeführt mit einem kleineren Wert für k. Da aber unendlich viele u_n nicht verschwinden, erhalten wir auf diese Weise nach endlich vielen Schritten eine Folge, für die der erste Fall vorliegt. Es gibt also auch in diesem Falle eine Rekursion (32) für alle u_n mit $n = 0, 1, \ldots$, aber einige der letzten Koeffizienten $b_k, b_{k+1}, \ldots$ verschwinden.

Satz von Fatou. *Ist k die kleinste Zahl, für welche die Determinanten $d_k^{(n)}$ alle verschwinden und sind die Zahlen u_n alle ganz rational, so kann man in der Rekursion* (32) $b_0 = 1$ *nehmen.* Wegen der Bedeutung dieses Satzes für unsere Theorie wollen wir der Vollständigkeit halber auch diesen Beweis hier bringen.

Beweis. Aus den Voraussetzungen des Satzes folgt, daß $d_{k-1}^{(0)} \neq 0$; wir können also ganze rationale Zahlen $y_1, \ldots, y_k$, die nicht alle verschwinden, so bestimmen, daß die Zahlen

$$z_n' = y_1 u_n + y_2 u_{n+1} + \cdots + y_k u_{n+k-1}$$

für $n = 0, 1, \ldots, k-2$ verschwinden. Haben alle Zahlen z_n' gemeinsame Teiler, so sei z der größte unter ihnen, sonst setzen wir $z = 1$. Die Zahlen

$$z_n = \frac{z_n'}{z} = \frac{1}{z}\,(y_1 u_n + y_2 u_{n+1} + \cdots + y_k u_{n+k-1})$$

sind dann ganz rational und haben keinen von 1 verschiedenen gemeinsamen Teiler; sie genügen auch der Rekursion (32). Es sei p ein Primfaktor von b_0 und es sei z_q die erste Zahl der Reihe $z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots$, die nicht durch p teilbar ist. Dann ist $q \geqq k-1$ und (32) mit z_n für $n = q-(k-1)$ angewandt, gibt

$$b_1 z_q = -(b_0 z_{q+1} + b_2 z_{q-1} + \cdots + b_k z_{q-k+1}).$$

Jeder Summand in der Klammer ist durch p teilbar; da z_q es nicht ist, so ist b_1 durch p teilbar. Wenden wir nun (32) mit z_n für $n = q-(k-2)$ an, so wird

$$b_2 z_q = -(b_0 z_{q+2} + b_1 z_{q+1} + b_3 z_{q-1} + \cdots + b_k z_{q-k+2}).$$

Da auch b_1 durch p teilbar ist, ist wieder jeder Summand der Klammer durch p teilbar, also auch b_2. Man schließt auf diese Weise der Reihe nach, daß p alle Zahlen $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_k$ teilt. Man kann also jeden von Eins verschiedenen Primfaktor von b_0 aus (32) wegdividieren, und daraus folgt unsere Behauptung.

Kronecker'sches Determinantenkriterium [10]). Nach Kronecker ist für das Bestehen einer linearen Rekursion für die u_n notwendig und hinreichend, daß die Determinanten $d_n^{(0)}$ für alle $n \geqq k$ verschwinden. Es leuchtet ohne weiteres ein, daß die Bedingung notwendig ist, denn alle $d_k^{(n)}$ verschwinden. Die Bedingung ist auch hinreichend; aus der Determinantenrelation (33) schließt man nämlich durch vollständige Induktion nach h, daß aus $d_n^{(0)} = 0$ für $n \geqq k$ folgt $d_n^{(h)} = 0$ für $n \geqq k$, und daher $d_k^{(h)} = 0$ für alle $h = 0, 1, \ldots$.

Anwendung auf den Beweis. Wir werden zeigen, daß aus der Bedingung (31) folgt, daß die Determinanten $d_n^{(0)}$ für wachsendes n nach Null streben. Da sie aber ganze rationale Zahlen sind, ergibt sich daraus das Vorhandensein einer Zahl k, so daß $d_n^{(0)} = 0$ für $n \geqq k$.

Die Beziehung

$$u_{n+1} - \alpha u_n = \varphi_{n+1}$$

gestattet uns die Determinante $d_n^{(0)}$ auf folgende Weise umzuformen:

$$d_n^{(0)} = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \ldots & u_n \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_n & u_{n+1} & \ldots & u_{2n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_0 & \varphi_1 & \ldots & \varphi_n \\ u_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_n & \varphi_{n+1} & \ldots & \varphi_{2n} \end{vmatrix}.$$

Nach einem Satz von Hadamard [11]) gilt aber die Ungleichung

$$(d_n^{(0)})^2 \leqq (|u_0|^2 + |u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2) \prod_{k=1}^{n} (|\varphi_k|^2 + |\varphi_{k+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{k+n}|^2).$$

Wir wollen nun obere Schranken für alle Klammerausdrücke ermitteln. Es sei n so groß gewählt, daß $n \geqq m$.

Zuerst betrachten wir die Zahlen h, die den Ungleichungen $m \leqq h \leqq n$ genügen. Die Reihe der $n + 1$ aufeinanderfolgenden Indizes $h, h + 1, \ldots, h + n$ spalten wir in $f + 1$ Abschnitte, die jeweils mit den Zahlen $h, 2h, \ldots, 2^f h$ beginnen, wobei f der Ungleichung

$$2^f h \leqq h + n < 2^{f+1} h \tag{34}$$

genügt. Aus der Bedingung (31) ergibt sich dann die Ungleichung

$$|\varphi_h|^2 + |\varphi_{h+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{h+n}|^2 \leqq (f + 1) \frac{1}{4\alpha^2}.$$

---

[10]) Kronecker, Monatsber. Akad. Berlin 1881, S. 566–567; Ges. Abh. 2, S. 146 bis 149. Siehe auch: Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie 2 (1927), S. 314 bis 315. Berlin.

[11]) Hadamard, Bull. Sci. math. 17 (1893), S. 240–246.

Nach (34) ist aber

$$f \leqq \frac{1}{\log 2} \log \frac{h+n}{h} = \frac{1}{\log 2} \log\left(2 + \frac{n-h}{h}\right) \leqq 1 + \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{n-h}{2h} < 1 + \frac{n-h}{h} = \frac{n}{h}.$$

Es wird daher

$$\prod_{h=m}^{n} (|\varphi_h|^2 + |\varphi_{h+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{h+n}|^2) < \frac{1}{(2\alpha)^{2n+2-2m}} \prod_{h=1}^{n} \left(1 + \frac{n}{h}\right)$$
$$= (2\alpha)^{2m-2} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{(2\alpha)^{2n}}.$$

Die Stirlingsche Formel für Fakultäten und die Tatsache, daß der Exponent $2m-2$ von n unabhängig ist, zeigen uns das Vorhandensein einer Konstanten C_{24}, so daß

$$(2\alpha)^{2m-2} \frac{(2n)!}{(n!)^2} < C_{24} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}.$$

Somit erhalten wir

$$\prod_{h=m}^{n} (|\varphi_h|^2 + |\varphi_{h+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{h+n}|^2) < \frac{C_{24}}{\alpha^{2n}\sqrt{n}}. \tag{35}$$

Nun wollen wir uns den Zahlen h mit $1 \leqq h < m$ zuwenden. Wir setzen

$$|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + \cdots + |\varphi_{m-1}|^2 = C_{25} - \frac{1}{2\alpha^2}, \tag{36}$$

C_{25} ist von n unabhängig. Die Reihe $m, m+1, \ldots, h+n$ zerlegen wir wie vorhin in $g+1$ Abschnitte, die mit den Zahlen $m, 2m, \ldots, 2^g m$ beginnen, wobei g durch $2^g m \leqq h+n < 2^{g+1} m$ erklärt ist. Wie oben ist dann

$$|\varphi_m|^2 + |\varphi_{m+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{h+n}|^2 \leqq \left(1 + \frac{1}{\log 2} \log \frac{h+n}{m}\right) \frac{1}{4\alpha^2}$$
$$< \left(1 + \frac{1}{\log 2} \log \frac{m+n}{m}\right) \frac{1}{4\alpha^2} \leqq \left(1 + \frac{1}{\log 2} \log 2n\right) \frac{1}{4\alpha^2}.$$

Da aber $\log 2 > \frac{1}{2}$ ist, erhält man

$$1 + \frac{1}{\log 2} \log 2n = 2 + \frac{1}{\log 2} \log n < 2 + 2 \log n.$$

Beachten wir noch (36), so wird für $1 \leqq h < m$

$$|\varphi_h|^2 + |\varphi_{h+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{h+n}|^2 < C_{25} + \frac{1}{2\alpha^2} \log n < C_{25} + \log n$$

und

$$\prod_{h=1}^{m-1} (|\varphi_h|^2 + |\varphi_{h+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{h+n}|^2) < (C_{25} + \log n)^{m-1}. \tag{37}$$

Endlich schätzen wir den Ausdruck $|u_0|^2 + |u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2$. Es ist für $h \geqq m$

$$|u_h - \alpha u_{h-1}| = |\varphi_h| \leqq \frac{1}{2\alpha}.$$

Durch vollständige Induktion nach h erhält man

$$|u_h| \leqq \alpha^{h-m}|u_m| + \frac{1}{2\alpha}(1+\alpha+\cdots\alpha^{h-m-1}) < \alpha^{h-m}\left(|u_m| + \frac{1}{2\alpha(\alpha-1)}\right) \leqq C_{26}\alpha^h.$$

Für $h < m$ kann man eine feste Zahl C_{27} so bestimmen, daß

$$|u_h| \leqq C_{27}\,\alpha^h,$$

und es wird, wenn C_{28} die größte der beiden Zahlen C_{26}, C_{27} bezeichnet,

$$(38) \qquad |u_n|^2 + |u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2 \leqq C_{28}(1+\alpha^2+\cdots+\alpha^{2n}) \leqq C_{29}\,\alpha^{2n}.$$

Durch Zusammenfassen der drei Ungleichungen (35), (37) und (38) erhält man

$$(d_n^{(0)})^2 < \frac{C_{24}}{\alpha^{2n}\sqrt{n}}(C_{25}+\log n)^{m-1}C_{29}\alpha^{2n} = C_{24}C_{29}\frac{(C_{25}+\log n)^{m-1}}{\sqrt{n}}.$$

Der Exponent $m-1$ ist aber auch eine von n unabhängige feste Zahl. Für wachsendes n strebt daher dieser letzte Ausdruck nach Null, und es gibt somit eine Zahl k, so daß $d_n^{(0)} = 0$ für $n \geqq k$.

Schluß des Beweises von Satz IV b). Wir haben somit gezeigt, daß aus der Bedingung (31) das Bestehen einer linearen Rekursion

$$u_{n+k} + b_1 u_{n+k-1} + \cdots + b_k u_n = 0$$

für die u_n erfolgt. Betrachten wir, wie im Beweis von Satz IV a), die Potenzreihe

$$f(\zeta) = u_0 + u_1\zeta + \cdots + u_n\zeta^n + \cdots,$$

so folgt aus der Rekursion, daß $f(\zeta)$ eine rationale Funktion von ζ ist, deren Nenner das Polynom

$$Q(\zeta) = 1 + b_1\zeta + \cdots + b_n\zeta^k$$

ist. Nach (31) ist $|\varphi_n|$ beschränkt, somit sieht man wie in Satz IV a), daß α eine ganze algebraische Zahl ist, deren Konjugierte $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ den Ungleichungen (24), also $|\alpha_r| \leqq 1$ für $r = 2, \ldots, s$ genügen. Übrigens ist

$$\zeta^k + b_1\zeta^{k-1} + \cdots + b_k = 0$$

eine Gleichung, welche die Zahlen $\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ als Wurzeln besitzt; hat sie noch andere Wurzeln $\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_l$, so haben wir gesehen, daß es Einheitswurzeln sind. Wie in Satz IV a) gilt dann

$$(39) \qquad u_n = \lambda\alpha^n + \lambda_2\alpha_2^n + \cdots + \lambda_s\alpha_s^n + \lambda_{s+1}\alpha_{s+1}^n + \cdots + \lambda_l\alpha_l^n,$$

wobei λ eine Zahl des Körpers von α ist. Aus der Bedingung

$$|\psi_n|^2 + |\psi_{n+1}|^2 + \cdots + |\psi_{2n}|^2 \leqq \frac{1}{4\alpha^2} \qquad \text{für } n \geqq m$$

folgt in gleicher Weise, daß

$$(40) \qquad v_n = \mu\alpha^n + \mu_2\alpha_2^n + \cdots + \mu_s\alpha_s^n + \mu_{s+1}\alpha_{s+1}'^n + \cdots + \mu_f\alpha_f'^n,$$

wo auch μ eine Zahl des Körpers von α ist und $\alpha'_{s+1}, \ldots, \alpha'_f$ etwaige vorkommende Einheitswurzeln bedeuten. Der Grenzwert ξ der Brüche $\frac{u_n}{v_n}$ ist also die algebraische Zahl $\frac{\lambda}{\mu}$ des Körpers von α und Satz IV b) ist bewiesen.

Aus den Formeln (39) und (40), die auch im Satz IV a) gelten, sieht man, daß die Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ nur dann die Eigenschaften A und B nicht besitzen, wenn unter den Zahlen $\alpha_2, \ldots, \alpha_l, \alpha'_{s+1}, \ldots, \alpha'_f$ solche vom Betrag Eins vorkommen; dann wird nämlich $\varepsilon = 0$ und wir können nur behaupten, daß $|\varphi_n|$, $|\psi_n|$ und $|u_n - \xi v_n|$ unter festen Schranken bleiben.

Zum Schluß unserer Betrachtungen wollen wir noch zeigen:

Satz II *ist ein Sonderfall sowohl von Satz* IV a), *wie von Satz* IV b). Wir hatten in Satz II aus der Eigenschaft A auf das Vorhandensein einer Zahl $\delta > 1$ geschlossen, so daß

$$|\varphi_n| < \frac{C_{30}}{\delta^n} \quad \text{und} \quad |\psi_n| < \frac{C_{31}}{\delta^n} \tag{41}$$

Betrachten wir zuerst die Voraussetzungen von Satz IV b). Aus (41) folgt, daß die unendlichen Reihen

$$|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + \cdots + |\varphi_n|^2 + \cdots \quad \text{und} \quad |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \cdots + |\psi_n|^2 + \cdots$$

konvergieren. Es gibt also eine Zahl m, so daß für $n \geqq m$

$$|\varphi_n|^2 + |\varphi_{n+1}|^2 + \cdots \leqq \frac{1}{4\alpha^2} \quad \text{und} \quad |\psi_n|^2 + |\psi_{n+1}|^2 + \cdots \leqq \frac{1}{4\alpha^2}.$$

Die Voraussetzungen von Satz IV b) sind folglich erfüllt.

Um Satz IV a) anzuwenden, müssen wir ihn etwas umformen, so daß nur die Indizes $n > m$ in Betracht kommen. Beginnen wir die Folgen u_n und v_n mit $n = m$, so lautet die Bedingung IV b)

$$|\varphi_n| \leqq \frac{1}{2e\alpha(1 + \log|u_m|)} \quad \text{und} \quad |\psi_n| \leqq \frac{1}{2e\alpha(1 + \log|v_m|)} \quad \text{für } n > m.$$

Aus der Eigenschaft A in Satz II folgt aber, wie wir gesehen haben, das Vorhandensein von Konstanten C_{32}, C_{33}, so daß

$$|u_m| < C_{32}\alpha^m \quad \text{und} \quad |v_m| < C_{33}\alpha^m.$$

Beachten wir noch (41), so sehen wir, daß unsere Bedingung IV b) sicher erfüllt ist, wenn

$$\frac{C_{30}}{\delta^n} \leqq \frac{1}{2e\alpha(1 + \log C_{32} + m\log\alpha)} \quad \text{und} \quad \frac{C_{31}}{\delta^n} \leqq \frac{1}{2e\alpha(1 + \log C_{33} + m\log\alpha)}$$
$$\text{für } n > m.$$

Das ist aber der Fall, wenn m groß genug gewählt ist. Wie in Satz II schließt man noch aus den Ungleichungen (41), daß keine der Zahlen α_r für $r \geqq 2$ den

Betrag Eins haben kann; somit besitzen die Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ die Eigenschaft B. Unsere Behauptung ist also bewiesen.

Unabhängigkeit der Bedingungen IV a) *und* IV b). Es stellt sich nun die Frage, ob die Bedingungen IV a) und IV b) wirklich voneinander verschieden sind. Gibt es eine Zahl $\theta > 0$, so daß alle φ_n der Ungleichung

$$\theta \leqq |\varphi_n| \leqq \frac{1}{2\,e\,\alpha\,(1+\log|u_0|)}$$

genügen, so ist die Bedingung IV a) erfüllt, aber nicht die Bedingung IV b). Es müßte also Satz IV b) eine Folge von Satz IV a) sein.

Dies ist aber auch nicht der Fall. Die Bedingung IV b) für φ_n ist z. B. erfüllt, wenn

$$|\varphi_n| < \frac{3}{5\,\alpha\sqrt{n}} \qquad \text{für } n \geqq m_0.$$

Es wird dann nämlich

$$|\varphi_n|^2 + |\varphi_{n+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{2n}|^2 < \frac{9}{25\,\alpha^2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right).$$

Der Ausdruck $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$ strebt aber mit wachsendem n nach $\log 2 < \frac{25}{36}$; somit wird für genügend große n

$$|\varphi_n|^2 + |\varphi_{n+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{2n}|^2 \leqq \frac{9}{25\,\alpha^2}\cdot\frac{25}{36} = \frac{1}{4\,\alpha^2}.$$

Wenn nun eine Folge $|\varphi_n|$ beschränkt ist, so ergibt sich daraus das Vorhandensein einer Konstanten C_{34}, so daß

$$|u_m| > C_{34}\,\alpha^m,$$

somit ist

$$\frac{1}{2\,e\,\alpha\,(1+\log|u_m|)} < \frac{1}{2\,e\,\alpha\,(1+\log C_{34} + m\log\alpha)}.$$

Es gibt aber eine ganze Zahl m_0, so daß für alle $m \geqq m_0$

$$\frac{1}{2\,e\,\alpha\,(1+\log C_{34} + m\log\alpha)} < \frac{3}{5\,\alpha\sqrt{m}}$$

gilt. Genügen nun die φ_n folgenden Ungleichungen

$$|\varphi_n| > \frac{1}{2\,e\,\alpha} \qquad \text{für } n < m_0$$

und

$$\frac{1}{2\,e\,\alpha\,(1+\log C_{34} + n\log\alpha)} < |\varphi_n| < \frac{3}{5\,\alpha\sqrt{n}} \qquad \text{für } n \geqq m_0,$$

so ist die Bedingung IV b) erfüllt, aber die Bedingung IV a) für kein m.

Komplexe algebraische Zahlen. Es ist leicht einzusehen, daß sich diese Überlegungen auch auf komplexe algebraische Zahlen übertragen lassen. Zur bequemeren Übersicht haben wir es vorgezogen, uns zuerst auf die reellen

Zahlen zu beschränken. Wir wollen nun noch einige Bemerkungen zum Fall der komplexen Zahlen machen. Die ganzen Zahlen u_n, v_n werden wir dann sinngemäß einem imaginär-quadratischen Körper $\mathfrak{K}$ entnehmen. Adjungiert man dem Körper $\mathfrak{K}$ die komplexe algebraische Zahl s-ten Grades ξ, so erhält man einen Körper $\mathfrak{K}(\xi)$. Mit der Methode des Hilfssatzes 1 kann man in $\mathfrak{K}(\xi)$ das Vorhandensein von ganzen algebraischen Zahlen α vom Grade s über $\mathfrak{K}$ nachweisen, die mit ihren Konjugierten $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ in bezug auf $\mathfrak{K}$ den Ungleichungen

$$|\alpha| > 1, \quad |\alpha_r| < 1 \qquad \text{für } r = 2, \ldots, s$$

genügen. Daraus ergibt sich der Satz I. Da der Borelsche Satz auch gilt für Potenzreihen, deren Koeffizienten ganze algebraische Zahlen eines imaginär-quadratischen Körpers $\mathfrak{K}$ sind, bleibt auch Satz II bestehen. Ebenso gilt Satz IV b), denn der Hadamardsche Determinantensatz sowie der Satz von Fatou bleiben auch für komplexe Elemente richtig. Einige Unterschiede gegenüber dem Fall der reellen Zahlen ξ treten in den Sätzen III und IV a) auf. Wird in Satz III die Vorschrift C so beibehalten, daß unter u_{n+1} die zu ϱu_n und unter v_{n+1} die zu ϱv_n am nächsten liegende ganze Zahl des Körpers $\mathfrak{K}$ verstanden wird, so sind die Zahlen ϱ, welche die im Satze geforderten Eigenschaften besitzen durch folgende Ungleichung erklärt:

$$\prod_{r=2}^{s} (1 + |\varrho_r|) \leqq \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{d+1}} & \text{für } d \not\equiv -1 \pmod 4, \\ \dfrac{4\sqrt{d}}{d+1} & \text{für } d \equiv -1 \pmod 4. \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet d die kleinste positive ganze rationale Zahl für die $i\sqrt{d}$ eine erzeugende Zahl von $\mathfrak{K}$ ist. Es gibt somit nur Zahlen ϱ in den Körpern $\mathfrak{K}$ für die $d = 1, 2, 3, 7, 11$ ist, also in denjenigen Körpern $\mathfrak{K}$, in welchen ein Euklidischer Algorithmus existiert[12]). Satz IV a) gilt, wenn wir die oberen Schranken für $|\varphi_n|$ und $|\psi_n|$ des reellen Falles durch die Zahl ω dividieren, die durch $\omega = 4\sqrt{d}$ für $d \not\equiv -1 \pmod 4$ und $\omega = 2\sqrt{d+1}$ für $d \equiv -1 \pmod 4$ erklärt ist.

[12]) Dickson, Algebren und ihre Zahlentheorie, Zürich 1927, S. 150—152.

(Eingegangen am 31. Dezember 1941.)

Ein neues Verfahren der schrittweisen Näherungen zur Lösung von $y' = f(x, y)$.

Von

W. Quade in Karlsruhe.

Das Picardsche Verfahren der schrittweisen Näherungen liefert bekanntlich nicht nur einen Existenzbeweis, sondern ist auch zur praktischen Lösung der Differentialgleichung brauchbar[1]). Die bei ihm auftretende Funktionenfolge konvergiert sogar mit derselben Güte wie die Reihe der Exponentialfunktion. Unbefriedigend ist jedoch der Umstand, daß man nur ein verhältnismäßig kleines Intervall angeben kann, in welchem die Funktionenfolge konstruierbar ist und gegen die Lösung konvergiert. Nur bei speziellen Klassen von Differentialgleichungen ist es bisher gelungen, größere Konvergenzintervalle anzugeben[2]). Wenn man auch bei der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, wie sich zeigen wird, durch eine schärfere Abschätzung im Picardschen Existenzbeweis zu einem Konvergenzintervall gelangen kann, das größer ist als die von E. Lindelöf angegebenen, so ist damit der eben erwähnte Mißstand immer noch nicht beseitigt. Eine weitere Schwäche des Picardschen Verfahrens ist darin zu sehen, daß bei ihm die Kurven der aufeinanderfolgenden Näherungsfunktionen weder ausschließlich oberhalb noch ausschließlich unterhalb der Lösungskurve verlaufen; es liefert also, abgesehen von besonderen Klassen von Differentialgleichungen, keine monotonen schrittweisen Näherungen.

Die eben erwähnten Schwächen vermeidet das im folgenden beschriebene neue Verfahren der schrittweisen Näherungen. Es liefert außer einem konstruktiven Existenzbeweis monotone Funktionenfolgen, welche die Lösung entweder von „oben" oder von „unten" her annähern und in einem weit größeren Intervall konvergieren als die Picardschen. Dabei werden keine weitergehenden Voraussetzungen über die rechte Seite der Differentialgleichung benötigt, als zur Führung des Picardschen Existenzbeweises erforderlich sind (Stetigkeit und Lipschitz-Bedingung).

Bei den bisher vorliegenden Untersuchungen über die Konstruktion monotoner Funktionenfolgen werden über $f(x, y)$ besondere Voraussetzungen

[1]) Vgl. z. B. L. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen, 3. Aufl., Berlin 1930, S. 27 oder E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 53.

[2]) Vgl. hierzu M. Müller, Math. Zeitschr. 41 (1936), S. 163.

gemacht[3]). Das ist auch in der Abhandlung von F. Tóth der Fall, obgleich die dort beschriebenen Funktionenfolgen den hier benutzten nahestehen.

In einer Arbeit von N. W. Adamoff[4]) werden zwar keine Monotonievoraussetzungen über $f(x, y)$ gemacht, aber die dort benutzten Funktionenfolgen sind nicht, wie in der Arbeit behauptet wird, immer monoton.

Das neue Verfahren gründet sich auf die Methode der Ober- und Unterfunktionen, eine Methode[5]), welche schon O. Perron[6]) zur Führung eines Existenzbeweises benutzt hat.

Kurz das Wichtigste aus dem Inhalt der folgenden Untersuchungen. Aus einer schärferen Abschätzung des Unterschiedes zwischen Näherungsfunktion und Lösung wird ein neues Konvergenzintervall für das Picardsche Verfahren gewonnen. Nach einer kurzen Einführung in die Begriffe Ober- und Unterfunktion werden einige Verfahren zur Konstruktion solcher Funktionen beschrieben. Anschließend werden zwei grundlegende Sätze bewiesen, von denen der erste zeigt, wie man aus einer Ober-(Unter-)funktion eine verbesserte Ober-(Unter-)funktion gewinnen kann. Der zweite enthält eine Konstruktion, die aus einer Ober-(Unter-)funktion eine Unter-(Ober-)funktion erzeugt. Durch wiederholte Anwendung der in diesen beiden Sätzen beschriebenen Prozesse kann man Folgen von Ober- oder von Unterfunktionen konstruieren, oder Folgen, bei denen Ober- und Unterfunktionen abwechseln. Für alle diese Folgen werden Konvergenzintervalle bestimmt, in denen sie gleichmäßig gegen die Lösung konvergieren. An Hand verschiedener Beispiele wird gezeigt, daß einige dieser Folgen ein weit größeres Konvergenzintervall besitzen als die Picardschen. Des weiteren werden verschiedene Verfahren vorgeführt, mit deren Hilfe sich die Lösung durch eine Doppelfolge (diese enthält eine Folge von Ober- und eine solche von Unterfunktionen) einschachteln läßt. Schließlich wird nochmals das Picardsche Verfahren betrachtet und gezeigt, wie man sich auch bei diesem Folgen von Ober- und Unterfunktionen verschaffen und eine Einschachtelung der Lösung vornehmen kann. Am Schluß einige Ergebnisse über die Picardschen Funktionenfolgen, wie sie bei Monotonievoraussetzungen über $f(x, y)$ auftreten.

---

[3]) I. Bendixson, Ofversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897, S. 605; M. Müller, Math. Zeitschr. **26** (1927), S. 619; Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss., Math.-naturw. Klasse, 1927, 9. Abh., S. 31; M. Gayas, Bull. d. Sciences math. (2) **58** (1934), S. 236, vgl. hierzu das Referat von M. Müller, Jahrb. über d. Fortschr. d. Math. 60_{I} (1934), S. 374; F. Tóth, Mat. fiz. Sap. **48** (1941), S. 176.

[4]) N. W. Adamoff, Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS **18** (1938), S. 219, vgl. hierzu das Referat von M. Müller, Jahrb. über d. Fortschr. d. Math. 64_{II} (1938), S. 1126.

[5]) Vgl. hierzu M. Müller, Jahresber. d. Deutschen Math. Vereinigung **37** (1928), S. 41.

[6]) O. Perron, Math. Annalen **76** (1915), S. 471.

§ 1.

Verbessertes Konvergenzintervall des Picardschen Verfahrens.

Ausgangspunkt und Grundlage der folgenden Untersuchungen ist das Picardsche Verfahren der schrittweisen Näherungen. Es sei daher kurz an das Ergebnis des Picardschen Existenzbeweises erinnert, das wir hier in seiner einfachsten Form aussprechen.

Ist in der allgemeinen expliziten Differentialgleichung

(A) $$y' = f(x, y)$$

die Funktion $f(x, y)$ in dem rechteckigen Bereich

B: $$|x - x_0| \leqq a, \quad |y - y_0| \leqq b \qquad (a > 0,\ b > 0)$$

stetig, und ist für jedes Punktepaar (x, Y), (x, y) aus B

$$|f(x, Y) - f(x, y)| \leqq L|Y - y|,$$

wo L eine positive Zahl ist (Lipschitz-Konstante), dann besitzt die Gleichung (A) *für hinreichend nahe bei x_0 gelegene Werte x eine und nur eine mit stetiger Ableitung versehene Lösung $y = y(x)$, die für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt.*

E. Lindelöf hat zwei Intervalle angegeben, in denen die Konvergenz des Verfahrens der schrittweisen Näherungen gesichert ist. Das eine ist

J: $$|x - x_0| \leqq \delta,$$

wobei δ die kleinere der beiden positiven Zahlen a und $\frac{b}{M}$ ist; M ist der Maximalbetrag von $f(x, y)$ in B. Das andere, das größer als J sein kann, ist

J': $$|x - x_0| \leqq \delta',$$

wobei δ' die kleinere der beiden positiven Zahlen a und $\frac{1}{L}\log\left(1 + \frac{b\,L}{N}\right)$ ist; N ist der Maximalbetrag von $f(x, y_0)$ in B.

Im folgenden wird gezeigt, wie man durch eine schärfere Abschätzung zu einem Konvergenzintervall gelangen kann, das im allgemeinen größer ausfällt als die Intervalle J und J'. Zur Vereinfachung der Darstellung bedienen wir uns, wenn nichts anderes gesagt wird, der folgenden Vereinbarungen und Voraussetzungen:

1. Es werden nur reelle Funktionen reeller Veränderlicher betrachtet.
2. Mit B sei ein konvexer Bereich der x, y-Ebene bezeichnet, in welchem $f(x, y)$ erklärt und stetig ist, sowie in bezug auf y einer Lipschitz-Bedingung genügt; (x_0, y_0), der Punkt, durch welchen die Lösung von $y' = f(x, y)$ hindurchgehen soll, sei ein innerer Punkt von B, ausgenommen den Fall, daß B der rechteckige Bereich

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + a, \quad |y - y_0| \leqq b \qquad (a > 0,\ b > 0)$$

ist, wo (x_0, y_0) Randpunkt ist.

3. Es wird immer angenommen, daß $x \geqq x_0$ ist, da sich die entgegengesetzte Annahme durch die Substitution $x - x_0 = -x'$ auf die erste zurückführen läßt.
4. Unter $u_0(x)$ (gelegentlich auch mit anderer Bezeichnung) werde eine durch (x_0, y_0) gehende, in einem Intervall

$$I: \qquad x_0 \leqq x \leqq x_0 + a \qquad (a > 0)$$

erklärte und dort mit beschränkter integrierbarer Ableitung versehene Funktion verstanden; eine solche Funktion $u_0(x)$ nennen wir eine *geeignete Ausgangsfunktion*.
5. Rechter Endpunkt von I ist, wenn nichts anderes gesagt wird, die Abszisse des Punktes, in welchem die Kurve von $u_0(x)$ erstmals den Rand von B trifft (Fig. 1). Außer I wird noch ein Intervall

$$K: \qquad x_0 \leqq x \leqq x_0 + \delta \qquad (0 < \delta \leqq a)$$

benötigt, das meist die Rolle des Konvergenzintervalls einer Funktionenfolge spielen wird. I und K sind, wenn nichts anderes gesagt wird, abgeschlossene Intervalle.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zum Verfahren der schrittweisen Näherungen nach PICARD. Bei diesem konstruiert man von einer in einem Intervall I erklärten geeigneten Ausgangsfunktion $u_0(x)$ ausgehend die Funktionenfolge

$$u_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, u_{n-1}(t)]\, dt \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

und hat dann die Konvergenz der unendlichen Reihe

$$(1) \quad y = u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots$$

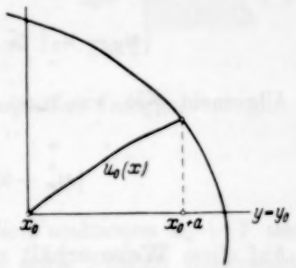

Fig. 1.

nachzuweisen, insbesondere ein Intervall K aufzusuchen, in welchem alle Funktionen u_n existieren. Die übliche Darstellung des aus diesem Verfahren fließenden Existenzbeweises wandeln wir etwas ab, indem wir den Begriff des „Fehlers" oder „Restes" einer Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ einführen.

Sind die Funktionen $y = u(x)$ und $f[x, u(x)]$ in einem Intervall erklärt und existiert dort $u'(x)$, dann nennen wir die Funktion

$$h(x) = u'(x) - f[x, u(x)]$$

den mit $u(x)$ gebildeten Fehler oder Rest der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$.

Aus dieser Erklärung des Fehlers folgt unmittelbar: Ist die Ableitung $u'(x)$ im Definitionsintervall beschränkt und integrierbar, dann gilt das Gleiche auch für den Fehler, vorausgesetzt, daß $f[x, u(x)]$ diese Eigenschaft

besitzt, was immer der Fall ist, wenn $f(x, y)$ im Definitionsbereich stetig ist. Fällt $u(x)$ mit einer Lösung von $y' = f(x, y)$ zusammen, dann verschwindet der Fehler identisch in x.

Nun zum Existenzbeweis. Der mit der geeigneten Ausgangsfunktion $u_0(x)$ gebildete Fehler

$$h_0(x) = u_0' - f(x, u_0)$$

ist in I beschränkt und integrierbar, und es ist

$$u_1 - u_0 = -\int_{x_0}^{x} h_0(t)\,dt.$$

Daher

$$|u_1 - u_0| \leqq \int_{x_0}^{x} |h_0(t)|\,dt.$$

Nehmen wir zunächst einmal an, daß es ein Intervall K gibt, in welchem alle u_n existieren, so folgt aus

$$u_2 - u_1 = \int_{x_0}^{x} [f(t, u_1) - f(t, u_0)]\,dt$$

auf Grund der Lipschitz-Bedingung

$$|u_2 - u_1| \leqq L\int_{x_0}^{x} |u_1 - u_0|\,dt \leqq L\int_{x_0}^{x} (x - t)|h_0(t)|\,dt.$$

Allgemein gilt, wie man durch vollständige Induktion bestätigt,

$$|u_n - u_{n-1}| \leqq L^{n-1}\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}|h_0(t)|\,dt \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Auf diese Weise erhält man die folgende Majorante der Reihe (1)

$$(2)\quad Y(x) = \int_{x_0}^{x} \left[1 + L(x-t) + \frac{L^2(x-t)^2}{2!} + \cdots\right]|h_0(t)|\,dt$$
$$= \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}|h_0(t)|\,dt.$$

Damit ist die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe (1) in K bewiesen. Ihre Summe $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = y(x)$ ist eine stetige Funktion, welche in K durch die Folge der u_n gleichmäßig angenähert wird.

Um die Gültigkeit der Entwicklung zu sichern, haben wir noch ein Intervall K aufzusuchen, in welchem alle u_n existieren. Vergleich von (1) und (2) zeigt, daß für jede natürliche Zahl n

$$|u_n - u_0| \leqq Y.$$

Wir betrachten die Kurven der beiden Funktionen $V(x) = u_0 + Y$, $v(x) = u_0 - Y$, die beide durch (x_0, y_0) gehen, sowie den ebenfalls konvexen Bereich B', der aus B hervorgeht, indem man die rechts der Vertikalen $x = x_0 + a$ gelegenen Punkte von B wegläßt (Fig. 2). Da $V(x)$ und $v(x)$, solange sie in B' verlaufen, beschränkte integrierbare Ableitungen besitzen, trifft jede der beiden Kurven den Rand von B' erstmals in einem Punkte. Die kleinere der Abszissen der beiden Punkte ist dann gleich der Abszisse des rechten Endpunktes des Konvergenzintervalls K. Für alle u_n gilt in K

$$u_0 - Y \leqq u_n \leqq u_0 + Y.$$

In der üblichen Weise zeigt man nun noch, daß $\lim_{n \to \infty} u_n$ wegen der gleichmäßigen Konvergenz eine Lösung von $y' = f(x, y)$ ist, und daß dies, da $f(x, y)$ einer Lipschitz-Bedingung genügt, die einzige Lösung ist, welche die Differentialgleichung durch den Punkt (x_0, y_0) schickt. Damit ist der folgende Satz bewiesen:

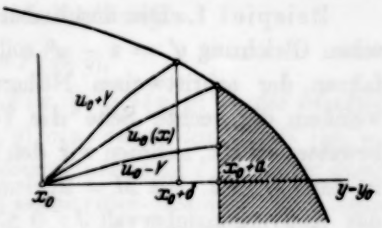

Fig. 2.

Satz 1. *Bildet man mit einer durch den Punkt (x_0, y_0) gehenden, in einem Intervall I erklärten, geeigneten Ausgangsfunktion $u_0(x)$ den Fehler*

$$h_0(x) = u_0' - f(x, u_0)$$

der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ und mit diesem das Integral

$$Y = \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} |h_0(t)| \, dt,$$

dann gibt es immer ein Intervall K, in welchem die Funktionen $u_0 + Y$ und $u_0 - Y$ existieren und in diesem existiert für die nach Picard *konstruierte Funktionenfolge*

$$u_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_{n-1}) \, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

gleichmäßig $\lim_{n \to \infty} u_n(x) = y(x)$; diese Funktion stellt die einzige Lösung dar, welche die Differentialgleichung durch den Punkt (x_0, y_0) schickt.

Das für die Bestimmung des Konvergenzintervalls maßgebende Integral Y kann man dadurch beliebig klein machen, daß man eine hinreichend nahe bei der Lösung y verlaufende Ausgangsfunktion $u_0(x)$ nimmt. Daraus folgt, daß beim Picardschen Verfahren *die Länge des Konvergenzintervalls von der Güte der Annäherung abhängt, mit welcher die Ausgangsfunktion die Lösung approximiert*, und bei günstiger Ausgangsfunktion das Konvergenzintervall K größer ausfallen wird als die eingangs erwähnten Intervalle J und J'.

Ist der Bereich B rechteckig,

$$B: \qquad x_0 \leqq x \leqq x_0 + a, \quad |y - y_0| \leqq b \qquad (a > 0,\ b > 0),$$

und geht man bei der Bestimmung des Konvergenzintervalls von der besonderen Ausgangsfunktion $u_0(x) = y_0$ aus, dann ist der Fehler $h_0(x) = -f(x, y_0)$ und

$$Y = \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} |f(t, y_0)|\, dt.$$

Ist N der Maximalbetrag von $f(x, y_0)$ in B, dann gilt

$$Y \leqq \frac{N}{L} [e^{L(x-x_0)} - 1].$$

Ersetzt man bei der Bestimmung des Konvergenzintervalls Y durch die rechte Seite, so kommt man gerade auf das von E. Lindelöf angegebene Konvergenzintervall J'. Die Lindelöfsche Intervallbestimmung erweist sich somit als ein Sonderfall des hier beschriebenen allgemeineren Verfahrens.

Beispiel 1. Die durch den Anfangspunkt gehende Lösung der Riccatischen Gleichung $y' = x - y^2$ soll für hinreichend kleines positives x im Verfahren der schrittweisen Näherungen ermittelt werden. Als Bereich, in welchem die rechte Seite die Voraussetzungen des Picardschen Existenzbeweises erfüllt, nehmen wir den rechteckigen B: $0 \leqq x \leqq 2$, $|y| \leqq 1$. In B ist dann $L = 2$. Mit $M = 2$, dem Maximalbetrag von $f(x, y)$ in B, ergibt sich das Konvergenzintervall J: $0 \leqq x \leqq 0{,}5$; dagegen mit $L = 2$ und $N = 2$ das Intervall J': $0 \leqq x \leqq 0{,}34$, das hier kleiner als J ist.

Ein größeres Intervall liefert das eben beschriebene Verfahren. Mit der Ausgangsfunktion $u_0(x) = 0$ wird der Fehler $h_0(x) = -x$ und

$$Y = \int_0^x e^{2(x-t)}\, t\, dt = \tfrac{1}{4}(e^{2x} - 1 - 2x).$$

Der rechte Endpunkt von K ist derjenige Wert von x, für den Y erstmals den Wert 1 annimmt. Man findet so das Intervall

$$K: \qquad 0 \leqq x \leqq 0{,}97.$$

Auf ein noch größeres Intervall kommt man, wenn man von der die Lösung besser annähernden Funktion $u_0(x) = \frac{1}{2} x^2$ ausgeht. Man hat dann den Fehler $h_0(x) = \frac{x^4}{4}$ und

$$Y = \int_0^x e^{2(x-t)}\, \frac{t^4}{4}\, dt.$$

Von den beiden Funktionen $V(x) = \frac{1}{2} x^2 + Y$, $v(x) = \frac{1}{2} x^2 - Y$ erreicht V den Wert 1 für $x = 1{,}2$, während v für $0 \leqq x \leqq 1{,}2$ in B bleibt. Somit konvergiert das Picardsche Verfahren, wenn man von der Ausgangsfunktion $u_0(x) = \frac{1}{2} x^2$ ausgeht, im Intervall

$$K': \qquad 0 \leqq x \leqq 1{,}2.$$

§ 2.

Ober- und Unterfunktionen.

Beim PICARDschen Verfahren der schrittweisen Näherungen kann man sich, wie wir gesehen haben, nur für ein kleineres Intervall der Konvergenz des Verfahrens versichern. Im folgenden wird ein neues Verfahren der schrittweisen Näherungen entwickelt, das ein ausgedehnteres Konvergenzintervall als das PICARDsche besitzt und außerdem monotone Näherungen liefert. Es gründet sich auf die Begriffe Ober- und Unterfunktion einer Differentialgleichung, die schon O. PERRON zur Führung eines Existenzbeweises für $y' = f(x, y)$ benutzt hat[7]). Bei der Bedeutung dieser Begriffe möge eine kurze Einführung in dieselben vorangeschickt werden, wobei die PERRONschen Definitionen etwas abgeändert werden, um sie den Erfordernissen der folgenden Untersuchungen anzupassen[8]).

Erklärung. *Ist in den beiden Differentialgleichungen*

$$y' = f(x, y), \quad y' = F(x, y),$$

in der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) *stets* $F(x, y) \geqq f(x, y)$ *— die Identität sei ausgeschlossen — und besitzt* $y' = F(x, y)$ *eine durch den Punkt* (x_0, y_0) *gehende, in einem Intervall I existierende Lösung, welche in I keine der durch* (x_0, y_0) *gehenden Lösungen von* $y' = f(x, y)$ *unter-(über-)schreitet, dann sagen wir, diese Lösung von* $y' = F(x, y)$ *sei in I eine Ober-(Unter-)funktion von* $y' = f(x, y)$.

Einen ersten Anhaltspunkt, unter welchen Bedingungen die Gleichung $y' = F(x, y)$ eine Oberfunktion von $y' = f(x, y)$ liefert, gibt der folgende

Hilfssatz. *Genügen die beiden in der Umgebung des Punktes* (x_0, y_0) *erklärten Funktionen* $f(x, y)$ *und* $F(x, y)$ *dort der Ungleichung* $f(x, y) < F(x, y)$, *und besitzt jede der beiden Differentialgleichungen* $y' = f(x, y)$ *und* $y' = F(x, y)$ *eine durch den Punkt* (x_0, y_0) *gehende in einem Intervall* I: $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a$ $(a > 0)$ *existierende Lösung — diese Lösungen seien* $u(x)$ *und* $U(x)$ *— dann ist im links offenen Intervall I*

$$U(x) > u(x),$$

d. h. Vergrößerung (Verkleinerung) der rechten Seite der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ *führt für* $x > x_0$ *auf eine Ober-(Unter-)funktion, welche für* $x > x_0$ *immer ober-(unter-)halb jeder Lösung von* $y' = f(x, y)$ *verläuft.*

Wegen des Beweises dieses Hilfssatzes sei auf E. KAMKE, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 82 verwiesen.

---

[7]) O. PERRON, Math. Annalen **76** (1915), S. 471.

[8]) Vgl. hierzu auch die Darstellung bei E. KAMKE, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 81.

Tritt in der Ungleichung $f < F$ zu dem Ungleichheitszeichen noch das Gleichheitszeichen – der Fall $f(x, y) \equiv F(x, y)$ sei, da er trivial ist, ausgeschlossen –, dann gilt der folgende

Satz 2. *Unterliegen die beiden in dem rechteckigen Bereich*

$$B: \qquad x_0 \leqq x \leqq x_0 + a, \quad |y - y_0| \leqq b \qquad (a > 0,\ b > 0)$$

erklärten stetigen Funktionen $f(x, y)$ und $F(x, y)$ überall in B der Bedingung

$$f(x, y) \leqq F(x, y), \quad (f(x, y) \geqq F(x, y)),$$

und sind $u(x)$ und $U(x)$ durch den Punkt (x_0, y_0) gehende im Intervall I: $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a$ existierende und zwischen $y_0 - b$ und $y_0 + b$ verlaufende Lösungen der Differentialgleichungen

$$y' = f(x, y), \quad y' = F(x, y),$$

dann ist, wenn $F(x, y)$ in B einer Lipschitz-Bedingung genügt, in I stets

$$U(x) \geqq u(x), \quad (U(x) \leqq u(x)),$$

d. h. $U(x)$ ist eine Ober-(Unter-)funktion von $y' = f(x, y)$. Dabei wird $U(x)$ größer (kleiner) als $u(x)$, sobald $F[x, u(x)]$ erstmals größer (kleiner) als $f[x, u(x)]$ wird und bleibt dann größer (kleiner) als $u(x)$[9]).

Beweis. Wir führen den Beweis nur für den Fall $f \leqq F$ durch. Setzt man in

$$U' - u' = F(x, U) - f(x, u)$$

$U - u = z$, so folgt für z die Differentialgleichung

$$z' = F(x, u + z) - f(x, u);$$

denkt man sich auf der rechten Seite u als Funktion von x eingesetzt, so erhält man schließlich

$$z' = g(x, z).$$

Bringt man nunmehr die Differentialgleichung in die Form

$$z' - g(x, 0) = g(x, z) - g(x, 0),$$

wobei nach Voraussetzung $g(x, 0) \geqq 0$ ist (identisches Verschwinden ausgeschlossen), und nimmt man für den Augenblick an, daß $z \geqq 0$ ist, dann gilt auf Grund der Lipschitz-Bedingung

$$-Lz \leqq g(x, z) - g(x, 0) \leqq Lz,$$

---

[9]) Vgl. hierzu E. KAMKE, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 91. Der eben ausgesprochene Satz folgt aus dem dort angegebenen allgemeineren Satz 5; jedoch kann infolge schärferer Voraussetzungen der Beweis des ersteren mit einfacheren Hilfsmitteln erbracht werden als der des letzteren.

also auch

$$-Lz \leqq z' - g(x, 0) \leqq Lz,$$

oder

$$z' + Lz \geqq g(x, 0), \quad z' - Lz \leqq g(x, 0).$$

Nach der ersten der Ungleichungen genügt z einer linearen Differentialgleichung

$$z' + Lz = \varphi(x),$$

in welcher $\varphi(x) \geqq g(x, 0)$ ist. Die für $x = x_0$ verschwindende Lösung dieser Gleichung ist

$$z = \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)}\, \varphi(t)\, dt \geqq \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} g(t, 0)\, dt.$$

In entsprechender Weise ergibt sich aus der zweiten Ungleichung

$$z \leqq \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} g(t, 0)\, dt.$$

Daraus entnimmt man, daß $z(x)$ positiv wird, sobald $g(x, 0)$ positiv wird, und dann positiv bleibt, w. z. b. w.

Gibt man sich in Umkehrung des bisherigen Vorgehens eine in der Umgebung von $x = x_0$ mit beschränkter integrierbarer Ableitung versehene Funktion $u(x)$ vor, die für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt, dann kann man sich die Frage vorlegen, ob diese Funktion eine Ober- oder Unterfunktion von $y' = f(x, y)$ ist. Um dies zu entscheiden, hat man den Fehler

$$h(x) = u'(x) - f[x, u(x)]$$

zu bilden[10]). Sofern dieser existiert und für $x \geqq x_0$ stets positiv ist, ist $u(x)$ dort nach dem Hilfssatz eine Oberfunktion von $y' = f(x, y)$. Dies bestätigt man, indem man schreibt

$$u' = f(x, u) + h(x).$$

So ist beispielsweise die Funktion $u(x) = y_0$ eine Ober- oder Unterfunktion von $y' = f(x, y)$, je nachdem ob $f(x, y_0)$ für $x \geqq x_0$ negativ oder positiv ist, denn der mit $u(x) = y_0$ gebildete Fehler ist $h = -f(x, y_0)$[11]).

Sind $u'(x)$ und $f(x, y)$ stetig und genügt $f(x, y)$ außerdem einer Lipschitz-Bedingung, so ist $u(x)$ für $x \geqq x_0$ nach Satz 2 Oberfunktion von $y' = f(x, y)$, wenn dort der nicht identisch verschwindende Fehler $h(x) \geqq 0$ ist.

---

[10]) Es sei hier darauf hingewiesen, daß nicht jede Funktion $U(x)$, welche im links offenen Intervall I der Ungleichung $U > y$ genügt, eine Oberfunktion von $y' = f(x, y)$ im Sinne der oben abgegebenen Erklärung ist. Auch braucht die Ableitung einer Oberfunktion $U(x)$ nicht im ganzen Intervall größer zu sein als die einer Lösung $y(x)$.

[11]) M. GAYAS, Bull. d. Sciences math. (2) **58** (1934), S. 236 und M. MÜLLER, Jahrb. über d. Fortschr. d. Math. **60**, (1934), S. 374.

§ 3.

Einige Verfahren zur Konstruktion von Ober- und Unterfunktionen.

Im Anschluß an die eben bewiesenen Sätze werden im folgenden einige Verfahren beschrieben, mit deren Hilfe sich Ober- und Unterfunktionen konstruieren lassen.

1. Sowohl der Hilfssatz als auch Satz 2 des vorhergehenden Paragraphen liefern jeder eine Konstruktion einer Ober-(Unter-)funktion von $y' = f(x, y)$. Man wird dabei $F(x, y)$ so einrichten, daß die Gleichung $y' = F(x, y)$ elementar integrierbar wird.

2. Will man einen Streckenzug konstruieren, der eine Oberfunktion darstellt[12]), so kann man in ähnlicher Weise wie bei der Konstruktion des Euler-Cauchyschen Streckenzuges verfahren. In der Umgebung von (x_0, y_0) sei $f(x, y)$ stetig, und es möge für $x \geqq x_0$ ein Streckenzug konstruiert werden. der eine Oberfunktion darstellt. Hierzu sucht man zunächst einen rechteckigen Bereich B_0: $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a$, $|y - y_0| \leqq b$ mit hinreichend kleinem positivem a und b auf (Fig. 3), in welchem $f(x, y)$ stetig ist; M_0 sei der größte Wert von $f(x, y)$ in B_0. Dann stellt nach Satz 2 die Gerade $y = y_0 + M_0(x - x_0)$, solange sie in B_0 verläuft, eine Oberfunktion von $y' = f(x, y)$ dar. Diese Gerade erreiche den Rand von B_0 im Punkte (x_1, y_1). Zur Konstruktion der nächsten Strecke des Streckenzuges suchen wir den größten Wert M_1 von $f(x, y)$ in dem Bereich B_1: $x_1 \leqq x \leqq x_1 + a$, $|y - y_1| \leqq b$ auf, wobei a und b dieselben Konstanten sein mögen wie bei B_0, und $f(x, y)$ in B_1 als stetig vorausgesetzt wird. Dann liefert die Gerade $y = y_1 + M_1(x - x_1)$, solange sie in B_1 verläuft, eine weitere Strecke des zu konstruierenden Streckenzuges. Indem man in der angegebenen Weise fortfährt, erhält man einen Streckenzug, von dem noch zu zeigen ist, daß er eine Oberfunktion von $y' = f(x, y)$ darstellt. Die Konstruktion läßt sich solange fortsetzen, bis man auf einen Bereich stößt, in welchem $f(x, y)$ nicht mehr überall erklärt oder stetig ist.

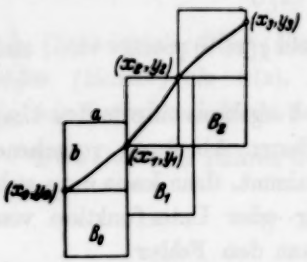

Fig. 3.

Wir zeigen jetzt, daß die durch den Streckenzug dargestellte Funktion $U(x)$ keine Lösung $u(x)$ von $y' = f(x, y)$ unterschreiten kann. Zunächst

[12]) Hierbei wird also zugelassen, daß die Oberfunktion eine stückweise differentiierbare Funktion ist. Die hier beschriebene Konstruktion ist gegenüber der Perronschen [O. Perron, Math. Annalen **76** (1915), S. 472/473] insofern verschärft, als in der Definitionsgleichung $D_{+y} > f(x, y)$ zu dem Ungleichheitszeichen noch das Gleichheitszeichen hinzugefügt ist.

folgt für das Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_1$ nach Satz 2, da $U(x)$ der Gleichung $U'(x) = M_0$ genügt, daß $U(x)$ dort keine Lösung $u(x)$ von $y' = f(x, y)$ unterschreitet. Weiter lehrt Satz 2, daß $U(x)$ beginnt größer als $u(x)$ zu werden, und es dann auch bleibt, sobald $f[x, u(x)] < M_0$ wird. Unter dieser Voraussetzung ist dann $U(x_1) > u(x_1)$. Wir nehmen nun an, daß es im Intervall $x_1 < x \leqq x_2$ eine Abszisse X gibt, für welche $u(x)$ erstmals wieder $U(x)$ erreicht, und zeigen, daß diese Annahme auf einen Widerspruch führt. Es wäre dann für hinreichend nahe bei X liegendes x

$$U(x) - u(x) = \int_X^x [M_1 - f(t, u)]\, dt.$$

Für $x < X$ würde dann, da der Integrand nicht negativ ist, folgen

$$U(x) \leqq u(x),$$

was unserer Annahme widerspricht, daß $u(x)$ für $x = X$ erstmals wieder $U(x)$ erreichen soll. Ist entgegen der eben gemachten Voraussetzung im Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_1$ stets $f[x, u(x)] = M_0$, so ist dort $U(x) = u(x)$, und man kann dann dieselben Schlüsse anwenden, indem man jetzt vom Punkt (x_1, y_1) ausgeht. Damit ist gezeigt, daß $U(x) \geqq u(x)$ ist.

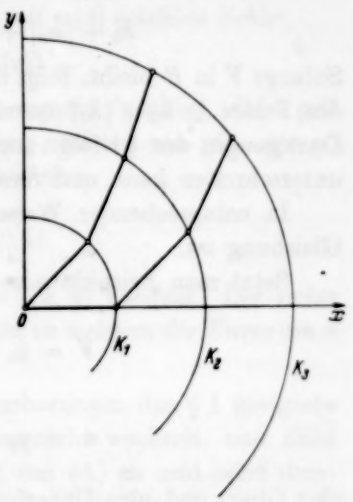

Fig. 4.

In entsprechender Weise kann man einen Streckenzug konstruieren, der eine Unterfunktion darstellt. Man hat dabei in jedem Bereich B_i jeweils M_i durch m_i zu ersetzen, wo m_i der kleinste Wert ist, den $f(x, y)$ in B_i annimmt.

Bei der eben beschriebenen Konstruktion haben wir der Einfachheit halber angenommen, daß die Bereiche B_i rechteckig und alle von g'eicher Größe sind. Die Konstruktion läßt sich aber auch durchführen, wenn man an Stelle der rechteckigen Bereiche geeignete konvexe nimmt, die von verschiedener Gestalt und Größe sein können.

Besonders einfach gestaltet sich die Konstruktion eines solchen Streckenzuges, wenn man in der Umgebung von (x_0, y_0), in welcher $f(x, y)$ stetig ist, ein Isoklinenfeld, d. h. die Schar der Kurven $f(x, y) = \text{konst.}$ zeichnen kann.

Will man beispielsweise eine Ober- und eine Unterfunktion der durch den Anfangspunkt gehenden Lösung von $y' = r = |\sqrt{x^2 + y^2}|$ bestimmen, so hat man als Isoklinen Kreise mit dem Anfangspunkt als Mittelpunkt (Fig. 4.) Zeichnet man die Kreise $K_1, K_2, \ldots$ mit den Radien $r = 1, 2, \ldots$, so hat

man bei der Konstruktion der Oberfunktion im Innern von K_1 eine Gerade durch den Anfangspunkt mit der Steigung 1 zu zeichnen, anschließend zwischen K_1 und K_2 eine Gerade mit der Steigung 2 usw.; bei der Konstruktion der Unterfunktion in K_1 eine Gerade durch den Anfangspunkt mit der Steigung 0, anschließend zwischen K_1 und K_2 eine Gerade mit der Steigung 1 usw. Man erhält so zwei stetige Streckenzüge, von denen der eine Ober-, der andere eine Unterfunktion von $y' = r$ darstellt.

3. Eine weitere Konstruktion schließt sich an die Konvergenzuntersuchungen des § 1 an. Die dort eingeführten Funktionen

$$V(x) = u_0 + Y, \quad v(x) = u_0 - Y$$

stellen nämlich eine Ober- und eine Unterfunktion von $y' = f(x, y)$ dar. Um dies zu bestätigen, stellen wir das Vorzeichen des Fehlers fest. Er ist bei $V(x)$

$$V' - f(x, V) = u_0' + Y' - f(x, u_0 + Y).$$

Nach (2) ist $Y' = |h_0| + LY$, und damit schreibt sich der Fehler

$$h_0 + |h_0| + LY + f(x, u_0) - f(x, u_0 + Y).$$

Solange V in B bleibt, folgt daraus auf Grund der Lipschitz-Bedingung, daß der Fehler $\geqq h_0 + |h_0|$ ist und somit niemals negativ sein kann. Aus den Darlegungen des § 1 folgt unmittelbar, daß V für $x > x_0$ die Lösung y nicht unterschreiten kann und somit Oberfunktion von $y' = f(x, y)$ ist[13]).

In entsprechender Weise zeigt man, daß v eine Unterfunktion dieser Gleichung ist.

Setzt man beispielsweise $u_0(x) = y_0$, so hat man in

$$V = y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} |f(t, y_0)|\, dt,$$

$$v = y_0 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} |f(t, y_0)|\, dt,$$

eine Ober- und eine Unterfunktion von $y' = f(x, y)$.

§ 4.

Konstruktion einer verbesserten Ober-(Unter-)funktion aus einer Ober-(Unter-)funktion.

Wir haben eben einige Verfahren beschrieben, welche bei der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ die Konstruktion von Ober- und Unterfunktionen

[13]) Das in Satz 2 gegebene Kriterium reicht nicht aus, um dies zu entscheiden, da die rechte Seite der Differentialgleichung, der V genügt, bei stetigem $f(x, y)$ nur beschränkt und integrierbar, also im allgemeinen nicht stetig ist.

leisten. Damit hat man einen ersten groben Anhalt über den Verlauf der Lösung, denn Ober- und Unterfunktion stellen zwei Schranken dar, außerhalb welcher keine Lösung von $y' = f(x, y)$ verläuft. Wir zeigen nun, wie man diese Schranken verbessern kann, d. h. aus einer Ober-(Unter-)funktion eine Ober-(Unter-)funktion gewinnen kann, welche die Lösung besser annähert als diejenige, von welcher man ausgegangen ist. Das im folgenden beschriebene Verfahren zur Konstruktion verbesserter Ober-(Unter-)funktionen bildet die Grundlage einer Methode zur Gewinnung von Folgen von Ober-(Unter-)funktionen, die gegen die Lösung konvergieren. Kennzeichnend für dieses Verfahren ist, daß es die zur Führung des Picardschen Existenzbeweises notwendige Lipschitz-Bedingung in stärkerem Maße ausnutzt, als dies beim Picardschen Verfahren der schrittweisen Näherungen geschieht.

Wir beweisen zunächst einen Satz, der zeigt, wie man aus einer Ober-(Unter-)funktion eine verbesserte Ober-(Unter-)funktion gewinnen kann.

Satz 3. *Ist $u(x)$ eine durch den Punkt (x_0, y_0) gehende, in einem Intervall I erklärte, geeignete Ausgangsfunktion, und ist der mit $u(x)$ gebildete Fehler*

$$h(x) = u'(x) - f[x, u(x)]$$

der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ dort nicht negativ (positiv), dann gibt es ein Intervall K, in welchem $u(x)$ Ober-(Unter-)funktion von $y' = f(x, y)$ ist, und die mit dem Fehler $h(x)$ konstruierte Funktion

$$v = u - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h(t)\, dt$$

eine verbesserte Ober-(Unter-)funktion von $y' = f(x, y)$ darstellt. Der rechte Endpunkt von K ist gleich der Abszisse des Punktes, in welchem die Kurve von v erstmals den Rand von B trifft.

Beweis. Ist $u(x)$ eine im Sinne der Vereinbarungen des § 1 geeignete Ausgangsfunktion, deren Fehler sein Vorzeichen nicht wechselt, und sieht man eine solche Funktion als Näherungslösung von (A) an und setzt dementsprechend $y = u + z$, so genügt z der Differentialgleichung

$$z' = f(x, u + z) - f(x, u) - h(x). \tag{3}$$

Damit ist die Bestimmung der Lösung y von (A) auf die der für $x = x_0$ verschwindenden Lösung z von (3) zurückgeführt.

An Stelle der Gleichung (3) betrachten wir die bei Einführung der Lipschitz-Bedingung aus (3) hervorgehende lineare Gleichung

$$Z' = -LZ - h. \tag{4}$$

Ihre an der Stelle $x = x_0$ verschwindende Lösung ist

$$Z = -\int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h(t)\, dt.$$

Ist $h \geqq 0$, dann ist für $x \geqq x_0$ immer $Z \leqq 0$, und die Funktion

$$(F) \qquad v = u + Z = u - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h(t)\, dt$$

übertrifft daher in einem Intervall K die Funktion u nicht. Existiert v im Intervall I, dann ist der rechte Endpunkt von K gleich $x_0 + a$. Im anderen Fall trifft die Kurve von v den Rand von B erstmals in einem Punkte, dessen Abszisse kleiner als $x_0 + a$ ist. Diese Abszisse ist dann der rechte Endpunkt von K (Fig. 5). Der mit v gebildete Fehler von (A) ist aber

$$f(x, u) - f(x, v) + L(u - v)$$

und somit in K stetig und niemals negativ. Da die Funktion v demnach der Differentialgleichung

$$v' = -Lv + f(x, u) + Lu$$

genügt, deren rechte Seite stetig ist und eine Lipschitz-Konstante besitzt, stellt v nach Satz 2 eine Oberfunktion von (A) dar. Da v außerdem, wie wir

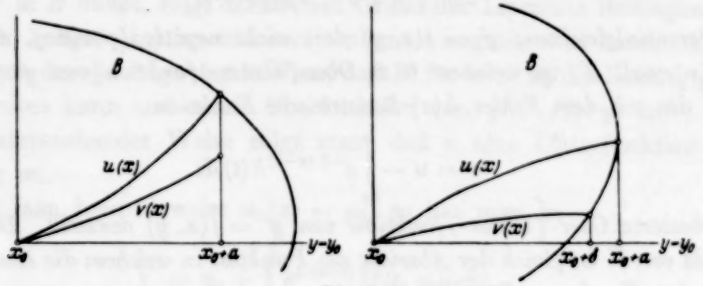

Fig. 5.

eben gesehen haben, die Funktion u nicht überschreitet, ist gleichzeitig bewiesen, daß u ebenfalls eine Oberfunktion von (A) ist. Formel (5) setzt uns somit instand, aus einer gegebenen Oberfunktion eine verbesserte zu konstruieren.

Ist entgegen der eben gemachten Annahme $h \leqq 0$, dann ist $Z \geqq 0$ und die Funktion v stellt in einem Intervall K eine Unterfunktion von (A) dar, welche dort die Funktion u nicht unterschreitet. Daraus folgt, daß u ebenfalls eine Unterfunktion von (A) ist. Formel (5) leistet somit in diesem Fall die Konstruktion einer verbesserten Unterfunktion.

Der eben bewiesene Satz lehrt insbesondere, daß eine geeignete Ausgangsfunktion $u(x)$ mit einem Fehler $h \geqq 0$ ($h \leqq 0$) unter den über $f(x, y)$ gemachten Voraussetzungen immer eine Ober-(Unter-)funktion von $y' = f(x, y)$ ist. Da der Fehler h nach Voraussetzung nur beschränkt und integrierbar ist und der Hilfssatz und Satz 2 infolgedessen nicht zu entscheiden gestatten, ob

$u(x)$ eine Ober-(Unter-)funktion ist, muß diese Eigenschaft von $u(x)$ hier nachgewiesen werden.

Wir betrachten nochmals die Gleichung (3). Außer durch (4) kann man auch durch die folgende Gleichung (6) zum Ausdruck bringen, daß $f(x, y)$ einer Lipschitz-Bedingung genügt.

$$Z' = LZ - h. \tag{6}$$

Ihre an der Stelle $x = x_0$ verschwindende Lösung ist

$$Z = -\int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h(t)\, dt.$$

Ist der mit $u(x)$ gebildete Fehler $h \geqq 0$, dann ist $Z \leqq 0$; die Funktion

$$v = u + Z = u - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h(t)\, dt \tag{7}$$

stellt dann aber nach Satz 2 in einem Intervall K eine Unterfunktion von (A) dar, denn der mit v gebildete Fehler ist

$$f(x, u) - f(x, v) - L(u - v),$$

also stetig und niemals positiv. Ist dagegen $h \leqq 0$, dann stellt die nach (7) gebildete Funktion v eine Oberfunktion von (A) dar, welche die Lösung dieser Gleichung nicht unterschreitet. Damit ist der folgende Satz, ein Gegenstück zu Satz 3, bewiesen.

Satz 4. *Ist $u(x)$ eine Ausgangsfunktion mit den in Satz 3 geforderten Eigenschaften, dann gibt es ein Intervall K, in welchem die mit dem Fehler $h(x)$ konstruierte Funktion*

$$v = u - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h(t)\, dt$$

eine Unter-(Ober-)funktion von $y' = f(x, y)$ darstellt. Der rechte Endpunkt von K ist gleich der Abszisse des Punktes, in welchem die Kurve von v erstmals den Rand von B trifft.

Der erste der beiden eben bewiesenen Sätze zeigt, wie man aus einer gegebenen Ober-(Unter-)funktion eine verbesserte Ober-(Unter-)funktion gewinnen kann, der zweite, wie man aus einer gegebenen Ober-(Unter-)funktion eine Unter-(Ober-)funktion konstruieren kann. Die in diesen beiden Sätzen geschilderte Erzeugungsweise von Ober- und Unterfunktionen bildet die Grundlage der im folgenden beschriebenen Verfahren der schrittweisen Näherungen.

Mit Hilfe der im letzten Satz beschriebenen Konstruktion ist man in der Lage, die durch den Punkt (x_0, y_0) gehende Lösung y von (A) in Schranken einzuschließen. Ist beispielsweise $u(x)$ eine in I existierende, geeignete Unterfunktion von $y' = f(x, y)$, und h der mit ihr gebildete Fehler, dann gilt in K

$$u \leqq y \leqq u - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h(t)\, dt.$$

Der Unterschied zwischen Ober- und Unterfunktion ist

$$- \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h(t)\, dt.$$

Man sieht, wie die Schranken, in welche die Lösung eingeschlossen ist, um so näher beieinander liegen, je kleiner der Betrag des Fehlers ist.

Bemerkung. Wir kommen hier nochmals auf den in § 1 gegebenen Konvergenzbeweis für das Picardsche Verfahren zurück. Nimmt man dort als Ausgangsfunktion eine geeignete Ober-(Unter-)funktion, dann erhält man als Majorante gerade die im letzten Satz konstruierte Unter-(Ober-)funktion. In der Tat, ist die Ausgangsfunktion $u_0(x)$ eine Unterfunktion, dann ist $h_0 \leqq 0$, und aus $|y - u_0| \leqq Y$ folgt

$$y - u_0 \leqq - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_0(t)\, dt.$$

Die Funktion

$$u_0 + Y = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_0(t)\, dt$$

ist aber genau die Oberfunktion, welche nach Satz 4 aus der Unterfunktion $u_0(x)$ folgt.

Geht man beim Picardschen Verfahren von einer Ober- oder Unterfunktion aus, dann besitzt die nach diesem Verfahren konstruierte nächste Näherung im allgemeinen nicht mehr die Eigenschaft, Ober- oder Unterfunktion zu sein. Das erkennt man schon an dem folgenden Beispiel:

Nimmt man bei der Bestimmung der für $x = 0$ verschwindenden Lösung der Differentialgleichung $y' = \sin y$ die aus $y' = 1$ folgende Oberfunktion $u_0(x) = x$ als Ausgangsfunktion, so erhält man nach Picard als nächste Näherung

$$u_1 = \int_{0}^{x} \sin t\, dt = 1 - \cos x.$$

u_1 ist aber weder Ober- noch Unterfunktion, denn der mit ihr gebildete Fehler ist

$$h_1 = \sin x - \sin(1 - \cos x),$$

und dieser ist, da $h_1\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ und $h_1(\pi) < 0$, im Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$ nicht von einerlei Vorzeichen.

Daß das Picardsche Verfahren bei geeigneten Monotonievoraussetzungen über $f(x, y)$ eine Folge von Ober- oder Unterfunktionen liefert, ist bekannt; wir werden weiter unten in § 9 darauf zu sprechen kommen.

§ 5.

Annäherung der Lösung durch eine Folge von Oberfunktionen.

Die mit der oben beschriebenen Konstruktion gegebene Möglichkeit, aus einer Oberfunktion eine verbesserte zu gewinnen, legt den Gedanken nahe, durch fortgesetzte Verbesserung aus einer Oberfunktion eine Folge von Oberfunktionen zu erzeugen, und so die Lösung durch eine Folge solcher Funktionen anzunähern. Von einer solchen Folge hat man dann zu zeigen, daß sie gegen die Lösung der Differentialgleichung konvergiert. Damit hat man ein neues Verfahren der schrittweisen Näherungen, das gegenüber dem Picardschen den Vorteil hat, daß der Unterschied zwischen Näherungsfunktion und Lösung stets von einerlei Vorzeichen ist. Außerdem zeigt sich bei diesem Verfahren, daß es in einem weit größeren Intervall konvergiert als das Picardsche.

In einem konvexen Bereich B erfülle $f(x, y)$ die in Satz 3 formulierten Voraussetzungen, und es sei $u_0(x)$ eine Oberfunktion von $y' = f(x, y)$ mit den dort geforderten Eigenschaften. Aus $u_0(x)$ konstruieren wir eine Folge von Oberfunktionen.

Da u_0 Oberfunktion ist, ist der Fehler

$$h_0(x) = u_0'(x) - f[x, u_0(x)]$$

in I niemals negativ. Nach Satz 3 gewinnt man aus u_0 die verbesserte Oberfunktion

$$u_1(x) = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)}\, h_0(t)\, dt.$$

Sofern es ein Intervall gibt, in welchem diese existiert, folgt aus dem mit ihr gebildeten Fehler

$$h_1 = u_1' - f(x, u_1)$$

eine weitere wiederum verbesserte Oberfunktion u_2.

$$u_2 = u_1 - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)}\, h_1(t)\, dt.$$

Indem man in dieser Weise unbegrenzt fortfährt, erhält man eine unendliche Folge von Oberfunktionen $u_0, u_1, u_2, \ldots$. Allgemein hat man

$$u_n = u_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_{n-1}(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

$$h_n = u_n' - f(x, u_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{9}$$

Alle u_n nehmen nach Konstruktion an der Stelle x_0 den Wert y_0 an.

Nehmen wir zunächst einmal an, daß es ein Intervall K gibt, in welchem alle u_n existieren, dann haben wir zu zeigen, daß $\lim_{n \to \infty} u_n$ existiert und die durch den Punkt (x_0, y_0) gehende Lösung von (A) darstellt. Um die Existenz dieses Grenzwertes nachzuweisen, beweisen wir die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$y = u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots. \tag{10}$$

Indem man die in Klammern gesetzten Differenzen mit Hilfe von (8) ausdrückt und in (10) einsetzt, erhält man

$$y = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} (h_0 + h_1 + h_2 + \cdots)\, dt. \tag{11}$$

Daraus folgt, daß die Reihe (10) gleichmäßig konvergent ist, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ es ist.

Durch Differentiieren von (8) bekommt man

$$u_n' = u_{n-1}' - h_{n-1} + L \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_{n-1}(t)\, dt,$$

und daraus unter Berücksichtigung von (9)

$$u_n' = f(x, u_{n-1}) + L \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_{n-1}\, dt.$$

Damit wird der durch (9) definierte Fehler h_n

$$h_n = f(x, u_{n-1}) - f(x, u_n) + L \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_{n-1}\, dt. \tag{12}$$

Auf Grund der Lipschitz-Bedingung und vermöge (8) folgt daraus

$$h_n \leqq 2L \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_{n-1}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

Nunmehr erklären wir eine Funktionenfolge $H_n(x)$ durch

$$H_n = 2L \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} H_{n-1}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{14}$$

wobei $H_0(x) \equiv h_0(x)$ ist. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} H_n = S$ eine Majorante der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$.

Diese Majorante läßt sich in geschlossener Form darstellen. Um dies zu zeigen, leiten wir (14) nach x ab und erhalten so

$$H_n' = 2LH_{n-1} - LH_n.$$

Bei Benutzung des symbolischen Differentialoperators schreibt sich die letzte Gleichung

$$(D + L) H_n = 2LH_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{15}$$

Aus diesem Gleichungssystem folgt, wie man durch vollständige Induktion bestätigt,

$$(D + L)^n H_n = (2L)^n H_0 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{16}$$

Eine partikuläre Lösung dieser linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist[14])

$$(2L)^n \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-L(x-t)} H_0(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{17}$$

Bleibt zu zeigen, daß diese partikuläre Lösung dieselben Anfangsbedingungen erfüllt wie $H_n(x)$. Da die Funktionen $H_1, H_2, \ldots$ alle an der Stelle x_0 verschwinden, schließt man aus dem Gleichungssystem (15), daß H_n diejenige Lösung von (16) ist, die an der Stelle x_0 mitsamt ihren $n-1$ ersten Ableitungen verschwindet. Das sind aber dieselben Anfangsbedingungen, denen die partikuläre Lösung (17) genügt. Somit ist

$$H_n = 2L \int_{x_0}^{x} \frac{[2L(x-t)]^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-L(x-t)} h_0(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ist μ_0 die obere Grenze von $h_0(x)$ im Intervall I, dann zeigt eine leichte Abschätzung, daß

$$H_n \leqq \mu_0 \frac{(2La)^n}{n!}.$$

---

[14]) Vgl. z. B. C. DE LA VALLÉE-POUSSIN, Cours d'Analyse Infinitésimale, Bd. II, 6. Aufl., Louvain 1928, S. 211; E. KAMKE, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 257.

Damit ist die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} H_n$ und zugleich die der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ bewiesen.

Die Summe der Majorante ist

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} H_n = h_0 + 2L \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} \left[1 + \frac{2L(x-t)}{1!} + \ldots\right] h_0(t)\, dt,$$

oder

$$S = h_0 + 2L \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_0(t) dt. \tag{18}$$

Um den vorstehenden Konvergenzbeweis durchführen zu können, hatten wir angenommen, daß es ein Intervall K gibt, in welchem alle u_n existieren. Ob dies der Fall ist, kann man in folgender Weise entscheiden. Zunächst ergibt sich aus (11), daß die Funktion

$$v_0 = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} S(t)\, dt$$

die Lösung y nicht übertreffen kann. Auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} H_n$ folgt durch Summierung der Gleichungen (14)

$$S = h_0 + 2L \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} S(t)\, dt. \tag{19}$$

Vergleichen von (18) und (19) zeigt, daß

$$\int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} S(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_0(t)\, dt.$$

Damit erhält man

$$v_0 = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_0(t)\, dt. \tag{20}$$

Das ist aber gerade die Unterfunktion, welche nach der in Satz 4 beschriebenen Konstruktion aus der Oberfunktion u_0 hervorkommt.

Nimmt man nun für K das in Satz 4 angegebene Intervall, so existieren in diesem alle Oberfunktionen u_n. Allgemeiner kann man an Stelle der durch (20) erklärten Unterfunktion v_0 irgendeine in einem Intervall I': $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a'$ erklärte Unterfunktion v nehmen, wobei $x_0 + a'$ die Abszisse des Punktes ist, in welchem die Kurve von v erstmals den Rand von B trifft. Dann ist K das kleinere der beiden Intervalle I und I'. Da in ihm alle u_n existieren, ist es das Konvergenzintervall des Verfahrens.

Um den Beweis vollständig zu machen, haben wir noch zu zeigen, daß $y(x) = \lim_{n \to \infty} u_n(x)$ Lösung von $y' = f(x, y)$ ist. Hierzu setzen wir den Ausdruck

$$y - u_n + \int_{x_0}^{x} [f(t, u_n) - f(t, y)]\, dt + \int_{x_0}^{x} h_n\, dt = r_n(x). \tag{21}$$

Da die Funktionenfolge der u_n mit wachsendem n in K gleichmäßig gegen y und die der h_n dort gleichmäßig gegen Null geht, strebt die der r_n dort gleichmäßig gegen Null. Aus (21) folgt unter Benutzung von (9)

$$y = u_n + \int_{x_0}^{x} f(t, y)\, dt - \int_{x_0}^{x} u_n'\, dt + r_n,$$

oder, da $u_n(x_0) = y_0$ ist,

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)\, dt + r_n.$$

Da die Folge der r_n mit wachsendem n gleichmäßig in K gegen Null geht, kommt

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)\, dt,$$

woraus nach Differentiation folgt, daß y Lösung von $y' = f(x, y)$ ist.

In bekannter Weise zeigt man schließlich noch, daß $y' = f(x, y)$, wenn $f(x, y)$ einer Lipschitz-Bedingung genügt, eine und nur eine Lösung durch den Punkt (x_0, y_0) schicken kann.

Damit ist in allen Teilen der folgende Satz bewiesen:

Satz 5. *Es sei $u_0(x)$ eine durch den Punkt (x_0, y_0) gehende, in einem Intervall I existierende, geeignete Oberfunktion der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Konstruiert man von u_0 ausgehend die Folge der Oberfunktionen*

$$u_n = u_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_{n-1}(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

wobei

$$h_n = u_n' - f[x, u_n(x)] \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

dann gibt es ein Intervall K, in welchem diese mit wachsendem n abnehmende Folge gleichmäßig gegen die durch (x_0, y_0) gehende Lösung der Differentialgleichung konvergiert. Dabei ist der rechte Endpunkt von K gleich der Abszisse des Punktes, in welchem die Kurve der Unterfunktion

$$v_0 = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_0\, dt$$

oder sonst einer durch (x_0, y_0) gehenden geeigneten Unterfunktion erstmals den Rand von B trifft.

§ 6.

Annäherung der Lösung durch eine Folge von Unterfunktionen.

Ebenso wie wir eben die Lösung von $y' = f(x, y)$ aus einer Folge von Oberfunktionen gewinnen konnten, kann man sie auch aus einer Folge von Unterfunktionen erzeugen. Man geht hierbei von einer durch den Punkt (x_0, y_0) gehenden in einem Intervall I erklärten geeigneten Unterfunktion $u_0(x)$ aus, und konstruiert aus ihr nach Satz 3 eine verbesserte Unterfunktion u_1.

$$u_1 = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_0(t)\, dt.$$

Indem man aus u_1 wiederum eine verbesserte Unterfunktion u_2 erzeugt und in dieser Weise unbegrenzt fortfährt, erhält man eine unendliche Folge von Unterfunktionen: $u_0, u_1, u_2, \ldots$. Auch hier ist die Folge der u_n durch die Gleichungen (8) und (9) bestimmt, nur daß jetzt die h_n negativ sind. Dementsprechend wird man der Einfachheit halber in (12) $h_n = -k_n$ setzen und hat dann eine Folge positiver Funktionen k_n, die nach (12) der Ungleichung

$$k_n \leqq 2L \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} k_{n-1}(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

genügen. Mit der in § 5 eingeführten Funktionenfolge der H_n folgt als Majorante der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} k_n$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} H_n = k_0 + 2L \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} k_0(t)\, dt.$$

Daraus ergibt sich die gleichmäßige Konvergenz der Folge der u_n in einem Intervall K nach denselben Überlegungen wie in § 5. Aus der letzten Formel findet man nach (11) die Oberfunktion

$$v_0 = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} S(t)\, dt,$$

die in entsprechender Weise wie in § 5 umgeformt lautet

$$v_0 = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_0(t)\, dt.$$

Sie ist identisch mit der Oberfunktion, die nach Satz 4 aus der Unterfunktion u_0 hervorkommt. Damit ist der folgende Satz bewiesen, der ein Gegenstück zu dem vorhergehenden darstellt.

Satz 5′. *Es gilt ein dem Satz* 5 *in allen Stücken entsprechender Satz, den man aus dem ersteren erhält, indem man „Oberfunktion" mit „Unterfunktion" vertauscht und „abnehmende" durch „zunehmende" ersetzt.*

Beispiel 2. Es soll die durch den Anfangspunkt gehende Lösung der Riccatischen Gleichung $y' = x - y^2$ in dem rechteckigen Bereich

$$B: \qquad 0 \leqq x \leqq \sqrt{2}, \quad |y| \leqq 1$$

durch eine Folge von Oberfunktionen angenähert werden. Wir gehen von der aus $u_0' = x$ folgenden Oberfunktion $u_0 = \frac{1}{2} x^2$ aus. Sie erreicht den Wert 1 gerade für $x = \sqrt{2}$. Da $v = 0$ eine Unterfunktion unserer Gleichung ist, und u_0 und v im Intervall I: $0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ existieren, konvergiert nach Satz 5 die Folge der Oberfunktionen $u_0, u_1, u_2, \ldots$ in diesem Intervall gleichmäßig gegen die durch den Anfangspunkt gehende Lösung der Riccatischen Gleichung. Als verbesserte Oberfunktion u_1 erhält man mit $h_0 = \frac{x^4}{4}$

$$u_1 = \frac{1}{2} x^2 - \int_0^x e^{-2(x-t)} \frac{t^4}{4} dt.$$

Wie man sieht, ist das Konvergenzintervall hier ausgedehnter als dasjenige, zu welchem wir oben beim Picardschen Verfahren gelangt sind.

§ 7.

Vergrößerung des Konvergenzintervalls.

Die bisherigen Ergebnisse über die Annäherung der Lösung durch Folgen von Ober- oder Unterfunktionen legen es nahe, sich von der Einschränkung zu befreien, die durch die bisher benutzte Voraussetzung eines konvexen oder gar rechteckigen Bereiches in die Betrachtungen hineingetragen wird. Dabei zeigt sich dann, daß sich bei geeignetem Bereich ein sehr ausgedehntes Konvergenzintervall unseres Verfahrens angeben läßt.

In der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ sei die rechte Seite in einer gewissen Umgebung des Punktes (x_0, y_0) erklärt und stetig, und es existiere in einem Intervall I: $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a$ $(a > 0)$ eine durch den Punkt (x_0, y_0) gehende mit beschränkter integrierbarer Ableitung versehene Ober- und eine solche Unterfunktion von (A). Die Oberfunktion $y = U_0(x)$ werde dargestellt durch die Kurve C, die Unterfunktion $y = u_0(x)$ durch die Kurve C'. Zeichnet man dann eine Vertikale S, welche die Abszissenachse im Punkt $x_0 + a$ schneidet, so wird durch die Kurven C und C' und die Gerade S ein Bereich begrenzt. Bereiche solcher oder ähnlicher Art seien im folgenden mit $\mathfrak{B}$ bezeichnet.

Ist in einem solchen Bereich $\mathfrak{B}$ die Funktion $f(x, y)$ stetig und besitzt sie dort eine Lipschitz-Konstante L, dann kann man entweder von der Oberfunktion U_0 ausgehend eine Folge von Oberfunktionen U_n konstruieren, oder von der Unterfunktion u_0 ausgehend eine Folge von Unterfunktionen u_n.

Jede dieser Folgen konvergiert nach Satz 5 oder 5′ im Intervall I gleichmäßig gegen die durch (x_0, y_0) gehende Lösung von $y' = f(x, y)$. Daher gilt:

Satz 6. *Besitzt die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ eine in einem Intervall I: $x_0 \leq x \leq x_0 + a$ $(a > 0)$ existierende, geeignete Ober- und eine solche Unterfunktion, die beide durch (x_0, y_0) gehen, und erfüllt $f(x, y)$ in dem durch die Vertikale $x = x_0 + a$ und die Kurven der Ober- und der Unterfunktion begrenzten Bereich $\mathfrak{B}$ die geforderten Voraussetzungen, dann existiert die Lösung der Differentialgleichung im Intervall I, und die in den Sätzen 5 und 5′ beschriebenen Folgen von Ober- und Unterfunktionen konvergieren in I gleichmäßig gegen die durch (x_0, y_0) gehende Lösung der Differentialgleichung.*

Ein wichtiger Sonderfall des eben ausgesprochenen Satzes ist der, daß sich das Intervall I ins Unendliche erstreckt. Wenn sich nämlich eine Ober- und eine Unterfunktion angeben lassen, die beide für endliches $x > x_0$ endlich bleiben, und $f(x, y)$ in dem durch die Kurven der Ober- und der Unterfunktion sowie die mit endlichem positivem a konstruierte Vertikale S begrenzten Bereich $\mathfrak{B}$ die Voraussetzungen des Satzes 6 erfüllt, dann konvergiert unser Verfahren für alle endlichen $x > x_0$ gegen die für alle endlichen $x > x_0$ endliche Lösung.

Beispiel 3. Bei der Riccatischen Differentialgleichung $y' = x - y^2$ ist, wenn man die durch den Anfangspunkt gehende Lösung aufsucht, $u_0 = 0$ eine Unterfunktion und $U_0 = \frac{1}{2} x^2$ eine Oberfunktion. Zieht man die Vertikale $x = a$ $(a > 0)$, dann ist in dem damit abgegrenzten Bereich $\mathfrak{B}$ die Lipschitz-Konstante L gleich dem Maximalbetrag von $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$. Da y in $\mathfrak{B}$ den Maximalbetrag $\frac{1}{2} a^2$ besitzt, kann man $L = a^2$ setzen. Somit bleibt L endlich für jeden endlichen Wert von a und unser Verfahren konvergiert in diesem Fall für alle endlichen positiven x und liefert die für diese existierende Lösung der Riccatischen Gleichung[15]).

Im allgemeinen wird man bei einer Differentialgleichung nur ein Konvergenzintervall von endlicher Länge zu erwarten haben. Die Länge dieses Intervalls wird von den Eigenschaften von $f(x, y)$ abhängen, sei es, daß wie bei $y' = 1 + y^2$, also bei regulärem $f(x, y)$, die Lösung in einem Punkte singulär wird, oder daß die Lösung durch einen im Endlichen gelegenen Punkt geht, in welchem $f(x, y)$ nicht mehr regulär ist. Aus der Fülle der Möglichkeiten, die sich hier darbieten, sollen im folgenden einige typische Beispiele gebracht werden, an denen sich die Leistungsfähigkeit des neuen Verfahrens erweisen wird.

1. Die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ besitze eine durch den Punkt (x_0, y_0) gehende in einem rechts offenen Intervall I erklärte mit endlicher

[15]) Vgl. hierzu auch O. Perron, Math. Annalen 76 (1915), S. 480.

integrierbarer Ableitung versehene Unterfunktion $u_0(x)$, die für $x \to x_0 + a$ gegen $+\infty$ geht. In dem durch die Halbgerade $x = x_0$, $y \geqq y_0$ und die Kurve der Unterfunktion $u_0(x)$ begrenzten Gebiet G sei $f(x, y)$ stetig und besitze daselbst für endliches y eine endliche Lipschitz-Konstante. Dann kann man einen in I hinreichend nahe bei $x_0 + a$ gelegenen Punkt mit der Abszisse a_0 angeben (Fig. 6), so daß $b = u_0(a_0) - y_0$ einen beliebig großen positiven Wert annimmt. In dem in G gelegenen Bereich $\mathfrak{B}$, der durch die Gerade $y = y_0 + b$ aus G ausgeschnitten wird, läßt sich jetzt eine Folge von Unterfunktionen

$$u_n = u_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_{n-1}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

konstruieren. Dabei existiert nach Konstruktion die Unterfunktion u_n in einem Intervall I_n: $x_0 \leqq x \leqq a_n$, wo a_n diejenige Abszisse ist, in welcher u_n erstmals den Wert $y_0 + b$ erreicht. Da $a_{n+1} \leqq a_n$ und die Folge der a_n beschränkt ist, existiert $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x_0 + a'$, wobei $0 < a' \leqq a$ ist, denn der Schnittpunkt der mit $M \geqq f(x, y)$ gebildeten Oberfunktion $y_0 + (x - x_0) M$ mit der Geraden $y = y_0 + b$ besitzt die Abszisse $x_0 + \frac{b}{M} \leqq x_0 + a'$. In dem damit erklärten Intervall existieren alle u_n, und es konvergiert daher die Folge der u_n in diesem Intervall gleichmäßig gegen die Lösung von $y' = f(x, y)$. Diese nimmt an der Stelle $x = x_0 + a'$ den Wert $y_0 + b$ an.

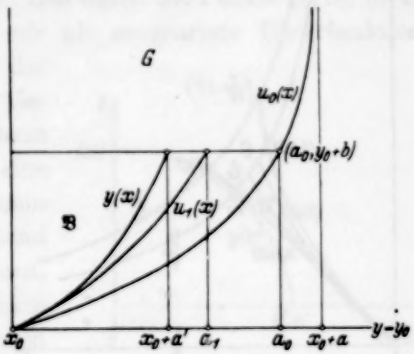

Fig. 6.

Da sich aber a_0 beliebig nahe bei $x_0 + a$ wählen und dadurch b ein beliebig großer positiver Wert erteilen läßt, konvergiert das Verfahren in einem Intervall K: $x_0 \leqq x < x_0 + \delta$, wobei $x_0 + \delta \leqq x_0 + a$ diejenige Abszisse ist, für welche die Lösung gegen $+\infty$ geht.

Besitzt die Differentialgleichung eine Oberfunktion $U_0(x)$, die für $x \to x_0 + a$ gegen $-\infty$ geht, dann kann man in entsprechender Weise eine Folge von Oberfunktionen konstruieren, die gleichmäßig gegen die Lösung konvergiert. *In beiden Fällen reicht das Konvergenzintervall bis zur Abszisse desjenigen Punktes, in welchem die Lösung singulär wird.*

2. Die Differentialgleichung sei von der Form $y' = \frac{1}{\varphi(x, y)}$, wo $\varphi(x, y)$ in der Umgebung von (x_0, y_0) stetig ist, und $\varphi(x_0, y_0) \neq 0$ ist. Geht die durch (x_0, y_0) gehende Lösung dieser Gleichung durch einen Punkt, in welchem $\varphi(x, y)$ verschwindet, dann zeigt die Ableitung der Lösung in diesem Punkt

ein singuläres Verhalten. Für gewöhnlich studiert man die Lösung in der Umgebung eines solchen Punktes, indem man die Gleichung durch Vertauschen der Veränderlichen auf die Form $\frac{dx}{dy} = \varphi(x, y)$ bringt. Wir wollen hier aber zeigen, wie sich die Lösung im neuen Verfahren bis zur singulären Stelle hin konstruieren läßt, wenn man bei der ursprünglichen Form der Gleichung bleibt. Es handelt sich dabei wieder darum, einen möglichst ausgedehnten Bereich $\mathfrak{B}$ zu bestimmen, in welchem die rechte Seite der Differentialgleichung stetig ist und eine Lipschitz-Konstante besitzt. Wie man dabei vorgeht, soll der Einfachheit halber an Hand zweier Beispiele erläutert werden.

Beispiel 4. Es sei $\varphi = 1 - xy$, und es soll die durch den Anfangspunkt gehende Lösung von $y' = \frac{1}{\varphi}$ durch schrittweise Näherungen ermittelt werden[16]). φ verschwindet auf einer Kurve C, der gleichseitigen Hyperbel $xy = 1$ (Fig. 7). Außer C benötigen wir eine Kurve C', die durch $\varphi = \varepsilon$ gegeben ist, wobei ε eine hinreichend kleine positive Zahl ist. C' ist ebenfalls eine gleichseitige Hyperbel. Eine Unterfunktion von $y' = \frac{1}{\varphi}$ ist $u_0(x) = x$, ihre Kurve schneidet C' im Punkte Q_0. Eine Oberfunktion ergibt sich aus der exakten Differentialgleichung

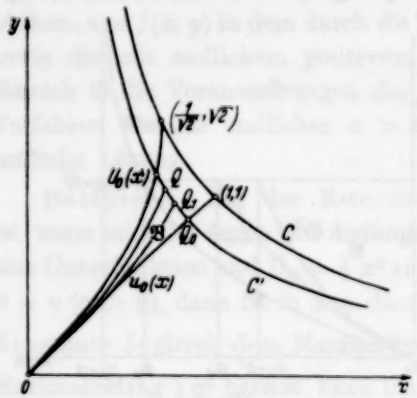

Fig. 7.

$$y' = \frac{1 + \frac{1}{2}y^3}{1 - xy}.$$

Die durch den Anfangspunkt gehende Lösung dieser Gleichung ist durch

$$x = \frac{2U_0}{2 + U_0^2}$$

gegeben. Diese Oberfunktion schneidet die Kurve C im Punkte $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$.

In dem durch C' sowie die Kurven der Ober- und der Unterfunktion begrenzten Bereich $\mathfrak{B}$ ist $\frac{1}{\varphi}$ stetig und besitzt dort eine Lipschitz-Konstante; es ist $\frac{1}{\varphi} \leqq \frac{1}{\varepsilon}$ und wegen $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \frac{x}{(1-xy)^2}$ und $x < 1$ kann $L = \frac{1}{\varepsilon^2}$ gesetzt werden. Nunmehr kann man nach Satz 3 aus u_0 eine verbesserte Unterfunktion konstruieren, ihre Kurve schneide C' in Q_1. Aus u_1 eine weitere

[16]) Die Gleichung ist elementar integrierbar, ihre Lösung ist $x = \int_0^y e^{\frac{1}{2}(t^2 - y^2)}\, dt$.

Unterfunktion u_2, usw. Auf diese Weise erhält man eine Folge von Unterfunktionen, von der man an Hand ähnlicher Überlegungen wie bei dem vorigen Beispiel zeigt, daß sie in einem Intervall K gleichmäßig gegen die Lösung konvergiert. Die Lösungskurve trifft C' in einem Punkte Q, dessen Abszisse den rechten Endpunkt des Intervalls K liefert. Da sich ε beliebig klein wählen läßt, kann man die Lösung bis zu dem Punkt hin bestimmen, in welchem sie die Kurve C trifft, also bis zu dem Punkt, in welchem ihre Ableitung unendlich wird.

Beispiel 5. Die durch den Punkt (0, 1) gehende Lösung von $y' = -\frac{x}{y}$ ist $y = |\sqrt{1 - x^2}|$. Um sie zu konstruieren, stellt man zunächst fest, daß die rechte Seite der Gleichung auf der x-Achse nicht erklärt ist. Oberhalb der Geraden $y = \varepsilon$, wo ε eine hinreichend kleine positive Zahl ist, ist die rechte Seite stetig und besitzt dort eine Lipschitz-Konstante. Eine durch (0, 1) gehende Oberfunktion ist $U_0 = 1 - \frac{1}{2}x^2$. Das durch die Punkte (0, 0), (0, 1) begrenzte Stück der y-Achse können wir als ausgeartete Unterfunktion ansehen. In dem durch die Kurven der Ober- und der Unterfunktion sowie die Gerade $y = \varepsilon$ begrenzten Bereich $\mathfrak{B}$ ist dann die rechte Seite stetig und besitzt dort eine Lipschitz-Konstante (Fig. 8). Nunmehr kann man von der Oberfunktion U_0 ausgehend eine Folge von Oberfunktionen konstruieren, wobei die Abszissen der rechten Endpunkte der Intervalle, in denen die Oberfunktionen existieren, beständig abnehmen. Es gibt dann wieder ein Intervall K, in welchem alle Oberfunktionen existieren und ihre Folge gleichmäßig gegen die Lösung von $y' = -\frac{x}{y}$ konvergiert. Da sich ε beliebig klein wählen läßt, kann man die Lösung bis zu dem Punkt hin konstruieren, in welchem die Lösungskurve die x-Achse schneidet, d. h. bis zu dem Punkt, in welchem ihre Ableitung unendlich wird.

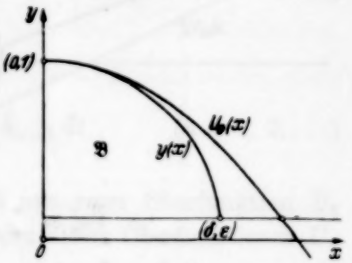

Fig. 8.

3. Wir untersuchen weiter das Konvergenzintervall des Verfahrens an dem Beispiel einer Differentialgleichung vom Typus $y' = \frac{P(x, y)}{Q(x\,y)}$, wo P und Q in der Umgebung von (x_0, y_0) stetig sind, und $Q(x_0, y_0) \neq 0$ ist; es soll also (x_0, y_0) nicht mit dem singulären Punkt der Gleichung zusammenfallen, d. h. dem Punkt, in welchem P und Q gleichzeitig verschwinden. Geht die durch (x_0, y_0) gehende Lösung nicht durch den nächstgelegenen singulären Punkt der Differentialgleichung, dann kann man unter den üblichen Voraussetzungen die Lösung in einem Intervall konstruieren, dessen rechter Endpunkt

eine größere Abszisse als die des singulären Punktes besitzen kann (vgl. das eben behandelte Beispiel). Bleibt der Fall zu untersuchen, daß die durch (x_0, y_0) gehende Lösung in den singulären Punkt einmündet. Wir untersuchen diesen Fall an Hand des folgenden Beispiels.

Beispiel 6. Wir zeigen an dem Beispiel der Differentialgleichung $y' = \frac{y}{x - y^2}$, wie man einen Bereich $\mathfrak{B}$ bestimmen kann, in welchem sich die Lösung durch schrittweise Näherungen bis zum singulären Punkt hin gewinnen läßt. Die durch $(-3, 1)$ gehende Lösung dieser Gleichung ist durch $1 - x = (y + 1)^2$ gegeben. Die Lösungskurve ist eine Parabel, deren Scheitel im Punkt $(1, -1)$ liegt, und die durch den singulären Punkt geht, der hier in den Anfangspunkt fällt (Fig. 9). Der Nenner der rechten Seite verschwindet in den auf der Parabel $x = y^2$ gelegenen Punkten, der Zähler in den auf der x-Achse gelegenen. Eine durch $(-3, 1)$ gehende Oberfunktion ist $U_0 = 1$, eine Unterfunktion ist die Gerade $u_0 = -\frac{1}{2}(1 + x)$. Diese berührt die Parabel $x = y^2$ im Punkt $(1, -1)$. Mit Hilfe der Parabel $x - y^2 = -\varepsilon$, wo ε eine hinreichend kleine positive Zahl ist, grenzen wir nun einen Bereich $\mathfrak{B}$ ab; er wird außer durch die eben erwähnte Parabel durch die Kurven der Ober- und der Unterfunktion begrenzt. In $\mathfrak{B}$ ist die rechte Seite unserer Differentialgleichung stetig und besitzt dort eine Lipschitz-Konstante. Von der Oberfunktion U_0 ausgehend läßt sich jetzt eine Folge von Oberfunktionen konstruieren. Dabei nehmen die Intervalle, in denen die aufeinanderfolgenden Glieder der Folge existieren, in ihrer Länge ab, und es gibt wieder ein Intervall K, in welchem die Folge der U_n gleichmäßig gegen die Lösung geht. Da ε beliebig klein gewählt werden kann, läßt sich auch hier die Lösung bis zum singulären Punkt hin konstruieren.

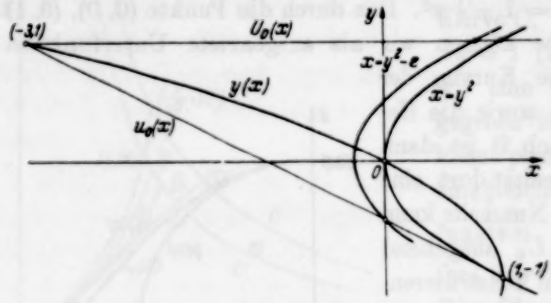

Fig. 9.

§ 8.

Einschachtelung der Lösung.

Es sei $\mathfrak{B}$ ein Bereich, der durch die Kurven einer Ober- und einer Unterfunktion sowie eine Vertikale im positiven Abstand a vom Punkte (x_0, y_0), durch welchen die Kurven der beiden Funktionen hindurchgehen, begrenzt wird. In diesem Bereich sei $f(x, y)$ stetig und besitze dort eine Lipschitz-

Konstante. Konstruiert man von einer geeigneten Oberfunktion ausgehend eine Folge von Oberfunktionen, so weiß man, daß diese unter den Voraussetzungen des Satzes 6 gegen die Lösung konvergiert. Das gleiche gilt, wenn man von einer Unterfunktion ausgehend eine Folge von Unterfunktionen konstruiert. Beide Folgen gehen, da $y' = f(x, y)$ zufolge der Lipschitz-Bedingung eine und nur eine Lösung besitzen kann, gegen die Lösung, die Folge der Oberfunktionen von oben her, die der Unterfunktionen von unten her. Man erhält auf diese Weise eine Doppelfolge von Funktionen, durch welche die Lösung eingeschachtelt wird. Ist $U_0, U_1, U_2, \ldots$ die Folge der Oberfunktionen, und $u_0, u_1, u_2, \ldots$ die der Unterfunktionen, dann gilt gleichmäßig in I

$$\lim_{n \to \infty} (U_n - u_n) = 0.$$

Das eben geschilderte Einschachtelungsverfahren machte die Bestimmung zweier getrennter Funktionenfolgen erforderlich, von denen die eine aus einer Ober-, die andere aus einer Unterfunktion gewonnen wurde. Im folgenden zeigen wir, wie man aus einer Ober-(Unter-)funktion allein eine die Lösung einschachtelnde Doppelfolge herstellen kann.

Es sei

$$U_n = U_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_{n-1}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

eine unter den Voraussetzungen des Satzes 6 aus einer Oberfunktion U_0 konstruierte Folge von Oberfunktionen. Aus jeder dieser Oberfunktionen U_n läßt sich nach Satz 4 eine Unterfunktion

$$u_n = U_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_{n-1} dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

gewinnen. Über die so erhaltene Doppelfolge gilt der folgende Satz:

Satz 7. *Ist $U_0, U_1, U_2, \ldots$ eine unter den Voraussetzungen des Satzes 6 aus einer Oberfunktion U_0 von $y' = f(x, y)$ konstruierte Folge von Oberfunktionen, so konvergiert die aus ihr nach Satz 4 konstruierte Folge der Unterfunktionen*

$$u_n = U_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_{n-1}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

in I gleichmäßig gegen die Lösung der Differentialgleichung, vorausgesetzt, daß die erste der Unterfunktionen u_1 in I existiert. Die Folge der Unterfunktionen u_n nimmt mit wachsendem n zu,

$$u_1 \leqq u_2 \leqq \cdots \leqq y \leqq \cdots \leqq U_2 \leqq U_1 \leqq U_0.$$

Beweis. Nimmt man zunächst an, daß alle u_n in I existieren, so folgt aus den beiden Gleichungen

$$U_n = U_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_{n-1}\, dt, \quad u_n = U_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_{n-1}\, dt \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$U_n - u_n = 2 \int_{x_0}^{x} h_{n-1} \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\, L(x-t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Da die Folge der h_n in I mit wachsendem n gleichmäßig gegen Null geht, gilt

$$\lim_{n \to \infty} (U_n - u_n) = 0,$$

woraus man entnimmt, daß die Folge der Unterfunktionen u_n in I gleichmäßig gegen die Lösung konvergiert.

Bleibt noch zu zeigen, daß alle Unterfunktionen u_n existieren, sobald u_1 existiert. Hierzu weisen wir nach, daß die u_n mit wachsendem n zunehmen. Es ist

$$u_{n+1} - u_n = U_n - U_{n-1} + \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_n\, dt,$$

oder, indem man die erste Differenz nach (8) durch ein Integral ersetzt,

$$u_{n+1} - u_n = 2 \int_{x_0}^{x} h_{n-1} \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\, L(x-t)\, dt - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_n dt.$$

Setzt man die rechte Seite von (13) gleich g_n, so folgt wegen $h_n \leqq g_n$

$$u_{n+1} - u_n \geqq 2 \int_{x_0}^{x} h_{n-1} \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\, L(x-t)\, dt - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} g_n\, dt.$$

Der Ausdruck rechterhand verschwindet aber identisch in x. Setzt man ihn nämlich G_n, so findet man nach Differentiieren und geeignetem Zusammenfassen

$$G_n' = L G_n.$$

Da G_n an der Stelle $x = x_0$ verschwindet, verschwindet es auf Grund der letzten Gleichung identisch in x. Damit ist gezeigt, daß die Unterfunktionen u_n mit wachsendem n zunehmen. Existiert also u_1 in I — dazu ist hinreichend, daß die Kurve von u_1 für alle x aus I in $\mathfrak{B}$ verläuft —, dann existieren erst recht alle weiteren u_n, w. z. b. w

Bei der praktischen Durchführung dieser Einschachtelung wird man nicht zu jeder Oberfunktion die entsprechende Unterfunktion bestimmen, sondern die Folge der Oberfunktionen bis zu einem gewissen Glied U_{n-1} berechnen und die zu der Oberfunktion U_{n-1} gehörige Unterfunktion u_n aufsuchen. Dann weiß man, daß die Lösung y in I zwischen U_{n-1} und u_n verläuft.

Wir sind eben bei der Bestimmung der Doppelfolge von einer Oberfunktion ausgegangen, haben eine Folge von Oberfunktionen konstruiert und zu jeder derselben eine Unterfunktion. In entsprechender Weise kann man von einer Unterfunktion ausgehen, aus dieser eine Folge von Unterfunktionen gewinnen und aus jeder derselben nach Satz 4 eine Oberfunktion. Von der Folge dieser Oberfunktionen gilt ein dem Satz 7 entsprechender Satz. Sie nimmt mit wachsendem n ab und geht in I gleichmäßig gegen die Lösung.

Neben den beiden eben geschilderten Möglichkeiten, die Lösung einzuschachteln, gibt es noch eine dritte. Sie beruht ebenso wie die vorige auf der in Satz 4 beschriebenen Konstruktion einer Unter-(Ober-)funktion aus einer Ober-(Unter-)funktion. Es sei B ein konvexer Bereich, in welchem $f(x, y)$ stetig ist und einer Lipschitz-Bedingung genügt. Ferner sei $u_0(x)$ eine durch den Punkt (x_0, y_0) gehende, in einem Intervall I existierende, geeignete Oberfunktion von $y' = f(x, y)$. Dann ist nach Satz 4

$$u_1 = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_0 \, dt$$

eine durch (x_0, y_0) gehende Unterfunktion. Mit derselben Konstruktion folgt aus u_1 die Oberfunktion

$$u_2 = u_1 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_1 \, dt,$$

daraus weiter die Unterfunktion

$$u_3 = u_2 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_2 \, dt,$$

usw. Indem man in dieser Weise unbegrenzt fortfährt, erhält man eine Funktionenfolge $u_0, u_1, u_2, \ldots$, deren Glieder mit geradem Index Ober-, mit ungeradem Index Unterfunktionen sind.

Wir nehmen zunächst wieder an, daß es ein Intervall K gibt, in welchem alle Funktionen dieser Folge existieren. Dann können wir zeigen, daß $\lim_{n \to \infty} u_n(x) = y(x)$ existiert und gleich der durch (x_0, y_0) gehenden Lösung von $y' = f(x, y)$ ist. Dazu hat man die Konvergenz der Reihe

$$y = u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots$$

nachzuweisen. Mit

$$u_n - u_{n-1} = -\int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_{n-1} \, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{22}$$

erhält man

$$y - u_0 = -\int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} (h_0 + h_1 + h_2 + \ldots) \, dt. \tag{23}$$

Ähnlich wie in § 5 wird man auch hier zeigen, daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ in K absolut und gleichmäßig konvergent ist. Differentiieren von (22) liefert

$$u_n' = f(x, u_{n-1}) - L\int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_{n-1}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

somit ist

$$h_n = f(x, u_{n-1}) - f(x, u_n) - L\int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_{n-1}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{24}$$

Auf Grund der Lipschitz-Bedingung und der Gleichung (22) ergibt sich hieraus

$$|h_n| \leqq 2L\int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} |h_{n-1}|\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Wie in § 5 suchen wir eine Majorante der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ auf. Die Glieder dieser Majorante sind durch die Rekursionsformel

$$H_n = 2L\int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} H_{n-1}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

erklärt, wobei $H_0 = h_0$ gesetzt ist. Durch Ableiten der letzten Gleichung kommt

$$H_n' = 2LH_{n-1} + LH_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Unter Benutzung des symbolischen Differentialoperators schreibt sich dieses System

$$(D - L)\, H_n = 2L\, H_{n-1},$$

aus ihm folgt

$$(D - L)^n H_n = (2L)^n H_0,$$

und daraus nach denselben Überlegungen wie in § 5

$$H_n = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{L(x-t)}\, (2L)^n H_0\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{25}$$

Ist μ_0 die obere Grenze von $h_0(x)$ im Intervall I, so gilt demnach

$$H_n \leqq \mu_0 \frac{[2L(x - x_0)]^n}{n!}\, e^{L(x-x_0)}, \qquad x_0 \leqq x \leqq x_0 + a,$$

womit die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ nachgewiesen ist. Nach (23) konvergiert somit die Folge der u_n in K gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion, $\lim_{n \to \infty} u_n(x) = y(x)$.

Als Summe der Majorante $\sum_{n=0}^{\infty} H_n$ erhält man

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} H_n = H_0 + 2L \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} \left[1 + \frac{2L(x-t)}{1!} + \frac{[2L(x-t)]^2}{2!} + \ldots\right] H_0 \, d$$

oder

$$S = h_0 + 2L \int_{x_0}^{x} e^{3L(x-t)} h_0 dt.$$

In gleicher Weise wie in § 5 zeigt man noch, daß $\lim_{n \to \infty} u_n(x) = y(x)$ Lösung von $y' = f(x, y)$ ist. Da $f(x, y)$ einer Lipschitz-Bedingung genügt, ist sie die einzige Lösung, welche die Gleichung durch den Punkt (x_0, y_0) schickt.

Um den Beweis vollständig zu machen, bleibt noch nachzuweisen, daß es ein Intervall K gibt, in welchem alle u_n existieren. Als K kann man ein Intervall nehmen, in welchem u_0, u_1 und u_2 existieren und $u_0 - u_2 \geqq 0$ ist. Daß es immer ein solches Intervall gibt, kann man so einsehen. Es ist

$$u_0 - u_2 = \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}(h_0 + h_1) dt \geqq \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}(h_0 - H_1) \, dt.$$

Setzt man den Wert von H_1 nach (25) ein, so folgt nach einer leichten Umformung

$$u_0 - u_2 \geqq \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} [1 - 2L(x - t)] h_0 \, dt \geqq [1 - 2L(x - x_0)] \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_0 \, dt,$$

woraus man abliest, daß $u_0 - u_2$ mindestens im Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_0 + \frac{1}{2L}$ nicht negativ ist. In einem solchen Intervall K verlaufen dann die Kurven aller Funktionen u_n in B, und die Folge der Oberfunktionen nimmt dort mit wachsendem n ab, während die der Unterfunktionen zunimmt. In der Tat, nach (23) ist

$$u_1 - u_3 = \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}(h_1 + h_2) \, dt.$$

Da nach (24)

$$h_1 + h_2 = f(x, u_0) - f(x, u_2) - L(u_0 - u_2)$$

und $u_0 - u_2 \geqq 0$ ist, folgt $h_1 + h_2 \leqq 0$ und damit $u_1 - u_3 \leqq 0$. Daraus schließt man in der gleichen Weise weiter, daß $u_2 - u_4 \geqq 0$, $u_3 - u_5 \leqq 0$ usw., womit gezeigt ist, daß die Folge der Oberfunktionen in K mit wachsendem n abnimmt, während die der Unterfunktionen zunimmt. Allgemeiner kann man sagen, daß man für K jedes Intervall nehmen kann, in welchem die Funktionen $u_0, u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}$ existieren und die Differenz $u_n - u_{n+2}$ bei geradem (ungeradem) n nicht negativ (positiv) ist.

Ein etwas kleineres, dafür aber einfacher zu bestimmendes Konvergenzintervall liefert die folgende Betrachtung. Man kann zeigen, daß alle Funktionen unserer Folge unter einer gewissen Ober- und über einer gewissen Unterfunktion liegen. Um die Oberfunktion zu bestimmen, schreiben wir (23) in der Form

$$u_n = u_{n+1} + \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_n \, dt. \tag{26}$$

Ist n gerade, dann ist u_n eine Ober-, u_{n+1} eine Unterfunktion und $h_n \geqq 0$. Ersetzt man auf der rechten Seite von (26) die Unterfunktion u_{n+1} durch die Oberfunktion u_0 und h_n durch H_n, so folgt

$$u_n \leqq u_0 + \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} H_n \, dt,$$

oder, indem man H_n durch die rechte Seite von (25) ausdrückt,

$$u_n \leqq u_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{[2L(x-t)]^n}{n!} e^{L(x-t)} h_0 \, dt;$$

somit ist erst recht

$$u_n \leqq u_0 + \int_{x_0}^{x} e^{3L(x-t)} h_0 \, dt.$$

Alle Funktionen u_n liegen also unter der rechten Seite der letzten Ungleichung, von der man leicht zeigt, daß sie eine Oberfunktion von (A) ist.

Ist dagegen n ungerade, also u_n eine Unterfunktion, dann ist u_{n+1} Oberfunktion und $h_n \leqq 0$. Ersetzt man in (26) die Oberfunktion u_{n+1} durch die Unterfunktion u_1 und h_n durch $-H_n$, so kommt

$$u_n \geqq u_0 + (u_1 - u_0) - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} H_n \, dt,$$

oder

$$u_n \geqq u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} \left(1 + \frac{[2L(x-t)]^n}{n!}\right) h_0 \, dt;$$

somit gilt erst recht

$$u_n \geqq u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{3L(x-t)} h_0 \, dt.$$

Alle Funktionen u_n bleiben also oberhalb der rechten Seite dieser Ungleichung, die eine Unterfunktion von (A) ist. Alles zusammengenommen ist damit gezeigt, daß

$$u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{3L(x-t)} h_0 \, dt \leqq u_n \leqq u_0 + \int_{x_0}^{x} e^{3L(x-t)} h_0 \, dt \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Daraus schließt man, daß es ein Intervall K gibt, in welchem die Folge der u_n gleichmäßig gegen die Lösung geht. Der rechte Endpunkt von K ergibt sich hier nach denselben Überlegungen, wie wir sie zur Bestimmung des Konvergenzintervalls des PICARDschen Verfahrens beim Beweis von Satz 1 benutzt haben. Man hat dabei nur Y mit

$$\int_{x_0}^{x} e^{3L(x-t)} h_0 \, dt$$

zu identifizieren.

Anstatt von einer Oberfunktion auszugehen, kann man das Verfahren auch mit einer Unterfunktion beginnen. Man erhält dann eine Funktionenfolge, bei welcher die Glieder mit geradem Index Unter-, die mit ungeradem Index Oberfunktionen sind. Der Beweis für die Konvergenz der so erhaltenen Funktionenfolge ist Schritt für Schritt beinahe derselbe wie eben. Die Schranken, zwischen denen alle Funktionen der Folge verlaufen, sind hier gegeben durch

$$u_0 + \int_{x_0}^{x} e^{3L(x-t)} h_0 \, dt \leqq u_n \leqq u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{3L(x-t)} h_0 \, dt.$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 8. *Ist $u_0(x)$ eine durch den Punkt (x_0, y_0) gehende, in einem Intervall I existierende geeignete Ober-(Unter-)funktion von $y' = f(x, y)$, und konstruiert man von u_0 ausgehend die Funktionenfolge*

$$u_n = u_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_{n-1} \, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

mit

$$h_n = u_n' - f(x, u_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

dann gibt es ein Intervall K, in welchem die Folge der u_n gleichmäßig gegen die durch (x_0, y_0) gehende Lösung von $y' = f(x, y)$ konvergiert. Bei dieser Folge sind die Glieder mit geradem Index Ober-(Unter-)funktionen, die mit ungeradem Unter-(Ober-)funktionen. Als K kann man entweder ein Intervall nehmen, in welchem u_0, u_1 und u_2 existieren und die Differenz $u_0 - u_2$ positiv (negativ) ist, oder allgemeiner eines, in welchem $u_0, u_1, \ldots, u_{n+2}$ existieren und die Differenz zweier aufeinanderfolgender Ober- bzw. Unterfunktionen $u_n - u_{n+2}$ positiv bzw. negativ ist, oder eines, in welchem die beiden Schranken

$$u_0 \pm \int_{x_0}^{x} e^{3L(x-t)} h_0 \, dt$$

existieren.

Zu diesem Satz zwei Beispiele.

Beispiel 7. Wir zeigen am Beispiel der Gleichung $y' = |\sqrt{x^2 + y^2}|$, wie man die durch den Anfangspunkt gehende Lösung für positives x nach dem in Satz 8 geschilderten Verfahren einschachteln kann. Hier ist $\frac{\partial f}{\partial y}$ in der ganzen x, y-Ebene beschränkt, $L = 1$. Bei der Aufstellung der die Lösung einschachtelnden Funktionenfolge gehen wir von der Unterfunktion $u_0(x) = 0$ aus. Mit $h_0 = -x$ erhält man als nächste Näherung die Oberfunktion

$$u_1 = \int_0^x e^{x-t} t \, dt = e^x - 1 - x,$$

daher

$$0 \leqq y \leqq e^x - 1 - x.$$

Das Verfahren konvergiert hier für alle positiven x, denn alle u_n liegen zwischen den Schranken

$$-\tfrac{1}{9}(e^{3x} - 1 - 3x) \leqq u_n \leqq \tfrac{1}{9}(e^{3x} - 1 - 3x).$$

Beispiel 9. Es soll die durch den Anfangspunkt gehende Lösung der schon mehrfach behandelten Riccatischen Gleichung $y' = x - y^2$ für positives x eingeschachtelt werden. Eine Unterfunktion ist $u_0 = 0$. Da $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ ist, kann man in dem Gebietsstreifen $x \geqq 0$, $|y| \leqq 1$ die Lipschitz-Konstante $L = 2$ setzen. Als Schranken der u_n erhält man mit $h_0 = -x$

$$\pm \int_0^x e^{6(x-t)} t \, dt = \pm \tfrac{1}{36}(e^{6x} - 1 - 6x).$$

Die u_n existieren demnach in einem Intervall K, in welchem diese Schranken den Betrag 1 nicht überschreiten. Dies ist der Fall für $0 \leqq x \leqq 0{,}19$.

Als nächste Näherung bekommt man die Oberfunktion

$$u_1 = \int_0^x e^{2(x-t)} t \, dt = \tfrac{1}{4}(e^{2x} - 1 - 2x).$$

Sie erreicht den Wert 1 für $x = 0{,}97$ und existiert daher im Intervall $0 \leqq x \leqq 0{,}97$. Aus u_1 ergibt sich der Fehler

$$h_1 = \tfrac{1}{2}(e^{2x} - 1) - x + \tfrac{1}{16}(e^{2x} - 1 - 2x)^2,$$

und damit

$$h_0 + h_1 = \tfrac{1}{2}(e^{2x} - 1) - 2x + \tfrac{1}{16}(e^{2x} - 1 - 2x)^2.$$

Wir suchen nun ein Intervall auf, in welchem $u_2 - u_0 = u_2 \geqq 0$ ist. Das ist sicherlich der Fall, solange $h_0 + h_1 \leqq 0$ ist. Da

$$h_0 + h_1 \leqq \tfrac{1}{2}(e^{2x} - 1) - 2x,$$

ist $h_0 + h_1$ sicherlich nicht positiv, wenn es die rechte Seite nicht ist. Diese wechselt ihr Vorzeichen für $x = 0{,}63$. Damit haben wir ein größeres Konvergenzintervall gewonnen. Ein noch größeres erhält man, wenn man die Stelle bestimmt, an welcher u_2 sein Vorzeichen wechselt.

Wie das Beispiel zeigt, ist das mit Satz 6 beschriebene Verfahren der schrittweisen Näherungen dem des letzten Satzes überlegen. Beim ersteren konvergiert das Verfahren für alle positiven x, während beim letzteren der Konvergenznachweis nur für ein kleineres Intervall gelingt.

§ 9.

Über das Picardsche Verfahren.

Das eben beschriebene Verfahren und das Picardsche weisen insofern eine gewisse Ähnlichkeit auf, als man bei ihnen im allgemeinen nur ein kleines Konvergenzintervall angeben kann. Bei beiden tritt auch die bekannte Erscheinung auf, daß es ein größtes Konvergenzintervall gibt. Untersucht man nämlich die Länge des Konvergenzintervalls in Abhängigkeit von der Breite b des Gebietsstreifens, so findet man, daß die Länge des Konvergenzintervalls zunächst mit der Breite des Gebietsstreifens zunimmt, bis sie einen größten Wert erreicht, um dann mit wachsender Breite abzunehmen.

Wenn auch das Picardsche Verfahren im allgemeinen nicht unmittelbar Folgen von Ober- oder Unterfunktionen liefert, so kann man sich doch mit seiner Hilfe eine Folge von Ober- und Unterfunktionen verschaffen, durch welche die Lösung eingeschachtelt wird. Es gilt da folgender Satz:

Satz 9. *Ist $u_0(x)$ eine durch den Punkt (x_0, y_0) gehende, in einem Intervall I erklärte geeignete Ausgangsfunktion, dann gibt es ein Intervall K, in welchem die Picardsche Funktionenfolge*

$$u_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_{n-1})\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

gleichmäßig gegen die Lösung von $y' = f(x, y)$ geht, und die mit dem Fehler

$$h_n = u_n' - f(x, u_n) = f(x, u_{n-1}) - f(x, u_n)$$

gebildete Funktionenfolge

$$V_n = u_n + \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} |h_n(t)|\, dt \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

eine mit wachsendem n abnehmende Folge von Oberfunktionen darstellt, während

$$v_n = u_n - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} |h_n(t)|\, dt \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

eine zunehmende Folge von Unterfunktionen darstellt. Die beiden letzten Folgen gehen in K gleichmäßig gegen die durch (x_0, y_0) gehende Lösung von $y' = f(x, y)$, liefern somit eine Einschachtelung der Lösung. Das Konvergenzintervall K ist dasselbe wie in Satz 1.

Beweis. Aus

$$h_n = u_n' - f(x, u_n) = f(x, u_{n-1}) - f(x, u_n) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

schließt man

$$|h_n| \leqq L\,|u_n - u_{n-1}| \leqq L^n \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,|h_0(t)|\,dt \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

wo die letzte Ungleichung aus den Entwicklungen in § 1 folgt. Daraus entnimmt man, daß die Folge der h_n in K mit wachsendem n gleichmäßig gegen Null geht. Daß die V_n Ober- und die v_n Unterfunktionen von $y' = f(x, y)$ sind, folgt in derselben Weise, wie dies für V und v in § 3 gezeigt wurde. Man hat dort nur überall den Index n an V und v anzuhängen. Damit hat man eine Folge von Oberfunktionen V_n und eine von Unterfunktionen v_n, durch welche die Lösung eingeschachtelt wird. Denn beide Folgen konvergieren, da die h_n in K gleichmäßig gegen Null und die u_n gleichmäßig gegen die Lösung gehen, in K gleichmäßig gegen die Lösung, die erstere von „oben", die letztere von „unten" her.

Bleibt noch zu zeigen, daß die V_n mit wachsendem n abnehmen. Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir $|h_n(x)| = H_n(x)$. Dann ist zu beweisen, daß

$$V_n - V_{n+1} = u_n - u_{n+1} + \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\,[H_n(t) - H_{n+1}(t)]\,dt \geqq 0.$$

Nach § 1 ist

$$H_{n+1} \leqq L|u_{n+1} - u_n| = L\int_{x_0}^{x} H_n\,dt = G_{n+1}.$$

Damit wird

$$V_n - V_{n+1} \geqq \int_{x_0}^{x} (h_n + H_n)\,dt + \left[\int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}(H_n - G_{n+1})\,dt - \int_{x_0}^{x} H_n\,dt\right].$$

Der in eckige Klammern gesetzte Ausdruck verschwindet aber identisch in x, denn seine Ableitung ist gleich dem mit L multiplizierten Ausdruck, und dieser verschwindet an der Stelle $x = x_0$. Daher

$$V_n - V_{n+1} \geqq \int_{x_0}^{x} (h_n + |h_n|)\,dt \geqq 0,$$

woraus man abliest, daß die Oberfunktionen V_n mit wachsendem n abnehmen.

In entsprechender Weise zeigt man, daß die Unterfunktionen v_n mit wachsendem n zunehmen, womit der Satz bewiesen ist.

Wie bekannt, liefert das PICARDsche Verfahren unter geeigneten Monotonievoraussetzungen über $f(x, y)$ unmittelbar Folgen von Ober- oder Unterfunktionen. Über die Erzeugung solcher Folgen gibt der folgende Hilfssatz Auskunft.

Hilfssatz. *Ist die rechte Seite der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ in der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) stetig und $u_0(x)$ eine durch (x_0, y_0) gehende in einem Intervall I existierende geeignete Ober-(Unter-)funktion von $y' = f(x, y)$, deren Fehler dort fast überall positiv (negativ) ist; dann ist die nach PICARD konstruierte nächste Näherung*

$$u_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_0)\, dt,$$

sofern sie ebenfalls in I existiert, eine verbesserte Ober-(Unter-)funktion, wenn $f(x, y)$ in der Umgebung von (x_0, y_0) mit wachsendem y monoton zunimmt. Nimmt dagegen $f(x, y)$ monoton ab, so ist u_1 eine Unter-(Ober-)funktion.

Beweis. Nimmt $f(x, y)$ mit wachsendem y monoton zu, und ist $u_0(x)$ eine Oberfunktion mit den geforderten Eigenschaften, $y(x)$ irgendeine durch (x_0, y_0) gehende Lösung von (A), so hat man in I zunächst $u_0 \geqq y$. Ist I so gewählt, daß die nach PICARD gebildete nächste Näherung

$$u_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_0)\, dt = u_0 - \int_{x_0}^{x} h_0\, dt$$

in I existiert, so gilt $u_1 < u_0$ für $x > x_0$, denn nach Voraussetzung ist h_0 in I fast überall positiv, d. h. es soll dort nur in einer endlichen Anzahl isolierter Punkte verschwinden. Hier ist aber u_1 eine verbesserte Oberfunktion, denn der Fehler von u_1

$$h_1 = f(x, u_0) - f(x, u_1)$$

ist für $x > x_0$ positiv, und es ist $u_1 \geqq y$, da

$$u_1 - y = \int_{x_0}^{x} [f(t, u_0) - f(t, y)]\, dt.$$

Damit ist gezeigt, daß das PICARDsche Verfahren in diesem Fall eine verbesserte Oberfunktion liefert. Ebenso zeigt man, daß unter den gleichen Bedingungen aus einer Unterfunktion u_0 eine verbesserte Unterfunktion u_1 erzeugt wird.

Nimmt dagegen $f(x, y)$ mit wachsendem y monoton ab, und ist u_0 wieder eine Oberfunktion, dann ist in I wieder $u_0 \geqq y$ und wie eben $u_1 < u_0$ für $x > x_0$. Hier ist aber u_1 eine Unterfunktion, denn der Fehler von u_1

$$h_1 = f(x, u_0) - f(x, u_1)$$

ist für $x > x_0$ negativ, und es ist $u_1 \leqq y$, da

$$u_1 - y = \int_{x_0}^{x} [f(t, u_0) - f(t, y)]\, dt,$$

und $f(x, y)$ mit wachsendem y monoton abnimmt.

Ebenso folgt, daß u_1 eine Oberfunktion ist, wenn u_0 eine Unterfunktion ist.

Über die Picardsche Funktionenfolge, die auftritt, wenn $f(x, y)$ mit wachsendem y monoton zunimmt, hat I. Bendixson [17]) einen Satz bewiesen, der später von M. Müller [18]) richtiggestellt wurde.

Satz von Bendixson-Müller. *In der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ sei $f(x, y)$ in der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) stetig und die Gleichung besitze eine durch (x_0, y_0) gehende, in einem Intervall I: $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a$ existierende geeignete Oberfunktion $U_0(x)$, deren Fehler dort fast überall positiv ist; $u_0(x)$ sei eine in demselben Intervall existierende, ebenfalls durch (x_0, y_0) gehende geeignete Unterfunktion, deren Fehler dort fast überall negativ ist. In dem durch die Vertikale $x = x_0 + a$ und die Kurven von $U_0(x)$ und $u_0(x)$ begrenzten Bereich $\mathfrak{B}$ sei $f(x, y)$ stetig und nehme dort mit wachsendem y monoton zu. Dann ist die aus der Oberfunktion $U_0(x)$ erzeugte Picardsche Funktionenfolge*

$$U_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, U_{n-1})\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

eine mit wachsendem n monoton abnehmende Folge von Oberfunktionen, die in I gleichmäßig gegen eine Lösung von $y' = f(x, y)$ geht. Die aus der Unterfunktion $u_0(x)$ erzeugte Folge ist eine monoton zunehmende von Unterfunktionen, die ebenfalls gegen eine Lösung von $y' = f(x, y)$ geht.

Beweis. Da $f(x, y)$ in der Umgebung von (x_0, y_0) stetig ist, lassen sich nach den in § 3 unter 1. und 2. beschriebenen Verfahren je eine Ober- und Unterfunktion $U_0(x)$ und $u_0(x)$ von der im Satz angegebenen Art konstruieren. Bei der Beweisführung wollen wir uns auf die aus der Oberfunktion $U_0(x)$ erzeugte Folge von Oberfunktionen beschränken. In dem Bereich $\mathfrak{B}$ ist $f(x, y)$ beschränkt, $|f(x, y)| \leqq M$. Nach unseren Voraussetzungen existieren alle U_n im Intervall I. Bleibt zu beweisen, daß die Folge der U_n in I gleichmäßig konvergent ist. Da

$$|U_n(x') - U_n(x)| = \left| \int_{x}^{x'} f(t, U_{n-1})\, dt \right| \leqq M |x' - x|,$$

[17]) I. Bendixson, Sur la convergence uniforme des séries, Ofversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897, S. 605; vgl. auch P. Painlevé, Enzykl. d. Math. Wiss., Bd. II, 1. Teil, 1. Hälfte, S. 200.

[18]) M. Müller, Math. Zeitschr. **26** (1927), S. 619, insbes. S. 623.

sind die U_n in I gleichmäßig stetig. Nunmehr unterteilen wir das Intervall I durch die Punkte

$$x_0 = X_0, X_1, X_2, \ldots, X_k = x_0 + a$$

in k Teilintervalle, deren Längen unter einer beliebig klein vorgegebenen positiven Zahl ε bleiben. Dann gibt es immer ein X_i, das sich von einem beliebigen x aus I um weniger als ε unterscheidet. In

$$U_{n+p}(x) - U_n(x) = U_{n+p}(x) - U_{n+p}(X_i) + U_{n+p}(X_i) - U_n(X_i) + \\ + U_n(X_i) - U_n(x)$$

kann man aber $U_{n+p}(X_i) - U_n(X_i)$ durch Wahl eines hinreichend großen Wertes von n kleiner als ε machen, denn die Zahlenfolge der $U_n(X_i)$ besitzt, da sie monoton abnimmt und nach unten beschränkt ist, einen Grenzwert.

Damit ergibt sich

$$|U_{n+p}(x) - U_n(x)| < \varepsilon M + \varepsilon + \varepsilon M = \varepsilon(1 + 2M).$$

Infolgedessen konvergiert die Folge der $U_n(x)$ in I gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion. Von dieser zeigt man in der üblichen Weise, daß sie eine Lösung von $y' = f(x, y)$ ist, womit der Satz für die Folge der Oberfunktionen bewiesen ist. Der Beweis für die Folge der Unterfunktionen verläuft entsprechend.

Der folgende Satz bezieht sich auf die Picardsche Funktionenfolge, die man erhält, wenn $f(x, y)$ mit wachsendem y monoton abnimmt. Er ist ein Gegenstück zu dem Satz von Bendixson-Müller.

Satz 10. *Es sei B ein konvexer Bereich, in welchem die rechte Seite der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ stetig ist und mit wachsendem y monoton abnimmt. Ferner sei $u_0(x)$ eine durch den Punkt (x_0, y_0) gehende in einem Intervall I existierende geeignete Ober-(Unter-)funktion von $y' = f(x, y)$, deren Fehler in I fast überall positiv (negativ) ist. Konstruiert man von $u_0(x)$ ausgehend die Picardsche Funktionenfolge*

$$u_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_{n-1})\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

und gibt es ein Intervall K, in welchem u_0, u_1 und u_2 existieren und $u_0 - u_2$ fast überall positiv (negativ) ist, oder alle Glieder bis zur Ober-(Unter-)funktion u_{n+2} hin existieren und $u_n - u_{n+2}$ fast überall positiv (negativ) ist, dann konvergiert die Teilfolge der Oberfunktionen mit wachsendem n monoton abnehmend gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion und die der Unterfunktionen mit wachsendem n

monoton zunehmend ebenfalls gegen eine Grenzfunktion. Sind die beiden Grenzfunktionen dieselben — dies ist der Fall, wenn gleichmäßig in K $\lim_{n \to \infty} (u_n - u_{n+1}) = 0$ *ist —, so stellen diese die einzige Lösung dar, welche* $y' = f(x, y)$ *besitzt.*

Beweis. Den Beweis führen wir unter der Annahme durch, daß $u_0(x)$ eine Oberfunktion ist. Nachdem man die Funktionen u_1 und u_2 nach Picard konstruiert hat, sucht man ein Intervall K auf, in welchem diese Funktionen existieren und die Differenz $u_0 - u_2$ mit Ausnahme einer endlichen Anzahl isolierter Punkte, in denen sie verschwindet, positiv ist. Dann folgt aus

$$u_3 - u_1 = \int_{x_0}^{x} [f(t, u_2) - f(t, u_0)]\, dt,$$

da $f(x, y)$ nach Voraussetzung mit wachsendem y monoton abnimmt, $u_3 \geqq u_1$, wobei die Gleichheit nur an der Stelle x_0 eintritt. Damit schließt man aus

$$u_4 - u_2 = \int_{x_0}^{x} [f(t, u_3) - f(t, u_1)]\, dt,$$

daß $u_4 \leqq u_2$ ist. Indem man in dieser Weise weiterfährt, erkennt man, daß die Folge der Oberfunktionen (n gerade) in K mit wachsendem n monoton abnimmt, während die der Unterfunktionen (n ungerade) monoton zunimmt. Alle u_n ($n = 2, 3, \ldots$) verlaufen somit für alle x aus K in dem durch die Kurven von u_0 und u_1, sowie die Vertikale $x = x_0 + \delta$ begrenzten Bereich $\mathfrak{B}$. Da $f(x, y)$ in $\mathfrak{B}$ stetig und damit beschränkt ist, sind die u_n in K gleichmäßig stetig. Für die monoton abnehmende Folge der Oberfunktionen folgt daraus in gleicher Weise wie bei dem Beweis des vorigen Satzes, daß sie in K gleichmäßig konvergent ist. Das gleiche gilt von der Folge der Unterfunktionen. Konvergieren beide Folgen gegen ein und dieselbe Grenzfunktion, das ist der Fall, wenn in K gleichmäßig $\lim_{n \to \infty} (u_n - u_{n+1}) = 0$ ist, dann läßt sich von dieser in der üblichen Weise zeigen, daß sie eine Lösung von $y' = f(x, y)$ ist. Daß dies die einzige Lösung ist, beweist man indirekt. Angenommen, es gäbe zwei Lösungen, sie seien Y und y, und es sei für hinreichend kleines positives $x - x_0$ immer $Y > y$. Dann ergibt sich aus

$$Y' - y' = f(x, Y) - f(x, y),$$

da $f(x, y)$ mit wachsendem y monoton abnimmt, für hinreichend kleines positives $x - x_0$

$$Y' - y' < 0$$

und damit $Y < y$, wodurch der Widerspruch hergestellt ist. Damit ist der Beweis für den Fall erbracht, daß u_0 eine Oberfunktion ist. Der Beweis für den Fall, daß u_0 eine Unterfunktion ist, verläuft entsprechend.

Ein Konvergenzintervall, das größer sein kann als das eben angegebene (vgl. Beispiel 10), erhält man in folgender Weise. Man sucht ein Intervall auf, in welchem alle Glieder der PICARDschen Folge bis zur Ober-(Unter-)funktion u_{n+2} hin existieren und die Differenz $u_n - u_{n+2}$ positiv (negativ) ist. In dem so definierten Intervall konvergieren offenbar die beiden Teilfolgen ebenfalls gleichmäßig. Damit ist der Satz in allen Teilen bewiesen.

Beispiel 9. Als erstes Beispiel nehmen wir die Gleichung $y' = x - |\sqrt{y}|$, und bestimmen deren durch den Anfangspunkt gehende Lösung, wobei wir von der Unterfunktion $u_0 = 0$ ausgehen. Wir erhalten dann nach PICARD

$$u_0 = 0, \quad u_1 = \frac{1}{2}x^2, \quad u_2 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{x^2}{2},$$

allgemein

$$u_n = C_n x^2.$$

Die u_n mit geradem Index sind Unterfunktionen, die mit ungeradem Oberfunktionen. Beide Folgen konvergieren nach dem letzten Satz für alle $x > 0$, denn es ist für positives x

$$u_2 - u_0 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{x^2}{2} > 0.$$

Sie gehen in jedem endlichen Intervall gleichmäßig gegen ein und dieselbe Grenzfunktion, nämlich $y = \frac{x^2}{4}$, welches die einzige Lösung unserer Gleichung ist. In der Tat, setzt man

$$C_n = \tfrac{1}{4}(1 + c_n),$$

so erhält man aus der für die C_n gültigen Rekursionsformel $C_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{C_n})$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1 - \sqrt{1 + c_n}}{c_n}.$$

Der Betrag der rechten Seite ist aber für $|c_n| < 1$ immer kleiner als 1. Daher ist $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = 0$ und $\lim\limits_{n \to \infty} C_n = \frac{1}{4}$, w. z. b. w.

Beispiel 10. Wir wollen die durch den Anfangspunkt gehende Lösung der RICCATIschen Gleichung $y' = x - y^2$ bestimmen. Als Ausgangsfunktion nehmen wir die Unterfunktion $u_0 = 0$. Dann erhält man nach PICARD

$$u_1 = \frac{1}{2}x^2, \quad u_2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20}, \quad u_3 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} - \frac{x^{11}}{4400}, \quad \text{usw.}$$

Die u_n mit geradem Index sind Unterfunktionen, die mit ungeradem Index Oberfunktionen. Zur Bestimmung des Konvergenzintervalls untersuchen wir zunächst die Differenz $u_2 - u_0$. Aus

$$u_2 - u_0 = \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^3}{10}\right)$$

schließt man, daß diese Differenz im Intervall $0 \leqq x \leqq \sqrt[3]{10}$ fast überall positiv ist. In diesem Intervall konvergiert somit jede der beiden Teilfolgen gleichmäßig. Da die rechte Seite unserer Gleichung überdies einer Lipschitz-Bedingung genügt, gehen beide Teilfolgen gegen dieselbe Grenzfunktion, welche die Lösung unserer Gleichung ist.

Ein größeres Konvergenzintervall erhält man mit der nächsten Differenz

$$u_1 - u_3 = \frac{x^5}{20}\left(1 - \frac{x^3}{8} + \frac{x^6}{220}\right).$$

Da sie für $x > 0$ ihr Vorzeichen nicht wechselt, geht die Folge der u_n in jedem Intervall $0 \leqq x \leqq a$ mit endlichem a gleichmäßig gegen die Lösung unserer Gleichung. Daran erkennt man wieder, inwiefern beim Picardschen Verfahren die Länge des Konvergenzintervalls von der Güte abhängt, mit welcher die Ausgangsfunktion die Lösung annähert.

(Eingegangen am 4. Januar 1942.)

Differentialgeometrie des isotropen Raumes. III.

Flächentheorie.

Von

Karl Strubecker in Straßburg.

Einleitung.

Gestützt auf die Theorie der Kurven des isotropen Raumes, welche ich in der ersten Arbeit dieser Reihe[1]) in ihren Grundzügen entwickelt habe, werden hier die Elemente der isotropen Flächentheorie dargelegt. Die Arbeit ist als Grundlage für eine Reihe weiterer Untersuchungen gedacht und bringt daher vorerst nur wenige der möglichen Anwendungen ihrer Ergebnisse. Über eine erste solche Anwendung, nämlich über die Geometrie der Flächen fester Relativkrümmung K des isotropen Raumes, d. h. über die so oft studierten Integralflächen der Monge-Ampèreschen Gleichung

$$(*) \qquad K = rt - s^2 = \text{const.} \neq 0$$

habe ich vor kurzem berichtet[2]).

Um jedoch die vorliegende Arbeit für sich lesbar zu gestalten, habe ich an ihren Anfang eine knappe Zusammenstellung einiger Hauptpunkte der Geometrie, insbesondere der Metrik und Kinematik und der Kurventheorie des isotropen Raumes gesetzt.

Die Geometrie des isotropen Raumes läßt sich als ein Ausschnitt der euklidischen vierdimensionalen Raumgeometrie auffassen. Ihr Schauplatz ist dort ein Tangentialraum der absoluten Fläche zweiter Ordnung, und ihr eigenes absolutes Gebilde daher ein schneidendes Geradenpaar der Fernebene $t = 0$ des Raumes (x, y, z), das wir aus Realitätsgründen gerne in der Form

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

annehmen, so daß das isotrope Bogenelement ds die Gestalt

$$(**) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2$$

annimmt.

---

[1]) K. Strubecker, Differentialgeometrie des isotropen Raumes I. Theorie der Raumkurven. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa, 150 (1941), S. 1–53.

[2]) K. Strubecker, Differentialgeometrie des isotropen Raumes II. Die Flächen konstanter Relativkrümmung $K = rt - s^2$. Math. Zeitschr. 47 (1942), S. 743–777.

Über die Eigenarten der Geometrie des isotropen Raumes habe ich nun schon bei verschiedenen Gelegenheiten mitgeteilt[3]). Ein besonderes Kennzeichen dieser Geometrie ist es, daß viele ihrer gebräuchlichen algebraischen und differentiellen Invarianten, wie z. B. Längen, Winkel, Krümmungen. Krümmungsmaß usw., gelegentlich oder stets durch identisches Verschwinden versagen können. Es zeigt sich aber, daß in allen diesen Fällen geeignete Ersatzinvarianten zur Verfügung stehen, mit deren Hilfe sich die isotrope Raumgeometrie dann weiterentwickeln läßt.

So folgt z. B. aus der Form (**) des isotropen Bogenelementes, daß das Gausssche Krümmungsmaß K_a der Flächen des isotropen Raumes identisch verschwindet. Dafür gibt es eine gewisse Ersatzinvariante, nämlich die sogenannte Relativkrümmung K der Fläche

$$(***) \qquad K = \frac{1}{R_1 R_2},$$

die eine Reihe gewohnter und wichtiger Eigenschaften und Funktionen der versagenden Gaussschen Krümmung übernimmt.

Die Geometrie des isotropen Raumes ist (wie die elliptische und quasielliptische Geometrie, mit denen sie überdies in enger Berührung steht) hinsichtlich Lage und Maß in sich dual, und könnte daher auch formal in völlig selbstdualer Weise entwickelt werden. Das ist hier nicht vollends geschehen, teils aus Raumgründen, teils aus Gründen der Terminologie, die ja nicht nur unter dem Einflusse dieser Dualität sich verdoppeln würde, die vielmehr wegen der erwähnten natürlichen Verdoppelung der isotropen Invarianten sich in ihrem Umfange vervierfachen müßte, wollte man sie konsequent ausbauen. Einige wichtige und interessante Punkte dieser Dualität sind aber doch zur Sprache gekommen. Ich erwähne hier die Dualisierung der Kurventheorie, die bis zur Berechnung der sogenannten Biegung der Zylinder getrieben wurde, ferner die Herleitung der isotropen Gegenstücke der zu den Sätzen von Euler und Meusnier dualen Theoreme von Blaschke und Mannheim.

Stärker als sonst üblich mußte der Abschnitt über die isotropen Krümmungslinien der Flächen ausfallen. Hier galt es vor allem auch die Beziehungen zur relativen Differentialgeometrie von E. Müller herzustellen und auf mannigfache Zusammenhänge mit vorhandener Literatur

---

[3]) K. Strubecker, a) Beiträge zur Geometrie des isotropen Raumes. Journ. f. reine u. angew. Math. **178** (1938), S. 135—173. — b) Die Geometrie des isotropen Raumes und einige ihrer Anwendungen. Jahresber. Deutsch. Math.-Vereinigung **48** (1938), S. 236—257. — c) Über die Eulersche Transformation. Comptes rendus instit. sci. de Roumanie **3** (1939), S. 150—155. — Vgl. ferner die Arbeiten I[1]) und II[2]) dieser Reihe. — Über den Gegenstand der vorliegenden Arbeit habe ich im März 1941 auch in *Hamburg* und *Wien* vorgetragen.

einzugehen. In der Tat sind die Kurven, denen in meiner Auffassung die Rolle der isotropen Krümmungslinien zukommt, von verschiedenen Autoren, wie A. Ribaucour, J. Eiesland, É. Turrière, E. Müller, und unter den verschiedensten (nichtisotropen) Gesichtspunkten studiert worden.

Die Ableitungsgleichungen der isotropen Flächentheorie weisen zum Teil, nämlich im Hinblick auf das Theorema egregium und die Codazzi-Mainardischen Gleichungen die vom euklidischen Falle her bekannte formale Struktur auf. Diese Ähnlichkeit entfällt jedoch vollkommen bei den nach Weingarten bezeichneten Gleichungen. Das hängt mit dem Umstande zusammen, daß im isotropen Raume alle Flächennormalen untereinander parallel, nämlich vollisotrop, d. h. z-parallel sind. Das zwingt, zur Festlegung der Stellung einer Tangentialebene zu Bivektoren zu greifen.

Ein Kapitel über sphärische Abbildung leitet über zu einem wieder durch seine großen Abweichungen vom gewohnten euklidischen Falle interessanten Abschnitt über die Minimalflächen des isotropen Raumes. Hier muß man, um diese Flächen überhaupt durch ein sinnvolles Variationsproblem definieren und sie mit den Flächen verschwindender isotroper mittlerer Krümmung

$$(\dagger) \qquad H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\,\Delta z = \frac{1}{2}\,(r + t)$$

identifizieren zu können, zu Minkowskis Begriff der Relativoberfläche (hinsichtlich einer isotropen Kugel als Eichfläche) greifen. *Dabei ist es bemerkenswert, daß diese etwa durch die Formel*

$$(\dagger\dagger) \qquad O^* = \tfrac{1}{2}\iint_{\mathfrak{B}} \nabla z\, dx\, dy = \tfrac{1}{2}\iint_{\mathfrak{B}} (p^2 + q^2)\, dx\, dy$$

erklärbare Relativoberfläche O^* eines Flächenstückes $\mathfrak{B}$ zwar an sich nicht invariant ist (gegenüber Bewegungen des isotropen Raumes), daß aber wohl den Extremalen des zugehörigen Variationsproblems, d. i. den isotropen Minimalflächen, invarianter Charakter zukommt.

Als isotrope Minimalflächen ergeben sich Flächen einer Klasse, die schon oft wegen ihrer funktionentheoretischen Bedeutung Interesse erregt hat. In der Tat handelt es sich nach (†) um die Integralflächen $z = z(x, y)$ der Laplaceschen Gleichung

$$(\dagger\dagger\dagger) \qquad \Delta z(x, y) = 0,$$

die, wie man aus der Funktionentheorie weiß, als Extremalen des Dirichletschen Integrals (††) auftreten. Auch für diese wohl erstmalig vom Standpunkte der (euklidischen) Differentialgeometrie durch U. Dini, und später vollkommener durch K. Kommerell behandelten „Potentialflächen" steht in der Differentialgeometrie des isotropen Raumes ein neues adäquates

Forschungsmittel bereit, das jedoch systematisch erst in einer Fortsetzung dieser Arbeit angewandt werden soll. Hier mußte ich mich damit begnügen, in allgemeiner Darstellung die isotropen Minimalflächen als Extremalen des Variationsproblems der Relativoberfläche einzuführen und die Notwendigkeit des Verschwindens ihrer mittleren Krümmung abzuleiten. Ihre allgemeine geometrische Theorie, vor allem der Begriff der assoziierten und adjungierten Minimalflächen, die Möglichkeit, sie im isotropen Sinne in einem wohldefinierten und nichttrivialen Sinne aufeinander abzuwickeln, und Ähnliches konnte hier vorerst nur angedeutet werden. Als ein interessantes Beispiel, das die volle Analogie aufzeigen sollte, die mit der euklidischen, so wohl entwickelten Theorie der Minimalflächen besteht, habe ich das isotrope Gegenstück der Enneperschen Minimalflächen und die Schar ihrer Assoziierten als Abschluß der Arbeit in Kürze vorgeführt.

Inhaltsübersicht.

I. Die Geometrie des isotropen Raumes 372
II. Kurventheorie des isotropen Raumes 377
III. Geometrie der Streifen des isotropen Raumes 382
IV. Elemente der Flächentheorie des isotropen Raumes 391
V. Isotrope Krümmungslinien 400
VI. Die Ableitungsgleichungen der isotropen Flächentheorie 408
VII. Sphärische Abbildung und Richtungsbild 414
VIII. Die Relativoberfläche. Die isotropen Minimalflächen als ihre Extremalen. Assoziierte Minimalflächen. Die isotrope Enneper-Fläche 417

I. Die Geometrie des isotropen Raumes [1]).

1. Das absolute Gebilde. Ein Raum (x, y, z) soll isotrop heißen, wenn seine Metrik von einem schneidenden Geradenpaare seiner Fernebene ω

$$\omega \ldots t = 0 \tag{1, 1}$$

reguliert wird. Wir bezeichnen die Fernebene ω als absolute Ebene des isotropen Raumes und wählen als absolutes Geradenpaar die beiden konjugiert-komplexen Ferngeraden (i_1, i_2)

$$\left.\begin{aligned} x + iy &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned}\right| i_1, \qquad \left.\begin{aligned} x - iy &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned}\right| i_2. \tag{1, 2}$$

Ihr Schnittpunkt U ist der Fernpunkt der z-Achse. Wir nennen ihn den absoluten Punkt des isotropen Raumes.

Wegen der selbstdualen Struktur des absoluten Gebildes ist *die Geometrie des isotropen Raumes nach Lage und Maß völlig in sich dual.*

2. Die isotropen Bewegungen. Das absolute Geradenpaar (2) gestattet eine stetige achtgliedrige Gruppe G_8 räumlich-kollinearer Automorphien, die wir als die Ähnlichkeiten des isotropen Raumes bezeichnen. Sie lauten

$$\left.\begin{aligned} x' &= a + h_1 x - h_2 y \quad . \\ y' &= b + h_2 x + h_1 y \quad . \\ z' &= c + c_1 x + c_2 y + c_3 z \end{aligned}\right\} \dots G_8. \tag{1, 3}$$

Darin ist eine ausgezeichnete Untergruppe G_6 enthalten, deren Transformationen wir als Bewegungen des isotropen Raumes (oder kurz als isotrope Bewegungen) erklären wollen. Ihre Darstellung ist:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a + \cos\varphi \cdot x - \sin\varphi \cdot y \quad . \\ y' &= b + \sin\varphi \cdot x + \cos\varphi \cdot y \quad . \\ z' &= c + c_1 x \qquad + c_2 y \qquad + z \end{aligned}\right\} \cdots G_6. \tag{1, 4}$$

Bezeichnen wir die Normalrisse der Raumfiguren auf die (x, y)-Ebene als ihre „Grundrisse", so gilt der Satz:

Die isotropen Bewegungen äußern sich im Grundrisse als gewöhnliche ebene euklidische Bewegungen[4]).

3. Abstand zweier Punkte und Winkel zweier Ebenen. Man kann im Sinne F. Kleins die Geometrie des isotropen Raumes als die Invariantentheorie seiner Bewegungsgruppe $G_6(4)$ erklären. Dabei ergeben sich die folgenden metrischen Grundinvarianten:

Die *Entfernung d zweier Punkte* $P_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$ ist definiert durch die Formel

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \tag{1, 5}$$

der eine duale Formel für den *Winkel* ϑ *zweier Ebenen* π_α gegenübersteht. Sind nämlich

$$\pi_\alpha \dots z = u_\alpha x + v_\alpha y + w_\alpha \tag{1, 6}$$

die Gleichungen der Ebenen, so ist für den Winkel ϑ

$$\vartheta^2 = (u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2. \tag{1, 7}$$

Dabei waren die beiden Punkte P_α als eigentliche vorausgesetzt und (dual) die beiden Ebenen $\pi_\alpha(6)$ als nicht-isotrop, d. h. als nicht z-parallel angenommen.

---

[4]) Allgemeiner kann man die sich aus (3) für $h_1 = \cos\varphi$, $h_2 = \sin\varphi$ ergebenden Transformationen als Bewegungen des isotropen Raumes auffassen. Auch für sie gilt unser Satz; im Gegensatze zu den Bewegungen (4) aber sind die Rauminhalte gegen diese allgemeineren „modularen Bewegungen" nicht invariant.

4. Ersatzinvarianten. *Diese Invarianten d und ϑ können verschwinden, ohne daß die beiden Punkte oder Ebenen identisch wären, nämlich dann, wenn die Punkte und Ebenen parallel sind*, d. h. wenn für ihre Koordinaten

(1, 8) $$x_1 = x_2 \quad \text{und} \quad y_1 = y_2$$

bzw. dual

(1, 9) $$u_1 = u_2 \quad \text{und} \quad v_1 = v_2$$

gilt. Die Grundrisse der Punkte decken sich dann, und die Ebenen sind im gewöhnlichen Sinne parallel.

In diesen Fällen gibt es als Ersatz andere (rationale) Invarianten, nämlich für die parallelen Punkte (8) ihre Spanne

(1, 10) $$l = z_2 - z_1,$$

und für die parallelen Ebenen (9) ihre Distanz

(1, 11) $$\lambda = w_2 - w_1.$$

5. Winkel zweier Geraden. Nach (5) *kann man den isotropen Abstand zweier Punkte aus ihrem Grundrisse in euklidischer Weise ablesen. Das gleiche gilt auch für den Winkel φ zweier Vektoren.*

Wenn also die Grundrisse der Vektoren

(1, 12) $$\mathfrak{x}_a = (x_a, y_a, z_a),$$

die wir uns im Sinne von (5) als Einheitsvektoren denken, lauten

(1, 13) $$\bar{\mathfrak{x}}_a = (x_a, y_a),$$

so gilt für ihren Winkel φ:

(1, 14) $$\begin{aligned} \cos\varphi &= (\bar{\mathfrak{x}}_1 \bar{\mathfrak{x}}_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2, \\ \sin\varphi &= [\bar{\mathfrak{x}}_1 \bar{\mathfrak{x}}_2] = x_1 y_2 - x_2 y_1. \end{aligned}$$

6. Neigung zweier Geraden. Auch diese Invariante φ kann verschwinden, ohne daß die beiden Vektoren identisch wären, nämlich dann, wenn die Grundrißvektoren $\bar{\mathfrak{x}}_a$ (13) zusammenfallen und die Vektoren $\mathfrak{x}_a$ (12) selbst eine isotrope, d. i. z-parallele Ebene aufspannen. Auch in diesem Falle gibt es wieder eine *Ersatzinvariante*, nämlich die *Neigung* oder *Sperrung* ψ der beiden Vektoren, definiert durch

(1, 15) $$\psi = z_2 - z_1.$$

7. Die vollisotrope Richtung. Nach (14) sind die nach dem absoluten Punkte U des isotropen Raumes zielenden vollisotropen Vektoren

(1, 16) $$\mathfrak{l} = (0, 0, 1)$$

zu allen anderen Vektoren und damit auch zu allen Ebenen normal.

Es werden also im isotropen Raume die zu den Schmiegebenen einer Kurve normalen Binormalen und ebenso die zu den Tangentialebenen einer Fläche normalen Flächennormalen sämtlich zueinander parallel, nämlich vollisotrop sein.

8. Neigung einer Geraden gegen eine Ebene. Die isotropen Invarianten aller anderen Elementenpaare können aus den bisher erklärten unschwer abgeleitet werden.

Eine (nicht isotrope) Ebene π und eine sie schneidende (nicht vollisotrope) Gerade g z. B. bestimmen eine Bewegungsinvariante, ihre Neigung. Legt man nämlich durch die Gerade g die isotrope Ebene γ, so schneidet sie die Ebene π nach einer zweiten Geraden p. Die nach (15) erklärte Neigung von g und p ist die gesuchte Neigung der Geraden g gegen die Ebene π.

Dual hierzu wäre der Abstand eines (eigentlichen) Punktes P von einer Geraden g. Er äußert sich als euklidischer Abstand der Grundrisse dieser beiden Figuren.

In beiden Fällen sind wieder Grenzlagen möglich, die auf einfache Ersatzinvarianten führen.

9. Die metrische Dualität als Nullsystem oder Polarität. Durch das Nullsystem $\mathfrak{N}$

(1, 17) $$z - Z = Xy - Yx$$

des Gewindes $\mathfrak{G}$

(1, 18) $$dz = x\,dy - y\,dx$$

(und die dazu im Sinne der isotropen Raumgeometrie kongruenten Nullsysteme) werden die metrischen Größen dual gepaart. Der Winkel zweier Ebenen ist also gleich dem Abstande ihrer Nullpunkte usw. Damit können einfache geometrische Deutungen der isotropen Metrik gewonnen werden.

Gleiches gilt, wenn man vom Vorzeichen bei der Spanne paralleler Punkte, Ebenen usw. absieht, für die Polaritäten der beiden Drehparaboloide

(1, 19) $$z = \pm \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

und ihrer Kongruenten, die wir als die Einheitskugeln des isotropen Raumes bezeichnen können.

10. Isotrope Kugeln, Kreise und Drehkegel. Allgemein werden wir nämlich als isotrope Kugeln die regulären Flächen zweiter Ordnung durch das absolute Geradenpaar (2) erklären, also die Drehparaboloide mit vollisotroper Durchmesserrichtung der Form

(1, 20) $$z = \frac{A}{2}(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D.$$

Ihre ebenen Schnitte liefern die Kreise des isotropen Raumes. Es sind das für nicht-isotrope Schnittebenen Ellipsen mit kreisförmigen Grund-

rissen, für isotrope Schnittebenen aber Parabeln mit vollisotroper Durchmesserrichtung, sogenannte parabolische Kreise.

Dual dazu sind die Tangentenkegel der isotropen Kugeln im isotropen Raume als Drehkegel aufzufassen. Wie die Kreise gestatten sie eine eingliedrige isotrope Drehungsgruppe um eine vollisotrope Achse. Sie tragen eine einzige Schar von isotropen Kreisen. Diese liegen in parallelen Ebenen. Darunter kommt auch der Berührungskreis mit der Kugel vor. Ihre Erzeugenden sind gegen diese Ebenen gleich-geneigt. Die Fernebene insbesondere schneidet die Drehkegel nach sogenannten Fernkreisen, d. h. nach Kegelschnitten, welche die beiden absoluten Geraden (2) berühren. Die Berührungssehne soll als Achse des Fernkreises bezeichnet werden.

11. Die Geometrie der nichtisotropen Ebenen. Die in einer beliebigen nicht-isotropen Ebene durch die isotrope Bewegungsgruppe G_6 (4) induzierte Geometrie fällt mit jener parabolischen Geometrie zusammen, welche sich auf die beiden konjugiert komplexen Schnittpunkte der Ebene mit dem Paare der absoluten Geraden (2) stützt. Sie ist im Grundrisse mit der gewöhnlichen euklidischen Geometrie identisch.

Die Differentialgeometrie einer ebenen Kurve wird also, falls die Kurvenebene nicht-isotrop ist, identisch sein mit der gewöhnlichen euklidischen Differentialgeometrie des Kurvengrundrisses. Ihre Invarianten, wie die Bogenlänge s oder die Krümmung $\varkappa$ der Kurve können direkt ihrem Grundrisse entnommen werden.

12. Die Geometrie der isotropen Ebenen[5]**).** Von ganz neuartigem Charakter ist aber jene Geometrie, welche durch unsere Bewegungsgruppe G_6 (4) in einer isotropen Ebene hervorgerufen wird. Wegen der Bewegungsinvarianz der Begriffe genügt es, nur die isotrope Ebene

$$y = 0 \tag{1, 21}$$

zu studieren. In ihr wird durch G_6 eine dreigliedrige Gruppe G_3 von sogenannten Grenzbewegungen induziert, der Darstellung:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a + x \\ z' &= c + c_1 x + z \end{aligned}\right\} \cdots G_3. \tag{1, 22}$$

Ihre metrischen Grundinvarianten, nämlich den (im Grundrisse ablesbaren) Abstand zweier Punkte und die Neigung zweier Geraden kennen wir schon aus den Nrn. 3 und 6. Das invariante Bogenelement der isotropen Ebene (21) ist

$$ds = dx. \tag{1, 23}$$

---

[5]) Vgl. H. Beck, Zur Geometrie der Minimalebene. Sitz.-Ber. Berlin. Math. Ges. **12** (1912), S. 14—30.

13. Abweichung und Normalkrümmung. *Die Krümmung $\varkappa$ einer Kurve*

$$z = f(x) \tag{1, 24}$$

der isotropen Ebene (21) *verschwindet* wegen ihres geradlinigen Grundrisses. Als Ersatz tritt an ihre Stelle die sogenannte *Abweichung* $\varkappa^*$ der Kurve, nämlich der Quotient aus Kontingenzsperrung der Tangenten und Bogenelement, d. i. der Ausdruck

$$\varkappa^* = \lim_{dx \to 0} \frac{f'(x+dx) - f'(x)}{dx} = f''(x). \tag{1, 25}$$

Durch Vorgabe dieser Krümmungsinvariante als Funktion des Bogens

$$\varkappa^* = \varkappa^*(s) \tag{1, 26}$$

ist die Kurve der isotropen Ebene bis auf ihre Lage, d. i. bis auf Grenzbewegungen aus G_3 (22) *bestimmt.*

Insbesondere sind die Kurven fester Abweichung die parabolischen Kreise. Sie gestatten, ähnlich den gewöhnlichen Kreisen, eine eingliedrige Gruppe von Bewegungen aus G_3 in sich.

Aus Gründen der Permanenz der euklidischen Terminologie werden wir insbesondere in der Flächentheorie die Abweichung einer Kurve der isotropen Ebene gerne auch als ihre Normalkrümmung und ihren Reziprokwert

$$R = \frac{1}{\varkappa^*} \tag{1, 27}$$

als den Radius der Normalkrümmung bezeichnen.

Man hat dann z. B. die folgende einfache geometrische Deutung: Der Radius R der Normalkrümmung der Kurve (24) *in einer isotropen Ebene ist gleich dem (elementaren, aber auch gegen die isotropen Bewegungen aus G_3 invarianten) Parameter des parabolischen Kreises, welcher die Kurve* (24) *an der betrachteten Stelle oskuliert.*

II. Kurventheorie des isotropen Raumes[1]).

14. Bogenelement. Nach (1, 5) ist das invariante Bogenelement ds des isotropen Raumes bestimmt durch die quadratische Differentialform des Ranges zwei

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \tag{2, 1}$$

Man kann also die Länge einer Raum- oder Flächenkurve direkt aus dem Grundriß ablesen.

15. Krümmung und Windung. Es sei nun

$$\mathfrak{x}(s) = \{x(s), y(s), z(s)\} \tag{2, 2}$$

eine bereits laut (1) auf ihren Bogen s bezogene Raumkurve und

$$\bar{\mathfrak{x}}(s) = \{x(s), y(s)\} \tag{2, 3}$$

ihr „Grundrißvektor".

Die Raumkurve hat dann hinsichtlich der Bewegungsgruppe G_6 des isotropen Raumes zwei Differentialinvarianten niedrigster Ordnung, nämlich ihre Krümmung $\varkappa$, die man durch eine Verabredung sogar rational ausdrücken kann durch

$$\varkappa = [\bar{\mathfrak{x}}'\,\bar{\mathfrak{x}}''] = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \tag{2 4}$$

und *die man direkt aus dem Grundrisse der Kurve (als dessen gewöhnliche Krümmung) ablesen kann*, und weiter ihre Windung oder Torsion τ, defmiert durch

$$\tau = \frac{[\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}''\,\mathfrak{x}''']}{[\bar{\mathfrak{x}}'\,\bar{\mathfrak{x}}'']^2} = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}. \tag{2, 5}$$

16. Begleitendes Dreibein. Frenetsche Formeln. Man kann mit der Raumkurve (2) invariant gegen isotrope Bewegungen ein begleitendes Dreibein verbinden, bestehend aus

1) dem Tangentenvektor $\mathfrak{t}$

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{x}'(s), \tag{2, 6}$$

der (im Sinne der isotropen Metrik) ein Einheitsvektor ist,

2) dem dazu normalen und in der Schmiegebene enthaltenen Hauptnormalenvektor $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{\varkappa}\,\mathfrak{x}''(s), \tag{2 7}$$

der gleichfalls ein Einheitsvektor ist, und

3) dem zu diesen beiden Vektoren normalen Binormalenvektor $\mathfrak{b}$

$$\mathfrak{b} = (0, 0, 1), \tag{2, 8}$$

der vollisotrop und von der Spanne Eins ist.

Für sie gilt als Analogon der Frenetschen Formeln das folgende System von Ableitungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{t}' &= \quad . \quad \varkappa\mathfrak{h} \quad . \\ \mathfrak{h}' &= -\varkappa\mathfrak{t} \quad . \quad +\tau\mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}' &= \quad . \quad 0 \quad . \end{aligned}\right\}. \tag{2, 9}$$

17. Kurven in isotropen Ebenen. Das begleitende Dreibein fehlt an solchen Stellen der Kurve, wo $\varkappa = 0$ ist. Wegen der Orthogonalität von $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ ist dies reell nur dadurch möglich, daß der Vektor $\mathfrak{x}''$, der Hauptnormalenrichtung hat, vollisotrop ist, d. h.

$$\mathfrak{x}'' = z''\mathfrak{b} \tag{2, 10}$$

ist. Liegt dann kein Wendepunkt vor, d. h. ist $z'' \neq 0$, so ist die Schmiegebene an dieser Stelle isotrop.

Die Gleichung

$$\varkappa(s) \equiv 0 \tag{2, 11}$$

kennzeichnet danach die Kurven in isotropen Ebenen, deren Krümmungsinvariante nach Nr. 13 und (1, 25) die Größe

$$\varkappa^*(s) = z''(s) \tag{2, 12}$$

ist, welche als Abweichung oder Normalkrümmung der Kurve bezeichnet wurde.

Kurvenstellen mit vollisotropen Tangenten sind auszuschließen. Ebenso solche (komplexe) Stellen, deren Tangente isotrop ist, d. h. isotropen Grundriß hat.

18. Natürliche Gleichungen. Die natürlichen Gleichungen

$$\varkappa = \varkappa(s), \quad \tau = \tau(s) \tag{2, 13}$$

bestimmen, falls $\varkappa(s) \neq 0$ ist, eine Raumkurve ihrer Gestalt nach, d. h. bis auf Bewegungen des isotropen Raumes. Insbesondere kennzeichnet so

$$\tau(s) \equiv 0 \tag{2, 14}$$

die Kurven in nichtisotropen Ebenen.

Ist jedoch $\varkappa(s) \equiv 0$, so liegt, wie erwähnt, die Kurve in einer isotropen Ebene, und zu ihrer Festlegung (bis auf isotrope Bewegungen) dient die neue natürliche Gleichung

$$\varkappa^* = \varkappa^*(s). \tag{2, 15}$$

19. Schraublinien und Kreise. Als einfache Beispiele erwähnen wir die Schraublinien des isotropen Raumes. Ihre Krümmung und Windung sind konstant:

$$\varkappa = \varkappa_0 \neq 0, \quad \tau = \tau_0 \neq 0; \tag{2, 16}$$

ihre Grundrisse sind Kreise der Krümmung $\varkappa_0$.

Für $\tau_0 = 0$ entstehen daraus die Kreise in nicht-isotropen Ebenen, das sind Ellipsen mit kreisförmigem Grundrisse.

Für die in isotropen Ebenen enthaltenen parabolischen Kreise ist

$$\varkappa = 0, \quad \varkappa^* = \varkappa_0^* = \text{const.} \neq 0. \tag{2, 17}$$

Wie schon in Nr. 13 erwähnt wurde, ist der Normalkrümmungsradius R eines parabolischen Kreises gleich seinem elementargeometrischen Parameter p, d. h.

$$R = \frac{1}{\varkappa^*} = p. \tag{2, 18}$$

Für

$$\varkappa = 0, \quad \varkappa_0^* = 0 \tag{2, 19}$$

ergeben sich schließlich die (weder isotropen noch vollisotropen) Geraden.

20. Die isotrope Geometrie der Ebenenscharen. Wir beenden diese Zusammenstellung mit der Bemerkung, daß sich der Theorie der Raumkurven vermöge der metrischen Dualität des isotropen Raumes eine formal völlig gleichartige Theorie der Ebenenscharen (Torsen) an die Seite stellen läßt.

Sind nämlich die Koordinaten (u, v, w) einer Ebene

$$z = ux + vy + w \tag{2, 20}$$

Funktionen eines willkürlichen Parameters t

$$\left.\begin{aligned} u &= u(t), \\ v &= v(t), \\ w &= w(t), \end{aligned}\right\} \cdots \mathfrak{U} = \mathfrak{U}(t), \tag{2, 21}$$

so läßt sich (dual zum Bogen einer Raumkurve) dieser Ebenenschar (Torse) im isotropen Raume ein *invarianter (natürlicher) Parameter* ϑ zuordnen, den man als ihren *konischen Winkel* bezeichnen könnte. Nach Formel (1, 7) hat man für ihn mit einer zur früheren analogen Bezeichnung:

$$d\vartheta^2 = du^2 + dv^2 = (\dot{u}^2 + \dot{v}^2)\, dt^2 = \dot{\bar{\mathfrak{U}}}^2(t)\, dt^2. \tag{2, 22}$$

Dual zur Krümmung und Torsion der Raumkurve besitzt auch die Ebenenschar $\mathfrak{U}(\vartheta)$, die wir uns auf den natürlichen Parameter ϑ bezogen denken, *zwei elementare Differentialinvarianten zweiter und dritter Ordnung*, nämlich

$$\left.\begin{aligned} K &= [\bar{\mathfrak{U}}', \bar{\mathfrak{U}}''] = \begin{vmatrix} u' & v' \\ u'' & v'' \end{vmatrix}, \\ T &= \frac{[\mathfrak{U}', \mathfrak{U}'', \mathfrak{U}''']}{[\bar{\mathfrak{U}}', \bar{\mathfrak{U}}'']^2}. \end{aligned}\right. \tag{2, 23}$$

Diese Größen hängen natürlich in einfacher Weise mit Bogen s, Krümmung $\varkappa$ und Torsion τ der Gratlinie $\mathfrak{x}(s)$ der Ebenenschar zusammen. Man hat:

$$\left.\begin{aligned} d\vartheta &= \tau\, ds, \\ K &= \frac{\varkappa}{\tau}, \qquad T = \frac{1}{\tau}. \end{aligned}\right. \tag{2, 24}$$

K ist also, mit einer von J. Plücker stammenden Bezeichnung, die sogenannte *konische Krümmung* der Torse.

21. Die Biegung zylindrischer Ebenenscharen. Wie die Krümmung $\varkappa$ einer Raumkurve, *kann auch diese konische Krümmung K durch identisches Verschwinden als Invariante versagen.* Die Ebenen der Schar umhüllen dann einen Zylinder, dessen Erzeugendenrichtung nicht-vollisotrop (im komplexen auch nicht isotrop) ist. Es gibt in diesem Falle (der dual ist zu den Kurven in isotropen Ebenen) wieder eine einfache *Ersatzinvariante*, nämlich die Größe

$$K^* = \frac{d^2 w(\vartheta)}{d\vartheta^2} = w''(\vartheta). \tag{2,25}$$

Wir bezeichnen diese (zur Abweichung $\varkappa^*$ oder Normalkrümmung $\frac{1}{R}$ duale) Invariante als die *„Biegung" des Zylinders* und nennen ihren Kehrwert

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{K^*} \tag{2,26}$$

seinen *„Biegungsradius"*.

Als einfache Anwendung bestimmen wir *die Biegung der (parabolischen) Zylinder, die sich der isotropen Kugel*

$$z = \frac{1}{2p}(x^2 + y^2) \tag{2,27}$$

vom Parameter p umschreiben lassen.

Wegen der isotropen Beweglichkeit der Kugel in sich ist diese Biegung für alle umschriebenen Zylinder vom gleichen konstanten Wert. Es genügt daher, einen einzigen Zylinder zu nehmen.

Zunächst ist

$$p(u^2 + v^2) + 2w = 0 \tag{2,28}$$

die Ebenengleichung der Kugel (27). Zusammen mit $v = 0$, der Ebenengleichung des Fernpunktes der y-Achse, gibt sie den in y-Richtung umschriebenen Zylinder. Dessen Parameterdarstellung kann also lauten:

$$\mathfrak{U}(t) \ldots u = t, \qquad v = 0, \qquad w = -\frac{p}{2}t^2. \tag{2,29}$$

Für ihn erhalten wir aus Formel (22) zunächst den natürlichen Parameter ϑ. Man findet einfach

$$\vartheta = t. \tag{2,30}$$

Daher liefert (25) für die Biegung den festen Wert

$$K^* = \frac{1}{\mathfrak{R}} = -p. \tag{2,31}$$

Also gilt der Satz:

Die Biegungen $K^* = \frac{1}{\mathfrak{R}}$ aller einer isotropen Kugel vom Parameter p umschriebenen Zylinder sind konstant, nämlich gleich dem negativen Parameter.

III. Geometrie der Streifen des isotropen Raumes.

22. Die Streifennormale. Die auf ihren Bogen s bezogene Raumkurve

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s) = \{x(s),\ y(s),\ z(s)\} \tag{3, 1}$$

und eine sie begleitende nicht isotrope Berührungsebene π bestimmen einen *Streifen* des isotropen Raumes. Wir denken uns die *Streifenebene* π aufgespannt durch den (nichtisotropen) Tangentenvektor $\mathfrak{t}$ der Raumkurve

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{x}'(s), \tag{3, 2}$$

der ein Einheitsvektor ist:

$$\bar{\mathfrak{t}}^2 = 1, \tag{3, 3}$$

und durch einen dazu normalen Einheitsvektor

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(s) = \{\xi(s),\ \eta(s),\ \zeta(s)\},\quad \bar{\mathfrak{y}}^2 = 1, \tag{3, 4}$$

der gleichfalls nicht isotrop (also auch nicht vollisotrop) ist. Wir bezeichnen $\mathfrak{y}$ als den *Normalvektor des Streifens*; und nehmen an, daß sein Grundriß $\bar{\mathfrak{y}}$ aus dem Grundrisse $\bar{\mathfrak{t}}$ des Tangentenvektors $\mathfrak{t}$ durch positive Vierteldrehung hervorgehe. Seine Trägerin heißt auch Streifennormale.

23. Natürliche Gleichungen. Wenn dann die *Schmiegebene σ der Raumkurve nicht isotrop* ist, d. h. ihre Krümmung

$$\boxed{\varkappa \neq 0} \tag{3, 5}$$

ist und *die Raumkurve* (1) *also auch keiner isotropen Ebene angehört*, wird auch ihre Hauptnormale

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{\varkappa}\,\mathfrak{x}'' \tag{3, 6}$$

nicht vollisotrop sein und sich im Grundriß mit der Streifennormalen $\mathfrak{y}$ decken. Die Vektortripel $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{b}$ sind dann linear unabhängig und es ist

$$[\mathfrak{t}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}] = [\mathfrak{t}, \mathfrak{y}, \mathfrak{b}] = +1. \tag{3, 7}$$

Die Vektoren $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{y}$ unterscheiden sich dabei nur um einen vollisotropen Vektor, so daß etwa gilt:

$$\boxed{\mathfrak{y} = \mathfrak{h} - \vartheta(s)\cdot\mathfrak{b}}\ . \tag{3, 8}$$

Die Größe $\vartheta(s)$ ist eine isotrope Invariante des Streifens und bedeutet geometrisch den (nach Nr. 3 definierten) Winkel, unter dem die Schmiegebene σ gegen die Streifenebene π der Kurve geneigt ist.

Ist für die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ *die Krümmung* $\varkappa(s) \neq 0$, *so ist durch die Gleichungen*

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s), \quad \vartheta = \vartheta(s) \tag{3, 9}$$

der Streifen und seine Lage im isotropen Raume eindeutig bestimmt. Durch seine drei Invarianten, d. h. durch die drei natürlichen Gleichungen

$$\varkappa = \varkappa(s), \quad \tau = \tau(s), \quad \vartheta = \vartheta(s) \tag{3, 10}$$

ist der Streifen bis auf seine Lage, d. i. bis auf isotrope Bewegungen festgelegt.

24. Ableitungsgleichungen. Man kann mit dem Streifen ein bewegungsinvariantes begleitendes Dreibein verknüpfen, bestehend aus der Kurventangente $\mathfrak{t}$, der Streifennormalen $\mathfrak{y}$ und der vollisotropen Binormalen $\mathfrak{b}$. Man hat dann nach den Frenetschen Formeln (2, 9)

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}' &= \varkappa \mathfrak{y} = \varkappa(\mathfrak{y} + \vartheta \mathfrak{b}), \\ \mathfrak{y}' &= \mathfrak{y}' - \vartheta' \mathfrak{b} = -\varkappa \mathfrak{t} + (\tau - \vartheta')\mathfrak{b}, \\ \mathfrak{b}' &= \mathfrak{o}, \end{aligned}$$

und erhält insgesamt das folgende System von Ableitungsgleichungen:

$$\boxed{\begin{array}{lccc} \mathfrak{t}' = & \cdot & \varkappa \mathfrak{y} + & \varkappa \vartheta \mathfrak{b} \\ \mathfrak{y}' = & -\varkappa \mathfrak{t} & \cdot + & (\tau - \vartheta')\mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}' = & \cdot & \mathfrak{o} & \cdot \end{array}} \tag{3, 11}$$

25. Die Invarianten des Streifens. Geodätische Streifen. Die drei hier auftretenden Koeffizienten liefern ein zu (10) *äquivalentes System von Invarianten des Streifens*, nämlich seine

$$\begin{cases} \textit{Geodätische Windung}: & a = \tau - \vartheta', \\ \textit{Normalkrümmung}: & b = \varkappa \vartheta, \\ \textit{Geodätische Krümmung}: & c = \varkappa. \end{cases} \tag{3, 12}$$

Durch Angabe von

$$a = a(s), \quad b = b(s), \quad c = c(s) \tag{3, 13}$$

als neuem System natürlicher Gleichungen ist der Streifen wieder bis auf seine Lage bestimmt.

Die geodätische Krümmung c *des Streifens ist nach* (12) *gleich der isotropen Krümmung der Streifenkurve, d. h. gleich der gewöhnlichen Krümmung des Kurvengrundrisses.*

Nach (3, 5) ist die geodätische Krümmung zunächst von Null verschieden genommen. Ihr *Verschwinden* kennzeichnet die sogenannten *geodätischen Streifen*, d. h. jene, deren Streifenkurve einer *isotropen Ebene* angehört. Deren *Grundriß* ist *geradlinig*, sie selbst sind also wirklich für das Bogenelement (2, 1) des isotropen Raumes für den Streifen *geodätische Linien*.

26. Die Erzeugende der Torse des Streifens. Ist $\mathfrak{z}$ der Ortsvektor eines laufenden Punktes der Berührungsebene des Streifens, so kann ein Vektor $\mathfrak{e}$ der *Erzeugenden der Torse des Streifens* jedenfalls in der Form geschrieben werden:

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{z} - \mathfrak{x} = \alpha\,\mathfrak{t} + \beta\,\mathfrak{y}. \tag{3, 14}$$

Wir bezeichnen diese Tangente $\mathfrak{e}$ des Streifens als seine zur Kurventangente $\mathfrak{t}$ konjugierte Tangente. Sie liegt in der Tangentialebene π mit der Gleichung

$$\pi \ldots [\mathfrak{z} - \mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y}] = 0 \tag{3, 15}$$

und ist ihr Schnitt mit der Nachbarebene, so daß auch die Gleichung

$$\frac{d}{ds}[\mathfrak{z} - \mathfrak{x},\ \mathfrak{t},\ \mathfrak{y}] = 0 \tag{3, 16}$$

erfüllt ist. Die Ableitungsgleichungen (11) geben zusammen mit (8) dafür:

$$\frac{d}{ds}[\mathfrak{z} - \mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y}] = [\mathfrak{z} - \mathfrak{x}, \varkappa\,\mathfrak{b}, -\vartheta\,\mathfrak{b}] + [\mathfrak{z} - \mathfrak{x}, \mathfrak{t}, a\,\mathfrak{b}] = 0, \tag{3, 17}$$

woraus man im Verein mit (15) unter Beachtung von (14), (8) und (12) für α und β die Gleichung

$$(\alpha\, b + \beta a)\,[\mathfrak{t}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = 0$$

erhält, aus der man mittels (7) das einfache Ergebnis folgert:

$$\alpha = a, \quad \beta = -b. \tag{3, 18}$$

Damit ist die Erzeugende $\mathfrak{e}$ der Torse des Streifens, oder die zur Kurventangente $\mathfrak{t}$ konjugierte Streifentangente gegeben durch den Vektor

$$\boxed{\mathfrak{e} = a\,\mathfrak{t} - b\,\mathfrak{y}}. \tag{3, 19}$$

27. Krümmungs- und Schmiegstreifen. Aus dieser Formel kann man sofort die geometrische Bedeutung des Verschwindens der Invarianten a und b entnehmen. Es gilt:

$a \equiv 0$ ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die konjugierten Tangentenpaare $\mathfrak{t}$ (Kurventangente) und $\mathfrak{e}$ (Erzeugende des Streifens) zueinander normal sind. Der Streifen wird dann als ein Krümmungsstreifen des isotropen Raumes bezeichnet.

$b \equiv 0$ aber ist notwendig und hinreichend dafür, daß die konjugierten Tangenten $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{e}$ zusammenfallen. Der Streifen ist dann ein Schmiegstreifen.

Man beachte dabei, daß seit (5) immer $\varkappa \neq 0$ angenommen war. Der Streifen sollte also nach Nr. 23 kein geodätischer sein, d. h. seine Kurve (1) nicht einer isotropen Ebene angehören.

Man ergänzt aber aus seiner Definition leicht, daß *ein solcher geodätischer Streifen stets dann und auch nur dann ein Krümmungsstreifen ist, wenn er zylindrisch ist und seine Erzeugenden normal (d. h. im Grundriß normal) sind zu der isotropen Ebene, der seine Trägerkurve angehört.*

Ferner ist ein geodätischer Streifen ersichtlich dann und nur dann ein Schmiegstreifen, wenn er geradlinig ist.

28. Neue Darstellung der Streifeninvarianten. Aus den Ableitungsgleichungen (11) erhält man die folgenden *Darstellungen der drei Streifeninvarianten* a, b, c:

$$(3,20)\qquad \begin{cases} a = & [\mathfrak{x}', \mathfrak{y}, \mathfrak{y}'], \\ b = -& [\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{y}], \\ c = & [\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{b}]. \end{cases}$$

Wir wollen mit ihrer Hilfe die wichtigen *geometrischen Bedeutungen von a und b* angeben. Die Deutung der geodätischen Krümmung c ist uns aus Nr. 23 schon bekannt.

29. Erste Deutung der Normalkrümmung. *Um eine erste geometrische Deutung der Normalkrümmung b zu erhalten, projizieren wir die Raumkurve $\mathfrak{x}(s)$ in der Richtung der Streifennormalen $\mathfrak{y}(8)$ des Kurvenpunktes s_0 auf die $\mathfrak{x}$ in s_0 berührende isotrope Ebene γ.* Ist $\mathfrak{z}(s)$ der Ortsvektor dieser Projektion, so ist $\mathfrak{z} - \mathfrak{x}_0$ einerseits als Vektor der in $\mathfrak{x}_0$ berührenden isotropen Ebene γ darstellbar in der Form

$$(3,21)\qquad \mathfrak{z} - \mathfrak{x}_0 = A\mathfrak{t}_0 + B\mathfrak{b};$$

andererseits hat man laut Konstruktion von $\mathfrak{z} - \mathfrak{x}_0$ als Projektion von $\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0$ in Richtung von $\mathfrak{y}$

$$(3,22)\qquad \mathfrak{z} - \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 - C\mathfrak{y}_0.$$

Durch Vergleich der rechten Seiten dieser Darstellungen (21) und (22) folgt wegen (8)

$$(3,23)\qquad \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 = A\mathfrak{t}_0 + B\mathfrak{b} + C(\mathfrak{b}_0 - \vartheta_0\mathfrak{b}),$$

d. h. A, B, C sind die Koordinaten der Zerlegung des Vektors $\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0$ in Richtung der Vektoren $\mathfrak{t}_0$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_0 - \vartheta_0\mathfrak{b}$. Also ist wegen (7)

$$(3,24)\qquad \begin{cases} A = & [\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0, \mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}], \\ B = & [\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0, \mathfrak{t}_0, \mathfrak{b}_0 - \vartheta_0\mathfrak{b}], \\ C = -& [\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0, \mathfrak{t}_0, \mathfrak{b}]. \end{cases}$$

Die gesuchte Projektion $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{x}$ auf die berührende isotrope Ebene γ lautet daher nach (21) oder (22)

$$(3,25)\qquad \mathfrak{z} = \mathfrak{x}_0 + [\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0, \mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}]\,\mathfrak{t}_0 + [\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0, \mathfrak{t}_0, \mathfrak{b}_0 - \vartheta_0\mathfrak{b}]\,\mathfrak{b}.$$

Von dieser Kurve $\mathfrak{z}(s)$ der isotropen Ebene γ wollen wir nun an der Stelle s_0 die Abweichung $\varkappa_0^*$ oder Normalkrümmung $\frac{1}{R}$ berechnen. Es ist nach (1, 26) und (1, 27) wegen der Gleichheit der Bogenelemente ds und $d\sigma$ der Kurven $\mathfrak{x}(s)$ und $\mathfrak{z}(s)$ an der Berührungsstelle s_0

$$\varkappa_0^* = \frac{1}{R} = Z''(s_0), \tag{3, 26}$$

wenn $X(s)$, $Y(s)$, $Z(s)$ die Koordinaten der Punkte von $\mathfrak{z}(s)$ sind.

Man hat zunächst aus (25)

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{z}' &= [\mathfrak{x}', \mathfrak{h}_0, \mathfrak{b}]\,\mathfrak{t}_0 + [\mathfrak{x}', \mathfrak{t}_0, \mathfrak{h}_0 - \vartheta_0 \mathfrak{b}]\,\mathfrak{b}. \\ \mathfrak{z}'' &= [\mathfrak{x}'', \mathfrak{h}_0, \mathfrak{b}]\,\mathfrak{t}_0 + [\mathfrak{x}'', \mathfrak{t}_0, \mathfrak{h}_0 - \vartheta_0 \mathfrak{b}]\,\mathfrak{b} \end{aligned}\right. \tag{3, 27}$$

und erhält für die Stelle $s = s_0$ wegen (6) und (7)

$$\mathfrak{z}'' = \varkappa_0 \vartheta_0 \mathfrak{b}. \tag{3, 28}$$

Also ist

$$Z''(s_0) = \varkappa_0 \vartheta_0 \tag{3, 29}$$

und für die gesuchte Abweichung oder Normalkrümmung von $\mathfrak{z}(s)$ ergibt sich nach (12) und (26):

$$\varkappa_0^* = \frac{1}{R} = \varkappa_0 \vartheta_0 = b. \tag{3, 30}$$

30. Zusammenfassend haben wir also folgende erste Deutung der Normalkrümmung des Streifens:

Projiziert man die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ des Streifens in der Richtung der Streifennormalen $\mathfrak{y}_0$ des Kurvenpunktes $\mathfrak{x}(s_0)$ auf die isotrope Ebene γ, welche die Kurve $\mathfrak{x}$ im Punkte s_0 berührt, so ist die Normalkrümmung (= Abweichung) $\varkappa_0^* = \frac{1}{R}$ der entstehenden Projektion $\mathfrak{z}(s)$ im Punkte s_0 gleich der Normalkrümmung b des Streifens in s_0.

Für den Kehrwert

$$R = \frac{1}{b}, \tag{3, 31}$$

d. h. für den Radius der Normalkrümmung des Streifens ergibt sich aus Nr. 13 eine einfache geometrische Deutung: *R ist gleich dem Parameter des parabolischen Schmiegkreises der eben genannten Projektion $\mathfrak{z}(s)$ im Punkte s_0.*

31. Zweite Deutung der Normalkrümmung, Meusniersche Kugel. Es gibt noch eine *zweite geometrische Deutung für die Normalkrümmung b eines Streifens*, die für uns gleichfalls von Wichtigkeit ist. Um sie direkt zu gewinnen, berechnen wir den (gegen isotrope Bewegungen invarianten) Parameter p jener isotropen Berührungskugel des Streifens, welche im

Punkte s_0 die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ des Streifens oskuliert. Wir bezeichnen sie kurz als die isotrope Meusnier-Kugel des Streifens an der Stelle s_0.

Wir suchen also (Nr. 10) die isotrope Kugel

$$(3,32)\quad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+u(x-x_0)+v(y-y_0)+w(z-z_0)=0,$$

welche schon den Punkt $\mathfrak{x}_0=\mathfrak{x}(s_0)$ enthält und die man mittels des Hilfsvektors

$$(3,33)\qquad \mathfrak{u}=(u,v,w)$$

kürzer so schreiben kann:

$$(3,34)\qquad (\bar{\mathfrak{x}}-\mathfrak{x}_0)^2+\mathfrak{u}\cdot(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0)=0,$$

so einzurichten, daß sie die Kurve $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(s)$ im Punkte s_0 oskuliert.

Die Kugelgleichung (32) soll also durch die Taylor-Entwicklung der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ bei s_0

$$(3,35)\qquad \mathfrak{x}(s_0+ds)=\mathfrak{x}_0+\mathfrak{x}_0'ds+\frac{\mathfrak{x}_0''}{2!}ds^2+\cdots$$

bis auf Glieder dritter und höherer Ordnung in ds identisch erfüllt werden. Somit ist

$$(3,36)\qquad \begin{cases}\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{x}_0'=0,\\ \bar{\mathfrak{x}}_0'^2+\frac{1}{2}\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{x}_0''=0.\end{cases}$$

Wegen $\bar{\mathfrak{x}}_0'^2=1$ ergibt sich aus der letzten Gleichung

$$(3,37)\qquad \mathfrak{u}\cdot\mathfrak{x}_0''=-2.$$

Soll die Oskulationskugel noch weiter den Streifen berühren, so muß die Streifennormale von s_0, d. i. die Gerade

$$(3,38)\qquad \mathfrak{x}^*=\mathfrak{x}_0+\lambda\mathfrak{y}_0$$

mit ihr zwei zusammenfallende Schnittpunkte haben. Wenn wir also dies $\mathfrak{x}^*$ an Stelle von $\mathfrak{x}$ in (34) eintragen, so muß die entstehende quadratische Gleichung

$$\lambda^2\bar{\mathfrak{y}}^2+\lambda(\mathfrak{u}\mathfrak{y}_0)=0$$

die Doppelwurzel $\lambda=0$ aufweisen. Somit ist also

$$(3,39)\qquad \mathfrak{u}\mathfrak{y}_0=0.$$

Tragen wir hier für $\mathfrak{y}_0$ seine Bedeutung (8) ein, so entsteht die Gleichung

$$\mathfrak{u}\cdot(\mathfrak{b}_0-\vartheta_0\mathfrak{b})=\mathfrak{u}\cdot\left(\frac{\mathfrak{x}_0''}{\varkappa_0}-\vartheta_0\mathfrak{b}\right)=0,$$

oder, da $\varkappa_0\neq 0$ war, die Gleichung

$$(3,40)\qquad \mathfrak{u}\cdot\mathfrak{x}_0''-\varkappa_0\vartheta_0(\mathfrak{u}\mathfrak{b})=0.$$

Nun ist nach (33) $(\mathfrak{u}\mathfrak{b})=w$ und daher schließlich wegen (37)

$$(3,41)\qquad \varkappa_0\vartheta_0 w=-2.$$

Beachtet man jetzt die Gleichung (30) für den Normalkrümmungsradius R und die Tatsache, daß die isotrope Kugel (32) den Parameter

$$p = -\frac{w}{2} \tag{3, 42}$$

hat, so folgt das einfache Ergebnis

$$R = p. \tag{3, 43}$$

32. Zusammenfassend gewinnen wir also die folgende zweite Deutung der Normalkrümmung eines Streifens:

Der Radius R der Normalkrümmung $b = \frac{1}{R}$ eines Streifens des isotropen Raumes ist gleich dem Parameter p seiner Meusnier-Kugel, d. h. jener isotropen Kugel, welche den Streifen berührt und dabei die Trägerkurve $\mathfrak{x}$ des Streifens oskuliert.

33. Zusammenhang beider Deutungen. Dritte Deutung der Normalkrümmung. Um den *Zusammenhang zwischen unseren beiden Deutungen der Normalkrümmung eines Streifens* herzustellen, bemerken wir, daß (Nr. 13) der Parameter p einer isotropen Kugel gleich ist den Normalkrümmungsradien R aller auf ihr liegenden parabolischen Kreise. Greift man also auf der Meusnier-Kugel des Streifens jenen parabolischen Kreis heraus, der seine Trägerkurve $\mathfrak{x}(s)$ berührt, so ist auch sein Parameter p gleich dem Normalkrümmungsradius R des Streifens. Nun überzeugt man sich sofort, daß dieser parabolische Berührungskreis mit dem Schmiegkreis der Projektion $\mathfrak{z}(s)$ der Streifenkurve $\mathfrak{x}(s)$ in Richtung der Streifennormalen $\mathfrak{n}(s_0)$ auf die $\mathfrak{x}(s)$ in s_0 berührende isotrope Ebene γ zusammenfällt, so daß in der Tat die zweite Deutung der Normalkrümmung eines Streifens auf die erste zurückführt.

Zugleich folgt aus diesem Zusammenhange eine dritte wichtige Deutung für die Normalkrümmung eines Streifens: *Schneidet man die Torse des Streifens mit der isotropen Berührungsebene der Streifenkurve, so liegt der parabolische Schmiegkreis der entstehenden Schnittkurve auf der Meusnier-Kugel. Der Parameter p des parabolischen Schmiegkreises ist gleich dem Normalkrümmungsradius R des Streifens.*

Man kann das natürlich auch direkt, etwa mit Hilfe der kanonischen Entwicklung der Raumkurve nachweisen.

34. Die Deutung der geodätischen Windung. Nachdem die geodätische Krümmung c und die Normalkrümmung b eines Streifens des isotropen Raumes ihre geometrischen Deutungen gefunden haben, ist es noch unsere Aufgabe, auch für seine geodätische Windung $a = \tau - \vartheta'$ eine elementare Deutung zu ermitteln.

Wir betrachten hierzu die von den Streifennormalen (Nr. 22) gebildete Regelfläche. Deren Darstellung ist

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{x}(s) + t \cdot \mathfrak{y}(s). \tag{3, 44}$$

Zwei Nachbarerzeugende $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z} + d\mathfrak{z}$ bestimmen einen Winkel $d\lambda$ (der im Grundriß direkt ablesbar ist) und eine auf ihrer vollisotropen Transversalen, d. h. auf ihrem „Gemeinlot", ablesbare Lotspanne dl. Wir suchen den „Drall" p

$$p = \frac{dl}{d\lambda} \tag{3, 45}$$

der Regelfläche zu berechnen.

35. Das Gemeinlot trifft die Erzeugende $\mathfrak{z}$ (44) an jener Stelle t, wo sich die Nachbarerzeugende $\mathfrak{z} + d\mathfrak{z}$ von ihr nur um einen vollisotropen Vektor $d\mathfrak{z}$ unterscheidet. Nun ist der Vektor $d\mathfrak{z}$ nach (44) und den Ableitungsgleichungen (11)

$$\begin{aligned} d\mathfrak{z} &= (\mathfrak{x}' + t\mathfrak{y}')\,ds \\ &= [(1 - \varkappa t)\mathfrak{t} + t(\tau - \vartheta')\mathfrak{b}]\,ds. \end{aligned} \tag{3, 46}$$

Er ist vollisotrop, wenn

$$t = \frac{1}{\varkappa} \tag{3 47}$$

ist. Dieser Wert liefert also, in (44) eingetragen, die isotrope Striktionslinie dervon den Streifennormalen gebildeten Regelfläche (44); in (46) eingetragen, ergibt sich

$$d\mathfrak{z} = \frac{\tau - \vartheta'}{\varkappa}\,ds \cdot \mathfrak{b}, \tag{3, 48}$$

so daß man die Lotspanne

$$dl = \frac{\tau - \vartheta'}{\varkappa}\,ds \tag{3, 49}$$

erhält.

Der Winkel $d\lambda$ benachbarter Streifennormalen ist gleich dem Winkel benachbarter Normalen des Grundrisses der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ unseres Streifens, d. h. man hat

$$d\lambda = \varkappa\,ds. \tag{3, 50}$$

Somit ist der Drall der von den Streifennormalen (44) *gebildeten Regelfläche*

$$p = \frac{dl}{d\lambda} = \frac{\tau - \vartheta'}{\varkappa^2} = \frac{a}{c^2}, \tag{3, 51}$$

worin die gesuchte geometrische Deutung der geodätischen Windung a des Streifens enthalten ist.

36. Die Sätze von Beltrami und Joachimsthal. Krümmungsstreifen des isotropen Raumes waren (Nr. 25) jene, deren geodätische Windung

$$a = \tau - \vartheta' \tag{5, 52}$$

verschwindet.

Aus ihrer Definition folgt, daß *die geodätische Windung eines Streifens sich nicht ändert, wenn man seine Berührungsebenen π um die darin liegenden Kurventangenten* t *durch konstante Winkel ϑ^* dreht.* In der Tat wird dabei nur ϑ (d. i. der Neigungswinkel von π gegen die Schmiegebene der Streifenkurve) durch $\vartheta + \vartheta^*$ ersetzt und a bleibt ungeändert.

Für Krümmungsstreifen folgen daraus die Übertragungen der bekannten Sätze von F. Joachimsthal und der hierzu metrisch-dualen Sätze von E. Beltrami auf den isotropen Raum. Bezeichnet man als Krümmungslinie einer Fläche eine solche, deren Berührungsstreifen ein Krümmungsstreifen ist, so gilt:

Satz von Joachimsthal. Im isotropen Raume folgt aus je zweien der folgenden Eigenschaften die dritte: 1) Der von zwei Flächen F_1 und F_2 längs ihrer Schnittkurve c gebildete Schnittwinkel ist konstant; 2) Die Schnittkurve c ist auf F_1 Krümmungslinie; 3) Die Schnittkurve c ist auf F_2 Krümmungslinie.

Satz von Beltrami. Im isotropen Raume folgt aus je zweien der folgenden Eigenschaften die dritte: 1) Die von zwei Flächen F_1 und F_2 auf den Erzeugenden der gemeinsam umschriebenen Torse Γ abgeschnittenen Strecken haben konstante Länge; 2) Die Torse Γ berührt F_1 nach einer Krümmungslinie; 3) Die Torse Γ berührt F_2 nach einer Krümmungslinie.

37. Geodätische Streifen. Im ganzen letzten Abschnitt war nach (5) für die Streifenkurve $\mathfrak{x}(s)$ die Krümmung $\varkappa(s) \neq 0$ angenommen worden.

Es bliebe also noch die *Theorie der geodätischen Streifen* zu entwickeln, d. h. jener, für deren Kurve $\mathfrak{x}(s)$ $\varkappa(s) \equiv 0$ ist. Es sind das die *Streifen über Kurven in isotropen Ebenen.*

Wir übergehen diese, der allgemeinen durchaus analogen Theorie hier aus Gründen der Kürze. Der Leser wird sie leicht selber ergänzen können. Im übrigen wird sie in einer späteren Abhandlung dieser Reihe benötigt und dort ausführlicher entwickelt werden.

38. Dualisierung. Da die Figur des Streifens in sich dual ist, im isotropen Raume außerdem die Metrik in sich duale Struktur hat, *kann man die Differentialgeometrie der Streifen auch in dualer Weise entwickeln.* Man gelangt so zu drei Streifeninvarianten A, B, C, welche in einfacher Weise mit unseren Invarianten a, b, c zusammenhängen.

IV. Elemente der Flächentheorie des isotropen Raumes.

39. Bezeichnungen. Es sei

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v) \tag{4, 1}$$

der Ortsvektor eines Flächenpunktes

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v), \\ z &= z(u, v) \end{aligned}\right| \cdots \mathfrak{x}(u, v) \tag{4, 2}$$

einer auf die Gaussschen Parameter (u, v) bezogenen Fläche des isotropen Raumes. Sein Grundrißvektor

$$\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}(u, v) \tag{4, 3}$$

hat die Koordinaten

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \end{aligned}\right| \cdots \bar{\mathfrak{x}}(u, v). \tag{4, 4}$$

Alle auftretenden Funktionen seien — wenigstens in geeigneten gemeinsamen Existenzbereichen $\{u, v\}$ — mit allen benötigten Regularitäts- und Ableitungseigenschaften ausgestattet.

40. Reguläre Flächen. Wir setzen zweckmäßig weiter voraus, daß die Funktionaldeterminante von (4) im betrachteten (u, v)-Bereiche nicht verschwinde:

$$\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} = [\bar{\mathfrak{x}}_u \bar{\mathfrak{x}}_v] \neq 0. \tag{4, 5}$$

Es sollen also insbesondere die *Zylinder mit vollisotroper Erzeugendenrichtung* von unserer Untersuchung *ausgeschlossen* sein, für welche wegen des kurvenhaften Grundrisses die Funktionaldeterminante (5) identisch verschwindet. Deren besondere (einfache) Theorie müßte für sich entwickelt werden; sie wird aber einstweilen noch nicht benötigt.

Die zugelassenen Flächen können also jedenfalls in der expliziten Form

$$z = z(x, y) \tag{4, 6}$$

dargestellt werden.

Flächenpunkte mit isotropen Tangentialebenen sind nach (5) gleichfalls ausgeschlossen. Das Netz der Gaussschen Parameterlinien der Fläche erscheint wegen (5) im Grundriß im untersuchten Bereiche überall regulär.

41. Bogenelement. Für das Bogenelement ds der Fläche (1) erhält man nach (2, 1)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\bar{\mathfrak{x}}^2 = (\bar{\mathfrak{x}}_u\, du + \mathfrak{x}_v\, dv)^2. \tag{4, 7}$$

Wenn man die isotropen Fundamentalgrößen erster Art einführt:

$$(4,8)\qquad \begin{cases} E = \bar{\mathfrak{x}}_u^2 = x_u^2 + y_u^2, \\ F = \bar{\mathfrak{x}}_u \bar{\mathfrak{x}}_v = x_u x_v + y_u y_v, \\ G = \bar{\mathfrak{x}}_v^2 = x_v^2 + y_v^2, \end{cases}$$

ergibt sich die erste Grundform der Flächentheorie des isotropen Raumes:

$$(4,9)\qquad \boxed{I = ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Wegen

$$(4,10)\qquad W^2 = EG - F^2 = [\bar{\mathfrak{x}}_u, \bar{\mathfrak{x}}_v]^2 > 0$$

ist sie im ganzen Bereiche positiv-definit. Hinsichtlich des Vorzeichens von W wollen wir übereinkommen, in Hinkunft

$$(4,11)\qquad W = \sqrt{EG - F^2} = [\bar{\mathfrak{x}}_u, \bar{\mathfrak{x}}_v]$$

zu setzen.

42. Winkel- und Flächenmetrik. Geodätische Krümmung. Nach (7) *stimmt die* Riemannsche *Metrik* (9) *der Flächen des isotropen Raumes überein mit der Euklidischen Metrik ihres Grundrisses.*

Das gilt insbesondere für die *Winkelmetrik*. Z. B. ist auch hier $F = 0$ kennzeichnend für *orthogonale Parameternetze*.

Entsprechend kann man auch das gegen isotrope Bewegungen invariante elementare Inhaltsmaß $f_{\mathfrak{B}}$ eines Flächenstückes $\mathfrak{B}$ direkt dem Grundriß $\mathfrak{B}'$ entnehmen. Es gilt also folgende *elementare Inhaltsformel*:

$$(4,12)\qquad f_{\mathfrak{B}} = \iint_{\mathfrak{B}'} dx\,dy = \iint_{\mathfrak{B}} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv = \iint_{\mathfrak{B}} W\,du\,dv.$$

Die *geodätische Krümmung* c einer Flächenkurve stimmt nach Nr. 25 mit der elementaren Krümmung $\varkappa$ ihres Grundrisses überein. Man erhält sie in der Riemannschen Metrik (9) in bekannter Weise. Ist die Kurve etwa durch die Gleichung $\varphi(u,v) = 0$ gegeben, so kann man ihre geodätische Krümmung $\varkappa$ in parameterinvarianter Weise mittels der hinsichtlich der ersten Grundform (9) zu nehmenden *Beltramischen Differentiatoren*[6]) $\nabla\varphi$ und $\Delta\varphi$ durch folgende *Beltramische Formel* berechnen, die in ihrer ausführlicheren Form von Bonnet herrührt:

$$(4,13)\qquad \begin{cases} \varkappa = -\dfrac{\Delta\varphi}{\sqrt{\nabla\varphi}} - \nabla\left(\varphi, \dfrac{1}{\sqrt{\nabla\varphi}}\right) \\ \quad = \dfrac{1}{W}\left\{\left(\dfrac{F\varphi_v - G\varphi_u}{\sqrt{E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2}}\right)_u + \left(\dfrac{F\varphi_u - E\varphi_v}{\sqrt{E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2}}\right)_v\right\}. \end{cases}$$

[6]) Für deren bekannte Definition vgl. die Formeln (7, 4) und (5, 4).

43. Absolutkrümmung und Geodätische Linien. *Die Gausssche Krümmung des Bogenelementes* (9), *die wir als die absolute Krümmung K_a der Fläche des isotropen Raumes bezeichnen, ist stets identisch Null.*

Diese Tatsache, von der wir einige metrische Auswirkungen soeben in Nr. **42** verspürten, ist es vor allem, welche es mit sich bringt, daß die Flächentheorie des isotropen Raumes in mancher Hinsicht ein einfacheres und durchsichtigeres Gepräge trägt, als man es etwa vom euklidischen Raume her gewöhnt ist. Es kommt zu dieser Eigenschaft der inneren Geometrie der Flächen noch die besondere Eigenart der metrischen Struktur des isotropen Raumes, in den die Fläche eingebettet ist. Diese wirkt sich gleichfalls schon in obigen Theoremen aus, ebenso wie z. B. in der uns aus Nr. 7 geläufigen Tatsache, daß alle *Flächennormalen untereinander parallel*, nämlich von *vollisotroper Richtung* sind. Eine Folge von alledem ist dann der Satz:

Auf den Flächen des isotropen Raumes haben die Geodätischen geradlinige Grundrisse. Sie werden aus der Fläche von den isotropen Ebenen ausgeschnitten.

44. Allgemeine Bemerkung über isotrope Flächentheorie. Gleichwohl wäre es sehr voreilig, etwa den Schluß zu ziehen, daß die Flächentheorie oder die Geometrie des isotropen Raumes überhaupt uninteressant oder gar trivial sein müßte. *Man darf nämlich den Umstand nicht übersehen (der gerade der isotropen Raumgeometrie besonderes Interesse verleiht), daß im isotropen Raume an die Stelle der (gelegentlich oder stets) durch identisches Verschwinden versagenden Invarianten immer gewisse andere neue Größen als Ersatzinvarianten treten.* So tritt gelegentlich, wie wir aus den Nrn. **3**—**6** wissen, an die Stelle der Länge einer Strecke ihre Spanne, oder an die Stelle des Winkels zweier Richtungen ihre Sperrung oder Neigung; oder es tritt, wie aus den Nrn. **17**—**19** bekannt ist, gelegentlich an die Stelle der Krümmung einer ebenen oder gewundenen Kurve ihre Abweichung (= Normalkrümmung) usw.

In gleicher Weise wird sich uns in der Flächentheorie des isotropen Raumes an Stelle der durch identisches Verschwinden stets versagenden Absolutkrümmung K_a (d. i. der Gaussschen Krümmung ihres isotropen Bogenelementes) als Ersatz von selbst eine andere Invariante darbieten, die wir als ihre Relativkrümmung $K_r = K$ bezeichnen werden. *Mit ihrer Hilfe gestaltet sich nun auch die Flächentheorie des isotropen Raumes im Wesen ebenso vielgestaltig und formenreich, wie die eines anderen Raumes.*

Ein, wie mir scheint, sehr schlagender Beleg hierfür ist z. B. die von mir bereits an anderer Stelle[2]) entwickelte Theorie der Flächen konstanter Relativkrümmung des isotropen Raumes. Ein weiterer Beleg dafür wäre die Theorie der isotropen Minimalflächen.

45. Die Streifennormale einer Flächenkurve. Wir wollen nun zur Entwicklung der Krümmungstheorie der Flächen des isotropen Raumes schreiten, und bestimmen zunächst die Normalkrümmung b eines durch die Flächenkurve

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s) \tag{4, 14}$$

gegebenen Flächenstreifens.

Nach den Formeln (3, 20) und (3, 30) ist

$$b = \frac{1}{R} = -[\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{y}], \tag{4, 15}$$

wobei sich für die *Tangente* $\mathfrak{x}'$ und *Hauptnormale* $\mathfrak{x}''$ der Flächenkurve ergibt:

$$\begin{cases} \mathfrak{x}' = \mathfrak{x}_u \frac{du}{ds} + \mathfrak{x}_v \frac{dv}{ds}, \\ \mathfrak{x}'' = \mathfrak{x}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\mathfrak{x}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \mathfrak{x}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \mathfrak{x}_u\frac{d^2u}{ds^2} + \mathfrak{x}_v\frac{d^2v}{ds^2}. \end{cases} \tag{4, 16}$$

Die *Streifennormale* $\mathfrak{y}$ läßt sich als Linearkombination der Tangentenvektoren $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ so bestimmen, daß 1) $\mathfrak{y} \perp \mathfrak{x}'$, d. h. $(\mathfrak{x}'\mathfrak{y}) = 0$ und 2) $[\mathfrak{x}'\mathfrak{y}\mathfrak{b}] = +1$ ist. Man findet leicht

$$\mathfrak{y} = -\frac{1}{W}\left\{\left(F\frac{du}{ds} + G\frac{dv}{ds}\right)\mathfrak{x}_u - \left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right)\mathfrak{x}_v\right\}. \tag{4, 17}$$

46. Die Normalkrümmung. Um die gewünschte Normalkrümmung $b = \frac{1}{R}$ zu errechnen, tragen wir (16) und (17) in die Determinante (15) ein, und entwickeln diese nach der zweiten Zeile. Führen wir die isotropen Fundamentalgrößen zweiter Art ein:

$$\begin{cases} L = \frac{[\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{x}_{uu}]}{W}, \\ M = \frac{[\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{x}_{uv}]}{W}, \\ N = \frac{[\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{x}_{vv}]}{W}, \end{cases} \tag{4, 18}$$

so erhalten wir für die *Normalkrümmung* den Ausdruck:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} = \frac{II}{I}}. \tag{4, 19}$$

47. Der Satz von Meusnier. Diese die Krümmungstheorie der Flächen des isotropen Raumes beherrschende Formel enthält unmittelbar den

Satz von Meusnier: *Alle Flächenstreifen, welche einen Flächenpunkt* (u, v) *in derselben Richtung* $(du : dv)$ *passieren, haben dort dieselbe Normalkrümmung.*

Mit Rücksicht auf die Resultate der Nr. **33** läßt sich der Meusniersche Satz auch so formulieren:

Alle Flächenkurven, welche einen Flächenpunkt in derselben Richtung passieren, haben dort Schmiegkreise, welche einer festen (parabolischen) Kugel des isotropen Raumes, nämlich der MEUSNIERschen *Kugel dieser Richtung angehören. Der Parameter p der* MEUSNIERschen *Kugel ist gleich dem Radius R der gemeinsamen Normalkrümmung der zugehörigen Flächenstreifen. Die* MEUSNIERsche *Kugel einer Flächenrichtung ist eindeutig bestimmt durch die Tangentialebene der Fläche und durch den parabolischen Schmiegkreis jenes Normalschnittes, den die isotrope Ebene dieser Richtung aus der Fläche ausschneidet. Auch der Parameter p dieses parabolischen Normalschnittschmiegkreises ist gleich dem Normalkrümmungsradius R dieser Flächenrichtung.*

48. Die isotrope Meusnier-Formel. Der metrische Zusammenhang zwischen dem Krümmungsradius $r = \frac{1}{\varkappa}$ einer Flächenkurve und dem Radius $R = \frac{1}{\varkappa^*}$ der Normalkrümmung der zugehörigen Flächenrichtung wird durch die Formel (3, 30) geliefert. Bezeichnet ϑ den Winkel, unter dem die Schmiegebene σ der Kurve gegen die Tangentialebene τ der Fläche geneigt ist, so lautet dieser *analytische Ausdruck des* MEUSNIERschen *Satzes*:

$$r = R \cdot \vartheta \tag{4, 20}$$

49. Asymptotenlinien. Durch die Gleichung

$$II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0 \tag{4, 21}$$

werden die Asymptotenlinien der Fläche geliefert. Das Verschwinden der Polarform der zweiten Grundform kennzeichnet konjugierte Flächenrichtungen. Also ist für konjugierte Parameternetze $M = 0$.

Die Parameterlinien sind *normal und auf der Fläche konjugiert* für

$$F = 0, \quad M = 0. \tag{4, 22}$$

Die zugehörigen Flächenstreifen sind dann im Sinne der Nr. 24 *Krümmungsstreifen*, die Linien selber nennen wir *isotrope Krümmungslinien* der Fläche.

50. Cartesische Form der Normalkrümmung. Deutet man in der Grundformel (19) für die Flächenkrümmung R laut Nr. 47 als Radius der Normalkrümmung des zur Richtung $du : dv$ gehörigen isotropen Normalschnittes, so ist in ihr, wie im euklidischen Falle, das isotrope Gegenstück des EULERschen Satzes enthalten.

Um es einfach herzuleiten, gehen wir von der expliziten Gleichung der Fläche

$$z = z(x, y) \tag{4, 23}$$

aus. Für die Parameter x, y hat man nach (8), (11) und (18) folgende Werte der Fundamentalgrößen:

$$\begin{cases} E = 1, & F = 0, & G = 1, \\ & W = 1, & \\ L = r, & M = s, & N = t. \end{cases} \tag{4, 24}$$

Die Krümmungsformel (19) lautet jetzt:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{II}{I}}. \tag{4, 25}$$

51. Der Eulersche Satz. Verlegt man an einer Stelle (x, y) die beiden (sicher reell vorhandenen) im Sinne der Metrik des isotropen Raumes ***normalen und konjugierten Flächenrichtungen***, d. i. die Tangenten der isotropen Krümmungslinien oder die beiden ***Hauptkrümmungsrichtungen*** nach $dx = 0$ und $dy = 0$, so wird dort $M = s = 0$ und man findet aus (25), wenn φ den Winkel einer beliebigen Flächenrichtung $dx : dy$ gegen die erste Hauptkrümmungsrichtung bezeichnet, also

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi \tag{4, 26}$$

bedeutet, und wenn ferner noch mit

$$\frac{1}{R_1} = r, \qquad \frac{1}{R_2} = t \tag{4, 27}$$

die Normalkrümmungen der beiden isotropen Hauptnormalschnitte bezeichnet werden, die bekannte Form des *Eulerschen Satzes*:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2}}. \tag{4, 28}$$

52. Dualisierung. Nach dem metrischen Dualitätsgesetz des isotropen Raumes entsprechen den Sätzen von Meusnier und Euler duale Gegenstücke, die man als die isotropen Übertragungen der euklidischen Sätze von A. Mannheim [7]) und W. Blaschke [8]) auffassen kann. Ihre analytische Formulierung könnte man aus der (hier aus Gründen der Kürze unterdrückten) Herleitung des dualen Gegenstückes der Geometrie der Streifen (vgl. Nr. 38) entnehmen. Man kann sie aber (wie im euklidischen Falle) auch direkt ableiten.

53. Das Schmiegparaboloid. Durch eine isotrope Bewegung kann man nämlich den auf seine Krümmungsverhältnisse zu untersuchenden (regulären) Flächenpunkt P in den Koordinatenanfangspunkt O und seine Tangentialebene τ in die (x, y)-Ebene bringen. Das aus der Taylor-Entwicklung der Flächengleichung zu entnehmende

[7]) A. Mannheim, Géométrie cinématique, Paris 1894, S. 158.
[8]) W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 118.

Schmiegparaboloid zweiter Ordnung wird dann, wenn die x- und y-Achse die Hauptkrümmungsrichtungen sind, lauten:

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2}\right). \tag{4, 29}$$

Seine Krümmungsverhältnisse sind dieselben wie die der Ausgangsfläche (23).

54. Der Krümmungskegel. Um die *isotrope Form des* MANNHEIMschen *und* BLASCHKEschen *Satzes* zu erhalten, ermitteln wir die Berührungskegel, welche sich der Fläche (29) aus den Punkten einer festen Tangente t von O umschreiben lassen, und fragen nach *deren Krümmungskegeln*, d. i. nach jenen Schmiegkegeln, welche (nach Nr. 10) die Fernebene nach Fernkreisen schneiden, d. h. welche Drehkegel sind. Diese Kegel sind ja metrisch dual zu den Krümmungskreisen der ebenen Schnitte durch eine feste Tangente der Fläche.

Benutzt man zur Darstellung der nichtisotropen Ebenen

$$z = ux + vy + w \tag{4, 30}$$

zweckmäßig die (inhomogenen) Koordinaten (u, v, w), so lautet die Ebenengleichung der Fläche (29)

$$R_1 u^2 + R_2 v^2 + 2w = 0. \tag{4, 31}$$

Ist nun

$$X = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ 0) \tag{4, 32}$$

ein beliebiger Punkt der Tangentialebene $z = 0$ von O, deren Ebenenkoordinaten

$$(u, v, w) = (0, 0, 0) \tag{4, 33}$$

sind, und ist

$$X = r\cos\varphi \cdot u + r\sin\varphi \cdot v + w = 0 \tag{4, 34}$$

die Ebenengleichung dieses Punktes X, so geben die beiden Gleichungen (31) und (32) zusammen die analytische Darstellung des Tangentenkegels zweiter Ordnung, den man aus dem Punkte X (32) an die Fläche (31) legen kann. Eliminiert man aus ihnen für den Augenblick w, so ergibt sich die Ebenengleichung des Kegelschnittes f, in dem der Tangentenkegel die Fernebene schneidet. Sie lautet

$$f(u, v) = R_1 u^2 + R_2 v^2 - 2r(u\cos\varphi + v\sin\varphi) = 0, \tag{4, 35}$$

und liefert zusammen mit (34) wieder den Tangentenkegel selber.

55. Der gesuchte oskulierende Drehkegel wird nun seinerseits die Fernebene nach einem f oskulierenden Fernkreise k schneiden, das ist nach einem Kegelschnitt, der die beiden absoluten Geraden (1, 2) des isotropen Raumes berührt. Die Berührungssehne oder Achse a dieses Fernkreises kann durch ihre Linienkoordinaten (U, V) festgelegt werden. Bedeutet nämlich $\mathfrak{r}$ die als Kegelöffnung bezeichnete feste Neigung der Erzeugenden des Schmiegkegels gegen die Verbindungsebene des Kegelscheitels X mit der Achse a (vgl. Nr. 8), so wird die *Liniengleichung des Fernkreises* die Form haben

$$(u - U)^2 + (v - V)^2 = \mathfrak{r}^2, \tag{4, 36}$$

wobei die Größen U, V, $\mathfrak{r}^2$ aus der Liniengleichung $f(u, v) = 0$ der gegebenen Fernkurve durch dieselben Formeln hervorgehen, welche (dual) den Mittelpunkt und Radius des Schmiegkreises einer ebenen Kurve $f(x, y) = 0$ liefern. Man hat also mit der Abkürzung

$$D = \begin{vmatrix} f_{uu} & f_{uv} & f_u \\ f_{vu} & f_{vv} & f_v \\ f_u & f_v & 0 \end{vmatrix} \tag{4, 37}$$

für die *Achse* (U, V) *und Öffnung* $\mathfrak{r}$ *des Fernkreises*:

$$(4,38)\qquad \begin{cases} U = u + \dfrac{f_u\,(f_u^2 + f_v^2)}{D}, \\ V = v + \dfrac{f_v\,(f_u^2 + f_v^2)}{D}, \\ \mathfrak{r}^2 = \dfrac{(f_u^2 + f_v^2)^3}{D^2}. \end{cases}$$

Die Ableitungen von $f(u, v)$ sind dabei an jener Stelle (u, v) zu nehmen, wo die Oskulation stattfinden soll. Dies ist im vorliegenden Falle nach (33) die Ferngerade $(u, v) = (0, 0)$ der Tangentenebene $z = 0$.

Aus (35) ergibt sich so leicht die Achse (U, V) und (nach einer Vorzeichenübereinkunft) die Öffnung $\mathfrak{r}$ des Fernkreises unseres Krümmungskegels:

$$(4,39)\qquad \begin{cases} U = \dfrac{r\cos\varphi}{R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi}, \\ V = \dfrac{r\sin\varphi}{R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi}, \\ \mathfrak{r} = \dfrac{r}{R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi}, \end{cases}$$

und damit aus (36) die *Gleichung dieses Fernkreises* in Ebenenkoordinaten:

$$(4,40)\qquad u^2 + v^2 - 2r\,\frac{u\cos\varphi + v\sin\varphi}{R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi} = 0.$$

Das Paar der Gleichungen (34) *und* (40) *stellt damit den gesuchten Krümmungskegel dar, der zum Punkte* X (32) *der Tangente* $\varphi = \text{const.}$ *der Fläche* (29) *gehört.*

56. Die Mannheim-Kugel. Lassen wir nun den Scheitel X (34) des Krümmungskegels eine Flächentangente $\varphi = \text{const.}$ durchlaufen, so bestimmt der Kegel selber ein Hüllgebilde, dessen Gleichung sich durch Elimination des Parameters r aus dem Gleichungspaare (34) und (40) ergibt. Man erhält so als Hülle eine isotrope Kugel mit der Ebenengleichung

$$(4,41)\qquad u^2 + v^2 + \frac{2w}{R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi} = 0,$$

Dies ist die zur Flächentangente $t\,(\varphi = \text{const.})$ *gehörige* MANNHEIM*-Kugel.* Ihre cartesische Gleichung ist

$$(4,42)\qquad x^2 + y^2 = 2\,(R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi)\cdot z.$$

57. Die Formeln von Mannheim und Blaschke. Für ihren Parameter p oder die Biegung $\frac{1}{\mathfrak{R}}$ der ihr umschriebenen parabolischen Zylinder erhält man (nach Nr. 21) den Wert

$$(4,43)\qquad p = -\frac{1}{\mathfrak{R}} = R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi.$$

Wie wir aus Nr. 21 wissen, ist die Biegung eines der Fläche umschriebenen Zylinders der zur Abweichung oder Normalkrümmung eines ebenen (isotropen) Normalschnittes der Fläche duale Krümmungsbegriff.

Die Gleichung (43) gibt für variables φ, d. h. bei variabler Richtung der Berührungserzeugenden t der umschriebenen parabolischen Zylinder, die Beziehung an, welche zwischen dem Neigungswinkel φ der Tangenten t gegen die erste Hauptnormal-

richtung und der Biegung $\frac{1}{\mathfrak{R}}$ der Berührungszylinder bzw. dem Parameter p der MANNHEIM-Kugeln, welche zu den Tangenten t gehören, besteht. Sie ist damit dual zur EULERschen Formel und liefert das *isotrope Gegenstück der Formel von* BLASCHKE.

Da sich für die beiden Hauptkrümmungsrichtungen $\left(\varphi = 0, \frac{\pi}{2}\right)$ die Werte der „*Hauptbiegungsradien*"

$$\mathfrak{R}_1 = -\frac{1}{R_2}, \quad \mathfrak{R}_2 = -\frac{1}{R_1} \tag{4, 44}$$

ergeben, können wir die *Formel von* BLASCHKE symmetrischer und mit vollständigerem Ausdruck der metrischen Dualität, die sie mit der EULERschen Formel (28) verbindet, so schreiben:

$$\boxed{\frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{\cos^2\varphi}{\mathfrak{R}_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\mathfrak{R}_2}}. \tag{4, 45}$$

Durch Vergleich der Formeln (39) und (43) und eine Vorzeichenübereinkunft ergibt sich jetzt auch noch der *analytische Ausdruck des isotropen Gegenstückes zum Satze von* MANNHEIM:

$$\boxed{\mathfrak{r} = \mathfrak{R} r}, \tag{4, 46}$$

wieder in vollständiger Dualität zur MEUSNIERschen Formel (20).

58. Die Sätze von Mannheim und Blaschke. Fassen wir diese Ergebnisse nochmals in Worten zusammen!

Es seien R_1 und R_2 die beiden Hauptkrümmungsradien eines Flächenpunktes O und $\mathfrak{R}_1 = -\frac{1}{R_2}$ bzw. $\mathfrak{R}_2 = -\frac{1}{R_1}$ die zugehörigen Hauptbiegungsradien der Zylinder, welche der Fläche in der ersten bzw. zweiten Hauptkrümmungsrichtung umschrieben werden können. Es sei weiter φ der Neigungswinkel einer beliebigen Flächentangente t gegen die erste Hauptnormalrichtung. Dann gilt:

1) *Der Satz von* MANNHEIM: *Die aus den Punkten X der Flächentangente t an die Fläche gelegten Tangentenkegel besitzen längs t oskulierende Drehkegel ($=$ Krümmungskegel), welche eine isotrope Kugel umhüllen, die wir als die* MANNHEIM*-Kugel der Tangente t bezeichnen. Der Biegungsradius $\mathfrak{R}$ des Krümmungszylinders, den man ihr in Richtung t umschreiben kann, hängt mit der Öffnung $\mathfrak{r}$ der Krümmungskegel und dem Abstande r ihrer Scheitel X vom Flächenpunkte O durch die Relation* (46) *zusammen, welche dual ist zur Formel* (20) *von* MEUSNIER, *und als isotropes Gegenstück der euklidischen* MANNHEIMschen *Formel zu deuten ist.*

2) *Der Satz von* BLASCHKE: *Der Biegungsradius $\mathfrak{R}$ des Berührungszylinders, der zur variablen Tangentenrichtung t gehört, hängt mit den beiden (zu den Hauptkrümmungsrichtungen gehörigen) Hauptbiegungsradien $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ durch die zur* EULERschen *Formel* (28) *duale Formel von* BLASCHKE (45) *zusammen.*

V. Isotrope Krümmungslinien.

59. Mittlere und relative Krümmung. Wie wir aus Nr. 51 wissen, gibt es auch im isotropen Raume in jedem Punkte einer regulären Fläche zwei Hauptkrümmungsrichtungen. Sie sind zueinander zugleich normal und auf der Fläche konjugiert und die zugehörigen Hauptnormalkrümmungen $\frac{1}{R_1}$ bzw. $\frac{1}{R_2}$ sind die beiden Extremwerte unter den im Flächenpunkte möglichen Normalkrümmungen.

Von ihren Mittelwerten

$$(5,1)\qquad \boxed{\begin{aligned} K &= \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \\ H &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} \end{aligned}}$$

bezeichnen wir (im Anschluß an die Terminologie, die L. Bianchi für den elliptischen Raum prägte), K als die *Relativkrümmung* der Fläche (4, 2) und H als ihre *mittlere Krümmung*.

Die Relativkrümmung kann im isotropen Raume, wie schon in den Nrn. 43 und 44 bemerkt wurde, als Ersatzinvariante für die durch identisches Verschwinden versagende *Absolutkrümmung* K_a der Fläche, d. h. als Ersatz für die verschwindende *Gaußsche Krümmung* ihres Bogenelementes (4, 7) bzw. (4, 9) aufgefaßt werden.

Die mittlere Krümmung H kann man noch auf eine andere, für die isotrope Flächentheorie sehr wichtige Art schreiben. Berechnen wir nämlich die Werte der Krümmungen (1) für die explizite Darstellung $z = z(x, y)$ der Fläche, so finden wir nach (4, 24)

$$(5,2)\qquad \boxed{\begin{aligned} K &= rt - s^2, \\ H &= \tfrac{1}{2}(r + t) = \tfrac{1}{2}\,\Delta z(x, y), \end{aligned}}$$

wobei $\Delta z(x, y)$ den Laplaceschen Ausdruck von $z(x, y)$ für cartesisches Bogenelement (2, 1) bedeutet. Daher läßt sich die *mittlere Krümmung H in parameterinvarianter Weise* so schreiben:

$$(5,3)\qquad \boxed{H = \tfrac{1}{2}\,\Delta z(u, v)},$$

wobei $\Delta z(u, v)$ den für die z-Koordinate $z(u, v)$ der Fläche (4, 2) hinsichtlich ihres Bogenelementes (4, 9) gebildeten *zweiten Beltramischen Differentiator* bedeutet, also den Ausdruck

$$(5,4)\qquad \Delta z(u, v) = \frac{1}{W}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E z_v - F z_u}{W}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G z_u - F z_v}{W}\right)\right\}.$$

60. Flächen konstanter Relativkrümmung. Minimalflächen. Ich habe bereits an anderer Stelle[2]) gezeigt, wie einfach sich die Theorie der Flächen konstanter Relativkrümmung, d. h. die Theorie der vielfach untersuchten Integralflächen der MONGE-AMPÈREschen Gleichung

$$rt - s^2 = K = \text{const.} \neq 0 \tag{5, 5}$$

mittels der Idee des isotropen Raumes gestalten läßt.

Man kann nämlich — und das ist der geometrische Sinn der einfachen integrallosen Darstellung, die G. DARBOUX für diese Flächen fand — *die Flächen fester Relativkrümmung* (5) *durch isotrope* CLIFFORDsche *Schiebung ihrer Asymptotenlinien aneinander in ähnlicher Weise erzeugen, wie dies nach L.* BIANCHI *im elliptischen Raume für dessen Flächen mit verschwindender Absolutkrümmung möglich ist.*

In einer Fortsetzung dieser Reihe werde ich auch die durch *verschwindende mittlere Krümmung*, d. i. durch die LAPLACEsche Gleichung

$$2H = \Delta z(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \tag{5, 6}$$

gekennzeichneten *Minimalflächen des isotropen Raumes*, von denen auch der letzte Abschnitt dieser Note handelt, und die schon von vielen anderen geometrischen und analytischen Gesichtspunkten aus Interesse gefunden haben, ausführlicher studieren. Es wird sich dabei neben den schon bisher bekannten Eigenschaften dieser vor allem für die Funktionentheorie bemerkenswerten Flächen (6) eine Reihe neuer beachtenswerter Tatsachen und *Analogien zur Lehre der euklidischen Minimalflächen* ergeben. Auf einige davon bin ich am Ende dieser Arbeit kurz eingegangen.

61. Krümmungslinien. Jede im Sinne von Nr. 40 reguläre reelle Fläche des isotropen Raumes trägt ein *orthogonales Netz konjugierter Kurven*, das Netz ihrer (*isotropen*) *Krümmungslinien*. Dieses ist (außer bei nicht-isotropen Ebenen und isotropen Kugeln, vgl. Nr. 62) eindeutig bestimmt und entsteht durch Integration der Hauptkrümmungsrichtungen der Fläche. Wegen unserer Art der Winkelmetrik (Nr. 5) gilt folgender einfache Satz:

Die Krümmungslinien einer Fläche des isotropen Raumes fallen mit jenem Netz konjugierter Kurven zusammen, welches im Grundriß als Orthogonalnetz erscheint.

Als Differentialgleichung der isotropen Krümmungslinien ergibt sich, wie im euklidischen Falle, aus (4, 19)

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \tag{5, 7}$$

Sie lautet bei expliziter Darstellung der Fläche $z = z(x, y)$ nach (4, 24):

$$s\,dx^2 - (r - t)\,dx\,dy - s\,dy^2 = 0. \tag{5, 8}$$

62. Nabelpunkte. Als Nabelpunkte bezeichnen wir jene Flächenpunkte, deren Normalkrümmungsradien sämtlich gleich sind, für die also $L : M : N = E : F : G$ oder $r = t$ und $s = 0$ ist.

Es gibt auch im isotropen Raume *Flächen mit lauter Nabelpunkten und lauter Krümmungslinien*. Für sie muß

$$s \equiv 0, \quad r \equiv t \tag{5, 9}$$

sein.

Das gibt sofort die Flächen

$$z = A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D, \tag{5, 10}$$

also *die isotropen Kugeln und die nicht-isotropen Ebenen*.

63. Ebene und sphärische Krümmungslinien. Daraus folgt im Verein mit den Ergebnissen der Nr. 36 als Anwendung wie im euklidischen Falle die bekannte Kennzeichnung der sphärischen und der ebenen Krümmungslinien durch den

Satz von Joachimsthal: *Ein sphärischer oder (nichtisotroper) ebener Schnitt einer Fläche ist im isotropen Raume dann und nur dann auf ihr Krümmungslinie, wenn der Schnittwinkel der Fläche mit der isotropen Kugel bzw. der nicht-isotropen Ebene konstant ist.*

Es folgt z. B., daß auf einer Drehfläche des isotropen Raumes die Parallelkreise, also auch die dazu normalen Meridiane Krümmungslinien sind. Ebenso sind auch die Schnitte einer isotropen Böschungsfläche mit den parallelen Böschungsebenen Krümmungslinien. Endlich auch bei einer Gesimsfläche mit vollisotropem Grundzylinder die von den Profilpunkten beschriebenen, in parallelen Ebenen liegenden Evolventen des Grundzylinders. Dabei liegen die Krümmungslinien der anderen Schar (wie auch in den beiden vorausgehenden Beispielen) in isotropen Ebenen, auf die sich hier der Satz von Joachimsthal nicht ohne weiteres anwenden läßt.

64. Die isotropen Krümmungslinien bei Ribaucour und Turrière. Die von mir in dieser Auffassung eingeführten Krümmungslinien einer Fläche des isotropen Raumes[3c]) treten früher schon bei É. Turrière[9]) auf, der sie

[9]) É. Turrière, a) Sur les réseaux conjugués orthogonaux en projection sur un plan. Nouv. Ann. de Math. (4) **12** (1912), S. 364—374; auf S. 367 dieser Note weist Turrière auf die sinnfälligen Analogien dieser Kurven zu den (gewöhnlichen) Krümmungslinien hin. — b) Étude des réseaux conjugués orthogonaux en projection sur un plan. Bull. Soc. Math. France **40** (1912), S. 228—238. — c) Sur une congruence de droites associée au réseau conjugué d'une surface orthogonau en projection sur un plan. Nouv. Ann. de Math. (4) **13** (1913), S. 163—176.

— ohne irgendwelchen Zusammenhang mit einem Krümmungsbegriff — als jenes *Netz konjugierter Flächenkurven* behandelt, *die sich in der Projektion auf eine Ebene als Orthogonalnetz abbilden*. TURRIÈRE studiert auch verschiedene besondere Flächen und ihre (in meiner Ausdrucksweise) isotropen Krümmungslinien, so z. B. den Fall der Flächen zweiter Ordnung[10]), der sich sehr einfach erledigen läßt[11]).

Die Frage nach diesen Kurven hat übrigens bei Flächen zweiter Ordnung schon A. RIBAUCOUR[12]) gestellt. Sie wurde vor É. TURRIÈRE schon vollständig durch den Mediziner A. GUÉBHARD[13]) beantwortet, und zwar mit rechnerischen Mitteln, wobei auch vielleicht erstmalig die Differentialgleichung (8) auftritt.

65. Die isotrope Geraden-Kugel-Transformation. In den eben angeführten Noten[11]) habe ich gezeigt, daß der isotrope Raum eine *Geraden-Kugel-Transformation* besitzt. Es ist dies im Wesen die sogenannte *EULERsche Transformation*. Schreibt man das Bogenelement (2, 1) des isotropen Raumes (mit einfacher Realitätsverschiebung) in der indefiniten Form

$$ds^2 = dx \cdot dy, \tag{5, 11}$$

so kann man die EULERsche Transformation involutorisch so ansetzen[14]):

$$X = -p, \quad Y = -y, \quad Z = px - z, \quad P = -x, \quad Q = q. \tag{5, 12}$$

Mit der euklidischen teilt diese isotrope Geraden-Kugel-Transformation die wichtige Eigenschaft, Asymptotenlinien in isotrope Krümmungslinien zu verwandeln und umgekehrt.

So kann man also auch durch die EULERsche Transformation zu den Krümmungslinien in einem (zunächst freilich indefiniten) isotropen Raum gelangen. Und auf diesem Wege ist in der Tat J. EIESLAND[15]) zu ihnen gekommen, wobei übrigens keinerlei Zusammenhang mit der uns leitenden Idee des isotropen Raumes auftritt. Es wird jedoch nicht einmal die seit LIE bekannte Tatsache erwähnt, daß die EULERsche Transformation als ein gewisser Grenzfall der übrigen (euklidischen bzw. nichteuklidischen)

---

[10]) É. TURRIÈRE, 9a) auf S. 367/368.

[11]) Vgl. auch K. STRUBECKER, a) Über die EULERsche Transformation. Comptes rendus instit. des sci. de Roumanie **3** (1939), S. 150—155; insbes. Nr. 6. — b) Die Geometrie des isotropen Raumes und einige ihrer Anwendungen. Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. **48** (1938), S. 236—257; insbes. Nr. 17.

[12]) A. RIBAUCOUR, Question 975 in Nouv. ann. de math. (2) **8** (1869), S. 563.

[13]) A. GUÉBHARD, Nouv. ann. de math. (2) **11** (1872), S. 177—181.

[14]) K. STRUBECKER, 11a) auf S. 150; 11b) auf S. 251.

[15]) J. EIESLAND, Conjugated lines connected with EULERs transformation. Trans. Amer. math. soc. **6** (1905), S. 450—471, insbes. S. 454—455.

Geraden-Kugel-Transformation aufgefaßt werden kann[16]). EIESLAND bezeichnet diese Kurven auch mit einem völlig neutralen Namen: er nennt sie „EULERsche Linien" der Fläche, betrachtet übrigens auch ihren Grundriß, freilich ohne zu bemerken, daß sie im Sinne der pseudoeuklidischen Metrik vom Bogenelement (11) ein Orthogonalsystem bilden.

66. Die Beziehungen zur relativen Differentialgeometrie von E. Müller. Am nächsten stehen aber unserer Auffassung dieser Flächenkurven als isotrope Krümmungslinien die Gedanken, welche EMIL MÜLLER zu wiederholten Malen[17]) zu ihnen von seiner *relativen Differentialgeometrie* her geführt haben. Wenn auch bei E. MÜLLER die Idee des isotropen Raumes und seiner Flächentheorie noch nicht vorhanden ist, so lassen sich doch seine Gedanken mit erleichterter Terminologie in unseren isotropen Begriffen ausdrücken.

E. MÜLLER betrachtet nämlich die (isotropen) Kugeln (*z*-parallelen Drehparaboloide), welche eine Fläche in einem ihrer (regulären) Punkte berühren, und zeigt, daß es darunter im allgemeinen (d. h. außer an unseren „Nabelpunkten") genau zwei Hauptkugeln gibt, welche stationär, d. h. noch in einem Nachbarpunkte berühren. Die beiden damit in jedem Flächenpunkte definierten Richtungen sind (immer in unserer isotropen Ausdrucksweise) zueinander normal und auf der Fläche konjugiert, und fallen daher mit den isotropen Hauptkrümmungsrichtungen zusammen. Die Integralkurven der Richtungen stationärer Berührung stimmen also mit unseren isotropen Krümmungslinien überein. Sie werden von E. MÜLLER als die *„relativen Krümmungslinien" der Fläche hinsichtlich der Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{P}$ *der (von uns als isotrope Kugeln aufgefaßten) Drehparaboloide mit z-paralleler Achsenrichtung* bezeichnet.

Übrigens treten bei E. MÜLLER[17a]) auch die Größen K und H [in der cartesischen Form (2)] auf, ohne daß eine eigentliche Krümmungstheorie im Sinne unserer Hauptformel (4, 19) oder (4, 25) vorhanden wäre. E. MÜLLER bezeichnet im Rahmen seiner auf die *z*-parallelen Drehparaboloide $\mathfrak{P}$ gestützten Relativgeometrie K als die $\mathfrak{P}$-*Krümmung* und H als die *mittlere* $\mathfrak{P}$-*Krümmung* der Fläche.

67. Invarianz der Krümmungslinien bei isotropen Kugeltransformationen. Dieser MÜLLERschen Auffassung unserer isotropen Krümmungslinien entnimmt man sofort ihre *Invarianz gegen alle Kugeltransformationen*

---

[16]) Vgl. hierzu die ausführliche Darstellung bei E. A. WEISS, Die EULERsche Transformation. Monatshefte f. Math. u. Phys. **44** (1936), S. 326–342 und die dort angegebene Literatur.

[17]) E. MÜLLER, a) Relative Minimalflächen. Monatshefte f. Math. u. Phys. **31** (1921), S. 1–19, insbes. Nr. 4 und S. 17/18. — b) Punktmittenflächen und eine Art relativer Flächentheorie. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa, **134** (1925), S. 255–280, insbes. Nr. 13.

des isotropen Raumes, d. h. gegenüber jenen räumlichen Cremonatransformationen, welche die isotropen Kugeln untereinander vertauschen. Diese isotropen Analoga der Möbiusschen Kugelverwandtschaften bilden eine von elf Parametern abhängige gemischte Gruppe (G_{11}, H_{11}).

Ein komplex-isomorphes Gegenstück davon, das in unserer Ausdrucksweise zu einem indefiniten isotropen Raum gehören würde, dessen absolutes Geradenpaar (1, 2) reell, nämlich von der Form

$$(5,13)\qquad \left.\begin{aligned} x+y&=0\\ t&=0\end{aligned}\right\} e_1, \qquad \left.\begin{aligned} x-y&=0\\ t&=0\end{aligned}\right\} e_2$$

wäre, ist (ohne Eingehen auf seine Bedeutung für den isotropen Raum) bereits von H. Beck sehr ausführlich untersucht worden[18]). Die analytische Darstellung dieser isotropen Kugeltransformationen gelingt leicht auf Grund der Bemerkung, daß sie sich im Grundriß als gewöhnliche (direkte bzw. indirekte) Möbiussche Kreistransformationen auswirken. Wie H. Beck gezeigt hat, und man aus allgemeineren Entwicklungen von D. Barbilian[19]) entnehmen kann, eignen sich aber vor allem Ternionen zur Darstellung dieser aus verschiedenen Gründen interessanten Gruppe. Ich gedenke auf sie im Zusammenhang mit den Bemerkungen der Nr. 65 zurückzukommen.

68. Weitere Bemerkungen über relative und isotrope Differentialgeometrie. Wie bekannt, stützt sich E. Müllers fruchtbare Idee der relativen Differentialgeometrie auf einen älteren Gedanken von S. Lie[20]) über eine Verallgemeinerung des Begriffes der Krümmungslinien. Vor allem aber stellt sie den Zusammenhang her mit den allgemeinen, von Minkowski eingeführten relativen Maßbestimmungen bei denen eine beliebige Eichfläche und ein beliebiger Punkt als ihr „Mittelpunkt" die Rolle der euklidischen Einheitskugel und ihres Mittelpunktes übernehmen.

Es läge in unserem Falle nahe, auch für die Differentialgeometrie des isotropen Raumes den analytischen Apparat von vornherein anzuwenden, über den heute die relative Differentialgeometrie, diese vielleicht am weitesten gedrungene Schöpfung meines Lehrers E. Müller, verfügt, vor allem dank der Arbeiten von W. Süss, W. Blaschke, A. Duschek, T. Kubota,

---

[18]) H. Beck, a) Eine Cremonasche Raumgeometrie. Journ. f. reine u. angew. Math. **175** (1936), S. 129–158. — b) Über Ternionen in der Geometrie. Math. Zeitschr. **40** (1935), S. 509–520, insbes. § 17.

[19]) D. Barbilian, Galileische Gruppen und quadratische Algebren (mit einem Anhang: Grundriß einer geometrischen Algebrenlehre). Bull. math. soc. Roum. de sci. **40** (1938), S. 7–64.

[20]) S. Lie, Über Komplexe, insbesondere Linien- und Kugelkomplexe. Math. Annalen **5** (1872), S. 195ff., insbes. Nr. 46 = Ges. Abhandl. II. Bd., 2. Abt., 1. Teil, S. 55/56.

J. Hirakawa, L. Berwald u. a. Als Eichfläche könnte dabei eine isotrope Einheitskugel und als Mittelpunkt ein beliebiger Raumpunkt dienen.

Wenn dies hier nicht geschieht, so hat das in der Hauptsache zwei sich ergänzende Gründe. Der erste (an sich weniger wesentliche) Grund ist der, daß die meisten Anwendungen der relativen Differentialgeometrie, ja sogar manche ihrer mit Minkowski ab ovo durchgeführten Entwicklungen als Eichfläche ein geschlossenes Oval voraussetzen, das dann auch gerne zentriert gedacht wird[21]), wobei ihr Zentrum (oder doch irgendein anderer ausgezeichneter eigentlicher Punkt) als Eichmittelpunkt dient. Die Radien nach den Punkten der Eichfläche übernehmen dabei die Rolle der Normalen („Relativnormalen") des Flächenpunktes und der auf die Eichfläche durch parallele Tangentialebenen bezogenen Flächen im Raume. — Im Gegensatz dazu ist nun die im isotropen Raume als Eichfläche zu verwendende isotrope Kugel als Paraboloid eine offene Fläche. Überdies ist. das macht den zweiten, wesentlicheren Grund, im Hinblick auf die isotrope Bewegungsgruppe (1, 4) keiner ihrer inneren Punkte vor dem anderen ausgezeichnet, so daß er als natürlicher Mittelpunkt der Eichfläche vorzugsweise in Frage käme. Es gibt im isotropen Raume und hinsichtlich seiner Kugeln überhaupt nur einen ausgezeichneten Punkt, nämlich seinen *absoluten Punkt*, den Fernpunkt U aller vollisotropen Geraden (Nr. 1). Die auf ihn zu gründende relative Definition der Flächennormalen stimmt zwar mit der isotropen Definition (Nr. 43) überein, eine Anwendung des analytischen Apparates der relativen Differentialgeometrie für einen Fernpunkt als Mittelpunkt der Eichfläche ist aber nicht möglich.

Aus diesen Gründen erweist es sich am günstigsten, die Entwicklung der Differentialgeometrie des isotropen Raumes in erster Linie auf die isotrope Bewegungsgruppe G_6 (1, 4) zu stützen und sie als deren Invariantentheorie zu entwickeln, und die Gedanken der relativen Differentialgeometrie erst dann heranzuziehen, wenn es durch das Versagen oder Trivialwerden gewisser metrischer Begriffe des isotropen Raumes unumgänglich wird. Eine solche Notwendigkeit wird sich z. B. einstellen, wenn wir bei späterer Ge-

[21]) Wie ausschließlich man gerne in der relativen Differentialgeometrie an *geschlossene Eichflächen* denkt, zeigt ein von T. Kubota [Krümmungstheorie in der relativen Flächentheorie. Japan. Journ. of Mathem. XII/2 (1935), S. 21—26] formuliertes *Theorem über die Gültigkeit des Meusnierschen Satzes in der relativen Differentialgeometrie*: „Wenn die durch eine feste Flächentangente möglichen ebenen Schnitte einer beliebigen (regulären) Fläche *Relativschmiegkreise* haben sollen, die einer *Meusnierschen Relativkugel* angehören, *so muß die Eichfläche notwendig ein Ellipsoid sein.*" — Der hier gegen das Resultat unserer Nr. 47 auftretende Widerspruch ist nur scheinbar. Kubota legt eben seiner Untersuchung stillschweigend eine geschlossene Eichfläche zugrunde, so daß der im isotropen Raum realisierte Fall des Paraboloids als weitere mögliche Eichfläche nicht erfaßt wird.

legenheit (Abschn. VIII) versuchen werden, die in Nr. 60 definierten *isotropen Minimalflächen* dadurch als ihres Namens berechtigt nachzuweisen, daß wir ein (geometrisch nur aus Relativbegriffen zu gewinnendes) Variationsproblem aufstellen, dessen Extremalflächen sie sind.

69. Relativgeometrische Kennzeichnung der isotropen Krümmungslinien. Gleichwohl ist es manchmal auch aus anderen, z. B. elementargeometrischen Gründen von Vorteil, die Ideen der relativen Differentialgeometrie heranzuziehen. Das ist der Fall, wenn es sich z. B. in unserem Falle darum handelt (ähnlich wie im euklidischen Falle), eine Kennzeichnung der Krümmungslinien durch das Verhalten der Flächennormalen zu gewinnen. Man kann dann nämlich mit E. Müller[17a]) eine beliebige isotrope Kugel als Eichfläche und einen beliebigen (z. B. inneren) Punkt O als ihren Mittelpunkt nehmen. Erklärt man dann die von O ausstrahlenden Radien der Kugel als „Relativnormalen" ihrer Tangentialebenen — eine Definition, die natürlich isotropen Bewegungen gegenüber nicht invariant ist —, so gilt das folgende Müllersche Theorem:

Längs der isotropen Krümmungslinien bilden die (wie erwähnt: nicht bewegungsinvarianten) Relativnormalen einer Fläche Torsen.

Man kann diesem Satze durch besondere Wahl der Kugelmitte O eine bemerkenswerte Form geben, die gleichfalls von E. Müller[22]) herrührt. Erklärt man nämlich den Brennpunkt der isotropen Kugel als ihre Relativmitte, so kann man sagen, daß *die Relativnormalen einer Fläche aus den z-parallelen Geraden (d. h. aus den isotropen Flächennormalen!) durch elementargeometrische Spiegelung (Reflexion) an der Fläche entstehen.* Man hat so die folgende bemerkenswerte *elementargeometrische Kennzeichnung der isotropen Krümmungslinien*:

Werden die zur z-Achse parallelen Strahlen (= die isotropen Flächennormalen) an einer Fläche reflektiert, so erhält man eine Strahlenkongruenz, die man als Relativnormalenkongruenz der Fläche deuten kann. Die Torsen dieser Kongruenz schneiden die Fläche nach ihren isotropen Krümmungslinien.

Diesem interessanten elementargeometrischen Ergebnis kommt jedoch — der fehlenden isotropen Bewegungsinvarianz wegen — an sich, wie schon gesagt, keine eigentliche Bedeutung im Rahmen der Geometrie des isotropen Raumes zu.

---

[22]) E. Müller, [17a]) Satz 2. — Die Brennflächen dieser Kongruenz von Relativnormalen sind die elementargeometrischen Brennpunktsörter der isotropen Hauptkugeln der Fläche, d. h. die relativgeometrischen Gegenstücke der Zentraflächen.

70. Isotrope Kennzeichnung der Krümmungslinien. Es gibt aber natürlich auch einfache *isotrop-geometrische Kennzeichnungen* dieser *Krümmungslinien*, in Formulierungen, die auch im euklidischen Falle Bestand haben. Zwar kann man dazu die untereinander parallelen isotropen Flächennormalen nicht heranziehen, wohl aber z. B. die in Nr. 21 eingeführten Streifennormalen. In der Tat gilt (wie im euklidischen Falle) folgender Satz:

Längs der isotropen Krümmungslinien einer Fläche bilden die Streifennormalen Torsen. Dies ändert sich nicht, wenn man die Streifennormalen um die Kurventangenten um denselben Neigungswinkel ψ dreht[23]).

Natürlich bleibt die Streifennormale dabei in einer und derselben isotropen Ebene und der Neigungswinkel ψ ist im Sinne der Formel (1, 15) eigentlich als Neigung schlechthin zu verstehen.

71. Die krümmungsfesten Ähnlichkeiten. Wir haben in den Abschnitten IV und V die Krümmungstheorie der Flächen des isotropen Raumes als Invariantentheorie den Flächen gegenüber der G_6 von isotropen Bewegungen (1, 4) entwickelt. Daraus darf man nicht folgern, daß alle unsere Ergebnisse für die Krümmungsverhältnisse der Flächen nur dieser Gruppe gegenüber geometrische Bedeutung haben müßten. In der Tat stellt man [z. B. an Hand der expliziten Darstellung $z = z(x, y)$ der Fläche] leicht fest, daß sich die mittlere und die relative Krümmung H und K und damit die Normal-Krümmungsverhältnisse einer Fläche überhaupt sogar gegenüber der siebengliedrigen Gruppe G_7 von isotropen Ähnlichkeiten

$$\left.\begin{aligned} x' &= a + d_1 x - d_2 y \\ y' &= b + d_2 x + d_1 y \\ z' &= c + c_1 x + c_2 y + (d_1^2 + d_2^2) z \end{aligned}\right\} \cdots G_7 \tag{5, 14}$$

invariant verhalten. Man wird diese Transformation darum als die krümmungsfesten Ähnlichkeiten des isotropen Raumes bezeichnen können. Die Invarianz erstreckt sich jedoch nur auf die Normalkrümmung, nicht auch auf die gewöhnliche isotrope Kurvenkrümmung $\varkappa$.

VI. Die Ableitungsgleichungen der isotropen Flächentheorie.

72. Die Gaußschen Ableitungsgleichungen. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{n}$ den vollisotropen Normalenvektor

$$\mathfrak{n} = (0, 0, 1) \tag{6, 1}$$

der Fläche

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v), \tag{6, 2}$$

[23]) Darin steckt natürlich der Satz von JOACHIMSTHAL. Vgl. V. u. K. KOMMERELL, Theorie der Raumkurven und krummen Flächen I. Berlin-Leipzig 1931, S. 64, Satz 2.

so ist unter den in Nr. 40 angenommenen Regularitätsbedingungen

$$[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{n}] = [\bar{\mathfrak{x}}_u, \bar{\mathfrak{x}}_v] = W \neq 0. \tag{6, 3}$$

Man kann also die abgeleiteten Vektoren $\mathfrak{x}_{uu}$, $\mathfrak{x}_{uv}$, $\mathfrak{x}_{vv}$ linear durch $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$ und $\mathfrak{n}$ ausdrücken, so daß etwa

$$\mathfrak{x}_{uu} = \alpha \mathfrak{x}_u + \beta \mathfrak{x}_v + \gamma \mathfrak{n} \tag{6, 4}$$

wird.

Durch Einsetzen von $\mathfrak{x}_{uu}$ in die Definitionsgleichung (4, 18) von L findet man sofort $\gamma = L$. Es ist weiter

$$\bar{\mathfrak{x}}_{uu} = \alpha \bar{\mathfrak{x}}_u + \beta \bar{\mathfrak{x}}_v, \tag{6, 5}$$

woraus wegen (4, 8) folgt

$$\begin{cases} \bar{\mathfrak{x}}_u \bar{\mathfrak{x}}_{uu} = \alpha E + \beta F, \\ \bar{\mathfrak{x}}_v \bar{\mathfrak{x}}_{uu} = \alpha F + \beta G. \end{cases} \tag{6, 6}$$

Nun ist $\bar{\mathfrak{x}}_u^2 = E$ und $\bar{\mathfrak{x}}_u \bar{\mathfrak{x}}_v = F$, also folgt durch Ableitung nach u:

$$2\,\bar{\mathfrak{x}}_u \bar{\mathfrak{x}}_{uu} = E_u, \quad \bar{\mathfrak{x}}_{uu} \bar{\mathfrak{x}}_v + \bar{\mathfrak{x}}_u \bar{\mathfrak{x}}_{uv} = F_u,$$

d. h. $\bar{\mathfrak{x}}_{uu} \bar{\mathfrak{x}}_v = F_u - \frac{1}{2} E_v$. Daher wird aus (6, 6)

$$\begin{cases} \alpha E + \beta F = \frac{1}{2} E_u, \\ \alpha F + \beta G = F_u - \frac{1}{2} E_v, \end{cases} \tag{6, 7}$$

woraus man folgert

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{E_u G - 2 F_u F + E_v F}{2 (E G - F^2)} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{matrix} \right\}, \\ \beta = \dfrac{-E_u F + 2 F_u E - F_u E}{2 (E G - F^2)} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{matrix} \right\}. \end{cases} \tag{6, 8}$$

Ähnlich drücken sich die Ableitungen $\mathfrak{x}_{uv}$ und $\mathfrak{x}_{vv}$ durch die bezüglich der ersten Grundform genommenen Christoffelschen Symbole und die Fundamentalgrößen M und N aus, so daß man insgesamt die *Gaussschen Ableitungsgleichungen der isotropen Flächentheorie* in folgender Gestalt erhält:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{x}_{uu} &= \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{matrix} \right\} \mathfrak{x}_u + \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{matrix} \right\} \mathfrak{x}_v + L \mathfrak{n}, \\ \mathfrak{x}_{uv} &= \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\} \mathfrak{x}_u + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\} \mathfrak{x}_v + M \mathfrak{n}, \\ \mathfrak{x}_{vv} &= \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\} \mathfrak{x}_u + \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\} \mathfrak{x}_v + N \mathfrak{n}. \end{aligned}} \tag{6, 9}$$

Diese Gleichungen stimmen formal mit jenen aus der euklidischen Flächentheorie überein. Der Unterschied besteht natürlich darin, daß

die Christoffel-Symbole dort bezüglich des euklidischen, hier bezüglich des isotropen Bogenelementes (4, 9) zu bilden sind.

73. Die Ableitungsformeln von Weingarten. Um zum isotropen Gegenstück der nach WEINGARTEN benannten Gleichungen für die Ableitungen des Vektors der Flächennormalen zu gelangen, genügt es im isotropen Raume offenbar nicht, an die vollisotrope Flächennormale $\mathfrak{n}$ (1) anzuknüpfen. Das würde wegen der Konstanz von $\mathfrak{n}$ ja nur zu den trivialen Gleichungen

$$\mathfrak{n}_u = 0, \quad \mathfrak{n}_v = 0 \tag{6, 10}$$

führen. Wir werden vielmehr auf die *Stellung der Tangentialebene* und ihren Bivektor

$$[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v] \tag{6, 11}$$

zurückgreifen müssen, den wir günstig noch durch Division durch seinen (im Grundriß ablesbaren) isotropen Flächeninhalt

$$[\bar{\mathfrak{x}}_u, \bar{\mathfrak{x}}_v] = W \tag{6, 12}$$

zum Betrage eins normieren, d. h. als *Einheitsbivektor der Tangentialebene* wählen und mit $\mathfrak{N}$ bezeichnen:

$$\mathfrak{N} = \frac{[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]}{W}. \tag{6, 13}$$

Wir führen daneben noch sinngemäß die beiden Bivektoren ein, welche durch $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{x}_u$ bzw. $\mathfrak{x}_v$ bestimmt sind, und setzen

$$\mathfrak{U} = [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{n}], \quad \mathfrak{V} = [\mathfrak{x}_v, \mathfrak{n}]. \tag{6, 14}$$

Mit $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$, $\mathfrak{n}$ sind auch $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{N}$ linear unabhängig, so daß es möglich ist, zu Ableitungsgleichungen dieser Bivektoren zu gelangen.

Zunächst folgt aus (14) und den GAUSSschen Gleichungen (9) das Formelsystem

$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{U}_u &= \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1\end{matrix}\right\}\mathfrak{U} + \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 2\end{matrix}\right\}\mathfrak{V}, \\ \mathfrak{U}_v = \mathfrak{V}_u &= \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1\end{matrix}\right\}\mathfrak{U} + \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2\end{matrix}\right\}\mathfrak{V}, \\ \mathfrak{V}_v &= \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1\end{matrix}\right\}\mathfrak{U} + \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2\end{matrix}\right\}\mathfrak{V}. \end{aligned}} \tag{6, 15}$$

Ferner erhält man aus (13) durch Ableiten

$$\left|\begin{aligned} \mathfrak{N}_u &= \frac{[\mathfrak{x}_{uu}, \mathfrak{x}_v] + [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_{uv}]}{W} - \frac{W_u}{W^2}[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v], \\ \mathfrak{N}_v &= \frac{[\mathfrak{x}_{uv}, \mathfrak{x}_v] + [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_{vv}]}{W} - \frac{W_v}{W^2}[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v], \end{aligned}\right. \tag{6, 16}$$

und daraus ergibt sich, wieder auf Grund der GAUSSschen Gleichungen und der Bezeichnungen (14), das *System der WEINGARTENschen Ableitungsgleichungen der isotropen Flächentheorie*:

$$(6,17)\qquad \boxed{\begin{aligned}\mathfrak{N}_u &= \frac{M}{W}\,\mathfrak{U} - \frac{L}{W}\,\mathfrak{V},\\ \mathfrak{N}_v &= \frac{N}{W}\,\mathfrak{U} - \frac{M}{W}\,\mathfrak{V}.\end{aligned}}$$

74. Integrabilitätsbedingungen. Bestimmung einer Fläche durch die beiden Grundformen. Kennen wir mit den GAUSSschen und WEINGARTENschen Formeln das (vollständige) System der Ableitungsgleichungen für die Flächen des isotropen Raumes, so erhebt sich die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen, unter denen sechs vorgegebene Funktionen E, F, G, L, M, N von u und v die beiden Grundformen einer (nur bis auf isotrope Bewegungen und Umlegungen bestimmten) Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ bestimmen.

Die zwischen den sechs Fundamentalgrößen bestehenden Abhängigkeiten reduzieren sich auf die *Integrabilitätsbedingungen der GAUSSschen Ableitungsgleichungen*, d. h. auf

$$(6,18)\qquad \begin{cases}(\mathfrak{x}_{uu})_v = (\mathfrak{x}_{uv})_u,\\ (\mathfrak{x}_{uv})_v = (\mathfrak{x}_{vv})_u.\end{cases}$$

Die Integrabilitätsbedingungen der WEINGARTENschen Gleichungen, d. h. die Gleichungen

$$(6,19)\qquad \mathfrak{N}_{uv} = \mathfrak{N}_{vu}$$

sind eine Folge von ihnen.

Die Integrabilitätsbedingungen (18) bedeuten das Verschwinden der Vektoren

$$(6,20)\qquad \begin{cases}(\mathfrak{x}_{uu})_v - (\mathfrak{x}_{uv})_u = \alpha_1\mathfrak{x}_u + \beta_1\mathfrak{x}_v + \gamma_1\mathfrak{n},\\ (\mathfrak{x}_{uv})_v - (\mathfrak{x}_{vv})_u = \alpha_2\mathfrak{x}_u + \beta_2\mathfrak{x}_v + \gamma_2\mathfrak{n},\end{cases}$$

d. h. das Verschwinden der sechs Koeffizienten rechter Hand.

Wie im euklidischen Falle führen die vier Gleichungen $\alpha_i = 0$ und $\beta_i = 0$ auf dieselbe Bedingung. Sie kann im isotropen Raume dahin formuliert werden, daß die Gleichung

$$(6,21)\qquad \boxed{K_a = -\frac{1}{4W^4}\begin{vmatrix}E & E_u & E_v\\ F & F_u & F_v\\ G & G_u & G_v\end{vmatrix} - \frac{1}{2W}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v - F_u}{W}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F_v - G_u}{W}\right)\right\} = 0}$$

in u und v identisch erfüllt ist. Dies beinhaltet das *Theorema egregium des isotropen Raumes, welches besagt, daß das Bogenelement der Fläche*

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{6, 22}$$

verschwindende Gausssche oder Absolutkrümmung K_a hat.

Die Bedingungen $\gamma_i = 0$ ergeben schließlich, so wie auch im euklidischen Falle, die beiden *Mainardi-Codazzischen Gleichungen*:

$$\boxed{\begin{aligned} &(EG - 2FF + GE)(L_v - M_u) \\ &-(EN - 2FM + GL)(E_v - F_u) \end{aligned} + \begin{vmatrix} E & E_u & L \\ F & F_u & M \\ G & G_u & N \end{vmatrix} = 0,}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &(EG - 2FF + GE)(M_v - N_u) \\ &-(EN - 2FM + GL)(F_v - G_u) \end{aligned} + \begin{vmatrix} E & E_v & L \\ F & F_v & M \\ G & G_v & N \end{vmatrix} = 0.} \tag{6, 23}$$

Sie würden sich übrigens auch als die Integrabilitätsbedingungen der Weingartenschen Gleichungen (17) ergeben.

Fassen wir das Ergebnis zusammen, so gilt nach den Existenzsätzen aus der Lehre von den partiellen Differentialgleichungen der folgende für die Flächentheorie des isotropen Raumes grundlegende Satz:

Sind das Theorema egregium (21) *und die Mainardi-Codazzischen Gleichungen* (23) *erfüllt, so ist durch die sechs Fundamentalgrößen E, F, G, L, M, N eine Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ des isotropen Raumes festgelegt, und zwar eindeutig bis auf isotrope Bewegungen und Umlegungen.*

75. Eine Anwendung der Codazzischen Gleichungen: Der Satz von G. Scheffers über die Flächen fester Relativkrümmung. Meine vor kurzem erschienene Note über die Flächen fester Relativkrümmung

$$K = rt - s^2 = \text{const.} \neq 0 \tag{6, 24}$$

des isotropen Raumes[2]) enthält als eines ihrer hauptsächlichen Ergebnisse eine sehr einfache geometrische Erzeugung dieser aus vielen Gründen bemerkenswerten Flächen. *Man kann nämlich, wie ich bewies und schon erwähnt wurde, diese Flächen* (24) *mit Hilfe der auch im isotropen Raume vorhandenen Cliffordschen Schiebungen aus ihren Asymptotenlinien als Cliffordsche Schiebfläche erzeugen.*

Der Beweis dieses Theorems stützte sich dabei auf folgenden schon von G. Scheffers[24]) stammenden Satz:

Bei den Flächen $rt - s^2 = K = \text{const.}\ (\neq 0)$, und nur bei ihnen, bilden die Asymptotenlinien im Grundriß ein Schiebnetz.

---

[24]) G. Scheffers, Eigenschaften der Integralflächen der partiellen Differentialgleichung $s^2 - rt = \text{const}$. Math. Zeitschr. **5** (1919), S. 112—117; insbes. S. 114.

Da die Schiebnetze die einzigen TSCHEBYSCHEFF-Netze (= äquidistante Netze, $E = G = 1$) der Ebene sind, und die isotrope Flächenmetrik sich im Grundriß als gewöhnliche euklidische Metrik äußert, kann dieser Satz von SCHEFFERS in isotroper Ausdrucksweise auch so formuliert werden und bildet dann das isotrope Gegenstück eines bekannten Satzes von HAZZIDAKIS über euklidische Flächen konstanter GAUSSscher Krümmung:

Auf den Flächen fester Relativkrümmung $K = \text{const.} \neq 0$ des isotropen Raumes, und nur auf ihnen, bilden die Asymptotenlinien ein äquidistantes (= TSCHEBYSCHEFF-)Netz.

Wir wollen diesen Satz mit unseren Mitteln beweisen, und beziehen zu dem Zwecke die Fläche auf Asymptotenparameter. Man hat dann

$$L = N = 0 \tag{6, 25}$$

und nach (5, 1)

$$K = \frac{-M^2}{EG - F^2} = \text{const.} \neq 0, \tag{6, 26}$$

also

$$M^2 = -K(EG - F^2) \neq 0. \tag{6, 27}$$

Ziehen wir für unsere Fläche konstanter Relativkrümmung die CODAZZI-MAINARDIschen Gleichungen (23) heran! Sie lauten wegen (25) und (27) und nach Kürzung durch $M \neq 0$

$$\begin{cases} +2\frac{M M_u}{K} + 2F(E_v - F_u) - (EG_u - GE_u) = 0, \\ -2\frac{M M_v}{K} + 2F(F_v - G_u) - (EG_v - GE_v) = 0. \end{cases} \tag{6, 28}$$

Berechnet man nun die Größen $2MM_u$ und $2MM_v$ durch Ableitung von (27), so findet man für (28) einfach

$$\begin{cases} EG_u - FE_v = 0, \\ FG_u - GE_v = 0. \end{cases} \tag{6, 29}$$

Daraus folgt, da die Determinante $EG - F^2 \neq 0$ ist, zunächst

$$E_v = 0, \quad G_u = 0, \tag{6, 30}$$

d. h.

$$E = E(u), \quad G = G(v), \tag{6, 31}$$

und durch Einführung der neuen Parameter

$$u' = \int \sqrt{E(u)}\, du, \quad v' = \int \sqrt{G(v)}\, dv \tag{6, 32}$$

endlich

$$E' = G' = 1. \tag{6, 33}$$

Damit ist zunächst gezeigt, daß die Asymptotenlinien auf den Flächen fester Relativkrümmung wirklich ein äquidistantes Netz bilden.

Bleibt noch die Umkehrung, d. i. der Nachweis dafür, daß äquidistante Netze aus Asymptotenlinien nur auf Flächen fester Relativkrümmung $K = \text{const.}$ möglich sind.

Es sei also für die Asymptotenlinien als Parameterlinien, d. h. für $L = N = 0$ die Bedingung der Äquidistanz

$$E = G = 1 \tag{6, 34}$$

erfüllt. Dann ergeben die CODAZZI-MAINARDischen Gleichungen:

$$\begin{cases} (1 - F^2) M_u + M F F_u = 0, \\ (1 - F^2) M_v + M F F_v = 0. \end{cases} \tag{6, 35}$$

Dies besagt aber nach (26) und (34), daß für die Relativkrümmung K

$$K_u = 0, \quad K_v = 0 \tag{6, 36}$$

gilt, also in der Tat für die Fläche $K = \text{const.}$ ist.

VII. Sphärische Abbildung und Richtungsbild.

76. Das sphärische Bild. Mehr als die euklidische hat die isotrope Flächentheorie in ihren Problemen mit Vorteil die sphärische Abbildung der Flächen oder deren Verknüpfung mit der stereographischen Projektion, das sogenannte Richtungsbild der Flächen heranzuziehen.

Wir erklären als Einheitskugel des isotropen Raumes die isotrope Kugel vom Parameter minus eins:

$$z = -\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2). \tag{7, 1}$$

Bilden wir auf sie vermittels paralleler Tangentialebenen die Punkte $\mathfrak{x}(x, y, z)$ der Fläche

$$\mathfrak{x}(u, v) \cdots \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v) \end{cases} \tag{7, 2}$$

ab, so ergibt sich der *sphärische Bildpunkt* $\mathfrak{X}(X, Y, Z)$

$$\mathfrak{X}(u, v) \cdots \begin{cases} X = + \dfrac{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}}{W}, \\ Y = + \dfrac{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}}{W}, \\ Z = -\tfrac{1}{2}(X^2 + Y^2) = -\tfrac{1}{2} \nabla z(u, v), \end{cases} \tag{7, 3}$$

wobei

$$\nabla z(u, v) = \frac{E z_v^2 - 2 F z_u z_v + G z_u^2}{E G - F^2} = -\frac{\begin{vmatrix} E & F & z_u \\ F & G & z_v \\ z_u & z_v & 0 \end{vmatrix}}{E G - F^2} \tag{7, 4}$$

den bezüglich der ersten Grundform (4, 9) genommenen *ersten Beltramischen Differentiator* von $z(u, v)$ bedeutet.

77. Das Richtungsbild. Der Übergang zum Grundriß des sphärischen Bildes kann im isotropen Raume als stereographische Projektion der Einheitskugel (1) aus ihrem absoluten Fernpunkt gedeutet werden. Der entstehende Bildpunkt

(7, 5) $$\mathfrak{X} = (X, Y)$$

kann im Anschluß an eine Ausdrucksweise der Darstellenden Geometrie als das Richtungsbild des Flächenpunktes $\mathfrak{x}$ bezeichnet werden.

Merken wir noch die Formeln für das sphärische und Richtungsbild der Fläche bei *expliziter* Darstellung

(7, 6) $$z = z(x, y)$$

an. Man hat

(7, 7) $$\mathfrak{X} \cdots \left\{ \begin{array}{l} X = -\,p(x, y) \\ Y = -\,q(x, y) \\ Z = -\,\frac{1}{2}\,\nabla\, z(x, y) = -\,\frac{1}{2}\,(p^2 + q^2). \end{array} \right\} \cdots \overline{\mathfrak{X}},$$

78. Die dritte Grundform. Der Satz von Beltrami-Enneper. Aus den Formeln (7) ergibt sich für das *Bogenelement dS des sphärischen Bildes* und das ihm gleiche *des Richtungsbildes*

(7, 8) $$dS^2 = III = dX^2 + dY^2 = (r\,dx + s\,dy)^2 + (s\,dx + t\,dy)^2.$$

Mit Hilfe der Formeln (4, 25) und (5, 3) bestätigt man leicht, daß auch im isotropen Raum diese dritte Grundform III mit der ersten und zweiten durch die Relation

(7, 9) $$\boxed{K \cdot I - 2H \cdot II + III = 0}$$

verbunden ist. Wir schreiben allgemein:

(7, 10) $$dS^2 = III = 2H \cdot II - K \cdot I = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2.$$

Daraus folgert man in bekannter Weise die Gültigkeit des Satzes von Beltrami und Enneper für die Torsionen τ der sich in einem Flächenpunkte der Relativkrümmung K kreuzenden Asymptotenlinien: Wegen $II = 0$ hat man für sie

(7, 11) $$\tau = \frac{dS}{ds} = \pm \sqrt{\frac{III}{I}} = \pm \sqrt{-K},$$

was sich übrigens auch ohne (11) durch elementare Rechnung erweisen ließe[2]).

79. Definition der Relativkrümmung K im Sinne von Gauss. Man kann die *Relativkrümmung* K in Übertragung eines Gaussschen Gedankens als den *Grenzwert* des Quotienten korrespondierender Flächenelemente dF und df

des sphärischen Bildes und der Fläche auffassen. Man hat nämlich nach (4, 12) für die Flächeninhalte korrespondierender Bereiche

$$(7,12)\qquad \begin{cases} F = \iint_{\mathfrak{B}} \frac{\partial (X, Y)}{\partial (u, v)}\, du\, dv, \\ f = \iint_{\mathfrak{B}} \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}\, du\, dv. \end{cases}$$

Zieht man F und f entsprechend auf Punkte zusammen, so hat man nach (7) in der Tat

$$(7,13)\qquad \lim \frac{dF}{df} = \frac{\partial (X, Y)}{\partial (u, v)} \cdot \frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} = \frac{\partial (X, Y)}{\partial (x, y)} = \begin{vmatrix} -r & -s \\ -s & -t \end{vmatrix} = K.$$

Daraus folgt z. B., daß für Flächen mit der festen Relativkrümmung $K = +1$ bzw. $K = -1$ die sphärische Abbildung und das Richtungsbild direkt bzw. indirekt flächentreu ausfallen.

80. Die Konformität des sphärischen Bildes der Minimalflächen. Von mehr Interesse ist die Frage nach jenen Flächen, $z = z(x, y)$, deren sphärisches Bild zur Fläche selbst konform ausfällt.

Für die Abbildungsfunktionen (7)

$$(7,14)\qquad \begin{cases} X = -p(x, y), \quad Y = -q(x, y), \\ \frac{\partial (X, Y)}{\partial (x, y)} = K \neq 0 \end{cases}$$

gilt dann

1. im Falle direkter Konformität nach Cauchy-Riemann

$$(7,15)\qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x},$$

d. h. man hat

$$(7,16)\qquad r = t, \quad s = 0.$$

Die Fläche hat dann notwendig eine Gleichung der Form

$$(7,17)\qquad z = \alpha (x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta$$

mit $\alpha \neq 0$, und es folgt der Satz:

Die sphärische Abbildung ist für die isotropen Kugeln, und nur für sie, direkt konform, nämlich eine direkte Ähnlichkeit.

2. Im Falle indirekter Konformität hat man statt (15) die Gleichungen

$$(7,18)\qquad \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x},$$

d. h. es muß gelten:

$$(7,19)\qquad r + t = 0, \quad s = s.$$

Dies bedeutet nach (5, 3), daß die mittlere Krümmung H der Fläche verschwindet. Nach Nr. 60 ergibt sich der Satz:

Die sphärische Abbildung ist für die krummen Minimalflächen des isotropen Raumes ($H = 0$) und nur für sie indirekt konform. Der Grundriß der Fläche ist dann ebenfalls indirekt konform auf das Richtungsbild bezogen.

81. Dualisierung des Bogenelementes. Das im isotropen Raume gültige metrische Dualitätsgesetz legt es nahe, auch die Flächentheorie in einer Weise aufzubauen, die völlig in sich dual ist. Ein solcher *dualistischer Aufbau*, den wir hier aus Gründen der Kürze nicht systematisch durchführten, sondern nur in einigen Punkten besonderen Interesses andeuteten (Nr. 52), würde anzuknüpfen haben an das *zum Bogenelement ds duale Winkelelement $d\vartheta$* zweier benachbarter Tangentialebenen der Fläche. Dieser Winkel $d\vartheta$, dessen Definition durch die Formeln (1, 7) oder (2, 22) geliefert wird, kann auch als der Winkel der parallelen Tangentialebenen des sphärischen Bildpunktes angesehen werden. Er fällt daher (nach den Bemerkungen in Nr. 9) einfach mit dem *Bogenelement dS des sphärischen Bildes* zusammen:

$$(7,20) \qquad \boxed{d\vartheta^2 = dS^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 = III}.$$

VIII. Die Relativoberfläche. Die isotropen Minimalflächen als ihre Extremalen. Assoziierte Minimalflächen. Die isotrope Enneperfläche.

82. Isotroper Flächeninhalt und Plateausches Problem. Das nach Plateau benannte Problem der klassischen Differentialgeometrie verlangt, in eine einfach-geschlossene Raumkurve ein Flächenstück minimalen Inhalts einzuspannen. Es ist heute, wie bekannt, in umfangreichstem Sinne gelöst und man weiß seit Lagrange, daß als seine Lösungen Minimalflächen auftreten, d. h. solche verschwindender mittlerer Krümmung H.

Besieht man das entsprechende Problem des isotropen Raumes, so stellt man sofort fest: Wird die Oberflächendefinition zugrunde gelegt, welche von unserer bisherigen isotropen Inhaltsbestimmung (4, 12) geliefert wird, d. h. mißt man den *Inhalt I des isotropen Flächenstückes $\mathfrak{B}$ durch die elementare Fläche ihres Grundrisses $\mathfrak{B}'$*:

$$(8,1) \qquad I = \iint\limits_{\mathfrak{B}} W\,du\,dv = \iint\limits_{\mathfrak{B}'} dx\,dy,$$

so ist die Plateausche Problemstellung deswegen trivial, weil alle in die einfach-geschlossene Kurve eingespannten isotropen Flächenstücke mit einfach überdecktem Grundriß denselben Inhalt, nämlich jenen ihres Grundrisses haben.

Die Inhaltsbestimmung der Formel (1) hat also zwar den Vorteil, gegen isotrope Bewegungen invariant zu sein, sie leistet auch für viele belangvolle geometrische Fragestellungen die vom euklidischen Falle her erwarteten Dienste (man denke etwa an unsere Übertragung der Gaussschen Definition der Relativkrümmung K in Nr. 79), sie versagt aber, wenn es gilt, das Variationsproblem der Oberfläche im isotropen Raum sinnvoll zu formulieren.

83. Möglichkeit eines nicht-invarianten Oberflächenbegriffes, mit invarianten Extremalen. Es ist aber darum nicht unmöglich, einen neuen Oberflächenbegriff für den isotropen Raum aufzustellen, dessen Variationsproblem gerade von den isotropen Minimalflächen, nämlich jenen mit verschwindender mittlerer Krümmung H gelöst wird. Wir werden dabei allerdings in Kauf nehmen müssen, daß dieser neue Begriff der Oberfläche isotropen Bewegungen gegenüber nicht mehr invariant ist. Das muß aber seinerseits wieder nicht bedeuten, daß auch die Extremalen dieser nicht-bewegungsinvarianten Inhaltsbestimmung gleichfalls nicht-invariant sind. Im Gegenteil! Es wird sich zeigen, daß die Extremalen der jetzt zu definierenden „Relativoberfläche" des isotropen Raumes von durchaus bewegungsinvariantem Charakter sind, nämlich, wie erwähnt, mit seinen Flächen verschwindender mittlerer Krümmung $H = 0$ zusammenfallen.

Damit ist zu den vielen Eigenarten, welche der Geometrie des isotropen Raumes bisher an sich schon anhaften, eine neue, nicht weniger interessante gefügt.

Wenn wir noch an die Bemerkungen in Nr. 44 anschließen, die feststellten, daß im isotropen Raume überall dort, wo eine Invariante immer oder in Einzelfällen versagt, eine andere Invariante als Ersatz vorhanden sei, so werden wir im Hinblick auf die Begriffe *isotrope Oberfläche* und *isotrope Relativoberfläche* feststellen können, daß im isotropen Raume auch dafür gesorgt ist, daß diese Invariante, die Oberfläche, die an sich zwar nichttrivial vorhanden ist, aber gewissen Problemen, wie unserem Variationsproblem gegenüber versagt, ersetzt werden kann durch eine andere, freilich nicht mehr invariante Größe, eben die Relativoberfläche, für die das betreffende Problem wirklich und nichttrivial gelöst werden kann und sogar zu einem durchaus invarianten Resultat, nämlich zu unseren Lösungsflächen verschwindender mittlerer Krümmung führt.

84. Definition der isotropen Relativoberfläche. Wir wählen die isotrope Kugel

$$z = -\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) \tag{8, 2}$$

als Eichfläche und den beliebigen Raumpunkt $\mathfrak{M}$ vom Ortsvektor

$$\mathfrak{M} = (\xi, \eta, \zeta) \tag{8, 3}$$

als „Mittelpunkt" einer Minkowskischen Maßbestimmung. Es sei weiter

$$\mathfrak{X} = \{X, Y, -\tfrac{1}{2}(X^2 + Y^2)\} \tag{8, 4}$$

der in den Formeln (7, 3) bzw. (7, 7) niedergelegte sphärische Bildpunkt des Punktes

$$\mathfrak{x}(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\} \tag{8, 5}$$

der Fläche (7, 2), und

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{X} - \mathfrak{M} \tag{8, 6}$$

der vom Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ zum sphärischen Bildpunkt $\mathfrak{X}$ führende „Radius" der Eichfläche (2), welche auch, wie alle isotropen Kugeln, als Relativkugel bezeichnet wird.

Dann wollen wir mit H. Minkowski[25]) *als isotrope Relativoberfläche O des im Sinne der Nr.* 40 *regulären Flächenstückes* $\mathfrak{B}$ (7, 2) *die Größe*

$$\boxed{O = \iint_{\mathfrak{B}} [\mathfrak{Y}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]\, du\, dv} \tag{8, 7}$$

definieren. Wir können sie sofort in zwei Teile aufspalten; man hat zunächst nach (6)

$$O = \iint_{\mathfrak{B}} [\mathfrak{X} - \mathfrak{M}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]\, du\, dv, \tag{8, 8}$$

also

$$O = \iint_{\mathfrak{B}} [\mathfrak{X}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]\, du\, dv - \iint_{\mathfrak{B}} [\mathfrak{M}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]\, du\, dv. \tag{8, 9}$$

85. Umformung der Relativoberfläche mittels Gaußens Integralformel. Hier hängt der erste Teil von der besonderen Lage des Mittelpunktes $\mathfrak{M}$ zwar nicht mehr ab, er hat aber doch im isotropen Raume *keinerlei absolute, d. h. invariante Bedeutung.* In der Tat ist dieser Teil, den wir mit O^* bezeichnen wollen:

$$O^* = \iint_{\mathfrak{B}} [\mathfrak{X}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]\, du\, dv \tag{8, 10}$$

nichts anderes als *die für den Koordinatenanfang* $\mathfrak{O} = (0, 0, 0)$ *als Mittelpunk der Minkowskischen Metrik genommene Relativoberfläche des Flächenstücks* $\mathfrak{B}$, *also ebensowenig mit der Fläche bewegungsinvariant verknüpft, wie es der Koordinatenanfang* $\mathfrak{O}$ *mit der isotropen Kugel* (2) *ist.*

---

[25]) H. Minkowski, Volumen und Oberfläche. Math. Annalen **57** (1903), S. 447–495; = Ges. Abhandl., II. Bd., Abh. XXVI; insbes. § 8. — Vgl. W. Blaschke, Differentialgeometrie II, S. 205.

Man kann O^* in sehr einfacher Weise und parameterinvariant schreiben. In der Tat findet man durch Eintragen von $\mathfrak{x}$ aus (7, 3)

$$O^* = \tfrac{1}{2} \iint_{\mathfrak{B}} \nabla z(u,v) \cdot W \, du \, dv, \tag{8,11}$$

unter $\nabla z(u, v)$ den auf die z-Koordinate der Fläche angewandten und bezüglich der ersten Grundform (4, 9) genommenen ersten Beltramischen Differentiator (7, 4) verstanden.

Wenden wir uns noch dem zweiten Teile von (9) zu! Er hängt außer von dem Flächenstück $\mathfrak{B}$ nur noch von dem festen, aber an sich beliebigen Mittelpunktsvektor $\mathfrak{M}$ ab, ist also gegenüber isotropen Bewegungen der Fläche (d. h. der Fläche allein) ebenfalls nicht invariant. Wir können aber weiter leicht feststellen, daß dieses zweite oder, wie wir gerne sagen wollen, *dieses „Zusatzglied"*

$$J = \iint_{\mathfrak{B}} [\mathfrak{M}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v] \, du \, dv \tag{8,12}$$

lediglich vom Rande $\mathfrak{R}$ des Flächenstückes $\mathfrak{B}$, nicht aber von der speziellen Fläche $\mathfrak{B}$ (7, 2) selbst abhängt.

In der Tat hat man nach dem Gaussschen Integralsatze

$$\iint_{\mathfrak{B}} [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v] \, du \, dv = \frac{1}{2} \oint_{\mathfrak{R}} [\mathfrak{x}, d\mathfrak{x}], \tag{8,13}$$

woraus durch innere Multiplikation mit $\mathfrak{M}$ folgt:

$$J = \iint_{\mathfrak{B}} [\mathfrak{M}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v] \, du \, dv = \frac{1}{2} \oint_{\mathfrak{R}} [\mathfrak{M}, \mathfrak{x}, d\mathfrak{x}] \,. \tag{8,14}$$

Eine einfache, aber später wichtige Folgerung ist, daß *bei beliebiger Variation des in den Rand $\mathfrak{R}$ eingespannten Flächenstückes $\mathfrak{B}$ das Zusatzintegral J keine Änderung erfährt, d. h. daß*

$$\delta J = 0 \tag{8,15}$$

ist.

Zusammenfassend lautet also die für den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ der Eichfläche (2) gebildete Relativoberfläche O eines regulären Stückes $\mathfrak{B}$ der Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$:

$$O = O^* - J = \frac{1}{2} \iint_{\mathfrak{B}} \nabla z(u,v) \cdot W \, du \, dv - \frac{1}{2} \oint_{\mathfrak{R}} [\mathfrak{M}, \mathfrak{x}, d\mathfrak{x}] \,. \tag{8,16}$$

Dabei stellt O^* die zum Koordinatenumfang $\mathfrak{O} = (0, 0, 0)$ als Mittelpunkt gehörige Relativoberfläche dar, während das von der Verschiedenheit der

Zentren $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{M}$ herrührende Zusatzglied J nur vom Rande $\mathfrak{R}$ des Flächenstückes abhängt.

86. Verhalten der Relativoberfläche bei isotropen Bewegungen. Wird ein Flächenstück $\mathfrak{B}$ im isotropen Raume bewegt, so erfährt sein sphärisches Bild auf der Einheitskugel (2) ebenfalls eine gewisse Bewegung, die im Sinne der isotropen Kinematik als eine Drehung der Eichkugel aufgefaßt werden kann. Wenn der Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ bei dieser Kugeldrehung mitgenommen wird, so ist klar, daß die Relativoberfläche des alten Flächenstückes, genommen für das alte Eichzentrum einerseits und die Relativoberfläche der neuen Lage des Flächenstückes bezüglich der neuen Lage des Eichzentrums andererseits einander gleich sind. *Bei gleichzeitiger und korrespondierender isotroper Bewegung der Fläche im Raum und des Eichzentrums im System des sphärischen Bildes ist die Relativoberfläche eine isotrope Invariante.*

Es folgt daraus, daß bei der üblichen Auffassung der Minkowskischen Metrik, bei der doch der Mittelpunkt der Metrik als durchaus fest zu betrachten ist, von einer isotropen Bewegungsinvarianz der Relativoberfläche nicht die Rede sein kann. Wenn wir z. B. den Koordinatenanfang $\mathfrak{O} = (0, 0, 0)$ als rechnerisch bequemstes Zentrum wählen und demgemäß als Relativoberfläche einfach den Ausdruck O^* (10) erklären, so ist das, wie oben schon erwähnt, gewiß keine gegen isotrope Bewegungen invariante Definition. In der Tat ist ja die einzige invariante Flächenmaßbestimmung jene, welche durch die elementare Inhaltsformel (1) erklärt ist.

Gleichwohl ist es jedoch, wie schon erwähnt, möglich, daß das Variationsproblem, das sich mit unserer Definition der isotropen Relativoberfläche verknüpfen läßt, auf eine Klasse von Extremalflächen führt, denen im isotropen Raume durchaus invarianter Charakter zukommt. Diese Möglichkeit beruht offenbar darauf, daß nach (16) die bezüglich zweier beliebiger Eichzentren $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ genommenen Relativoberflächen sich nur um ein Randintegral unterscheiden, oder, was dasselbe ist, um ein Doppelintegral — des Typus (12) —, dessen Integrand ein Divergenzausdruck ist.

87. Die erste Variation der Relativoberfläche. Notwendigkeit von $H = 0$ für isotrope Minimalflächen. *Wir wollen als isotrope Minimalflächen die Extremalen des Variationsproblems der isotropen Relativoberfläche erklären und wollen zeigen, daß für solche Flächen notwendig die mittlere Krümmung H (5, 1) verschwindet.*

Wir fanden für H in (5, 3) die invariante Darstellung:

$$H = \tfrac{1}{2}\, \Delta\, z(u, v). \tag{8, 17}$$

Es gilt also, die erste Variation δO der Relativoberfläche zu berechnen, wobei wir uns vorstellen, daß alle zur Konkurrenz zugelassenen Flächenstücke

in den Rand $\mathfrak{R}$ eingespannt seien. Da das Zusatzglied J in (16) als Randintegral verschwindende Variation hat, genügt es, die Relativoberfläche durch O^* zu erklären und sie durch die Formel (11) zu definieren.

Das Flächenstück $\mathfrak{B}$ (7, 2) soll dadurch variiert werden, daß wir auf den (vollisotropen, d. i. z-parallelen) Flächennormalen die Strecken $\varepsilon \cdot \lambda(u, v)$ auftragen. Die variierte Fläche $\bar{\mathfrak{B}}$ hat also folgende Form:

$$\bar{\mathfrak{x}}(u, v) \ldots \begin{cases} \bar{x} = x(u, v), \\ \bar{y} = y(u, v), \\ \bar{z} = z(u, v) + \varepsilon \cdot \lambda(u, v), \end{cases} \tag{8, 18}$$

wobei $\lambda(u, v)$ am gemeinsamen Rande $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{B}$ und $\bar{\mathfrak{B}}$ verschwindet.

Die variierte Relativoberfläche O^* lautet nach (11) wegen des gemeinsamen Parametebereiches

$$\bar{O}^* = \tfrac{1}{2} \iint_{\mathfrak{B}} \nabla \bar{z}(u, v)\, W\, du\, dv. \tag{8, 19}$$

Nach (18) und bekannten Regeln ist nun

$$\nabla \bar{z} = \nabla [z + \varepsilon \cdot \lambda] = \nabla z + 2\varepsilon \nabla(z, \lambda) + \varepsilon^2 \nabla \lambda, \tag{8, 20}$$

wobei

$$\nabla(z, \lambda) = \frac{E z_v \lambda_v - F(z_u \lambda_v + z_v \lambda_u) + G z_u \lambda_u}{EG - F^2} = -\frac{\begin{vmatrix} E & F & z_u \\ F & G & z_v \\ \lambda_u & \lambda_v & 0 \end{vmatrix}}{EG - F^2} \tag{8, 21}$$

den gemischten ersten Beltramischen Differentiator bezeichnet. Es folgt

$$\bar{O}^* = O^* + \varepsilon \iint_{\mathfrak{B}} \nabla(z, \lambda)\, W\, du\, dv + \frac{\varepsilon^2}{2} \iint_{\mathfrak{B}} \nabla \lambda \cdot W\, du\, dv. \tag{8, 22}$$

Die erste Variation der Relativoberfläche O^* ist daher

$$\delta O^* = \iint_{\mathfrak{B}} \nabla(z, \lambda)\, W\, du\, dv. \tag{8, 23}$$

Ihr Verschwinden ist ein notwendiges Kennzeichen der isotropen Minimalflächen.

Die Umgestaltung von δO^* durch partielle Integration, d. i. die Anwendung der Greenschen Formel, gibt nun

$$\iint_{\mathfrak{B}} \nabla(z, \lambda)\, W\, du\, dv = -\oint_{\mathfrak{R}} \lambda \frac{\partial z}{\partial n}\, ds - \iint_{\mathfrak{B}} \lambda\, \Delta z \cdot W\, du\, dv, \tag{8, 24}$$

wobei unter $\frac{\partial z}{\partial n}$ die Ableitung von $z(u, v)$ nach der isotropen [d. h. im Sinne der Riemannschen Metrik (4, 9) verstandenen] Normalenrichtung n des Randes $\mathfrak{R}$ und unter ds sein isotropes Bogenelement (4, 9) gemeint ist. Dabei denken wir uns den Rand $\mathfrak{R}$ in jenem Sinne durchlaufen, bei dem im Grundriß das Innere zur Linken bleibt, und denken auch an die innere Normale n.

In dieser Darstellung der ersten Variation δO^* der Relativoberfläche verschwindet nun das Randintegral, da $\lambda(u, v)$ auf $\mathfrak{R}$ Null sein sollte. Man hat also

$$\delta O^* = -\iint_{\mathfrak{B}} \lambda \Delta z(u, v) \cdot W \, du \, dv, \tag{8,25}$$

und daher ist für isotrope Minimalflächen in der Tat notwendig

$$\Delta z(u, v) = 0. \tag{8,26}$$

Wegen (17) folgt daraus der Satz:

Das Verschwinden der mittleren Krümmung

$$2H = \Delta z(u, v) = 0 \tag{8,27}$$

ist ein notwendiges Kennzeichen der Minimalflächen des isotropen Raumes.

88. Die isotropen Minimalflächen als Extremalen des Dirichletschen Problems. Ihre Darstellung als Potentialflächen. Wir wollen unsere Formeln noch für die explizite cartesische Darstellung $z = z(x, y)$ der Fläche anschreiben. Man hat dann für die auf den Ursprung bezogene isotrope Relativoberfläche

$$\boxed{O^* = \frac{1}{2}\iint_{\mathfrak{B}} \nabla z(x, y) \, dx \, dy = \frac{1}{2}\iint_{\mathfrak{B}} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dx \, dy}. \tag{8,28}$$

Die Variationsformel (22) aber nimmt mit Rücksicht auf (25) die Gestalt an:

$$\bar{O}^* = O^* - \varepsilon \iint_{\mathfrak{B}} \lambda \Delta z(x, y) \, dx \, dy + \frac{\varepsilon^2}{2}\iint_{\mathfrak{B}} (\lambda_x^2 + \lambda_y^2) \, dx \, dy. \tag{8,29}$$

Aus ihr entnimmt man sofort, daß *das zu den isotropen Minimalflächen gehörige Extremum der Relativoberfläche* (28) *stets ein absolutes Minimum ist.*

In der Tat ist für sie nach (27) die Laplacesche *Gleichung*

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \tag{8,30}$$

erfüllt, und das letzte Integral in (29) stets (d. h. abgesehen vom Trivialfalle $\lambda = 0$) positiv.

Das von uns behandelte *Variationsproblem der isotropen Relativoberfläche* (28) ist jenes, das aus der Funktionentheorie als *Dirichletsches Problem* bekannt ist. Wir hatten es oben nur in parameterinvarianter Weise geschrieben. In der Tat weiß man aus der Potentialtheorie, daß die Extremalen des *Dirichletschen Integrals* (28) auf die *Laplacesche Gleichung* (30) als Lagrangesche Gleichung ihres Variationsproblems führen und absolute Minima des Integrals ergeben. Die *Integralflächen der Poten-*

tialgleichung (30) werden gerne als *Potentialflächen*[26]) bezeichnet. Wir können also sagen:

Die Potentialflächen (30) *übernehmen im isotropen Raume die Funktion seiner Minimalflächen. Ihre isotrope mittlere Krümmung H ist Null.*

Man weiß, daß sich (reelle) Flächen dieser Art auch durch die Real- oder Imaginärteile analytischer Funktionen in der einfachen Form

$$z = \Re f(x+iy) \quad \text{oder} \quad z = \Im f(x+iy) \tag{8, 31}$$

darstellen lassen, die als das *isotrope Gegenstück zur* WEIERSTRASSschen *Darstellung der euklidischen Minimalflächen* aufgefaßt werden kann.

Eine relativ-geometrische Auffassung der Potentialflächen als $\mathfrak{P}$-Minimalflächen findet sich schon bei E. MÜLLER[17a]).

89. Die assoziierten und adjungierten (konjugierten) isotropen Minimalflächen. Es ist nicht meine Absicht, an dieser Stelle die ausführliche Theorie der isotropen Minimalflächen darzulegen. Sie wird der Gegenstand einer eigenen Abhandlung sein. Es scheint mir aber doch von Interesse, diese Theorie durch einige im Rahmen dieser Arbeit bleibende Bemerkungen schon jetzt zu beleuchten. Man möge sie nur als vorläufige Beispiele der angekündigten Note und als abschließende Beispiele zur vorliegenden Note auffassen.

Ist

$$w = f(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y) \tag{8, 32}$$

eine analytische Funktion der komplexen Variablen $x+iy$, so bilden die (reellen!) Flächen der Schar (α = reeller Parameter)

$$\boxed{z = \tfrac{1}{2}\left[f(x+iy)\cdot e^{-i\alpha} + \bar{f}(x-iy)\cdot e^{+i\alpha}\right]} \tag{8, 33}$$

das genaue isotrope Gegenstück der euklidischen assoziierten Minimalflächen. Für Parameter α, die sich um $\frac{\pi}{2}$ unterscheiden, ergeben sich dann die adjungierten (oder konjugierten) Paare von isotropen Minimalflächen der Schar.

---

[26]) Auf die Vorstellung dieser Potentialflächen wird oft zur geometrischen Veranschaulichung des DIRICHLETschen Problems zurückgegriffen, z. B. auch von D. HILBERT, Über das DIRICHLETsche Prinzip. Crelle Journ. f. Math. **129** (1905), S. 63—67 (= Ges. Abhandl. III, Berlin 1935, S. 10—14). — Bekanntlich können sie auch als einfache geometrische Realisierungen RIEMANNscher Flächen analytischer Funktionen dienen, eine Vorstellung, die sich auch gerne bei F. KLEIN findet. Man vergleiche z. B. die Bemerkung in F. KLEIN, Ges. Abhandl. **2**, Leipzig-Berlin, S. 77, Fußnote 23. — Verschiedene Modelle von Potentialflächen sind auf KLEINs Veranlassung von W. v. DYCK im Verlage von L. Brill (Darmstadt) herausgegeben worden.

Alle diese Flächen sind im isotropen Raume aufeinander (in einem genau zu präzisierenden Sinne) abwickelbar, nämlich mit (trivialer) Gleichheit der isotropen Bogenelemente, und (nicht trivialer) Gleichheit der Relativkrümmungen K. Im elementaren Sinne konjugierte Potentialflächen, wie etwa die Flächen

$$(8,34) \qquad z = U(x, y) \quad \text{und} \quad z = V(x, y)$$

sind dabei im Sinne unserer isotropen Definition adjungierte Minimalflächen. Dabei entsprechen einander (wie im euklidischen Falle) auf den adjungierten Minimalflächen wechselseitig die Asymptotenlinien und die isotropen Krümmungslinien.

Ähnliches gilt (im euklidischen Wortlaut) für die allgemeinere Zuordnung der assoziierten Minimalflächen, und auch für die sphärischen Bilder bleiben die euklidischen Sätze im Wesen aufrecht.

Mit den Potentialflächen scheint sich als erster vom (euklidischen) differentialgeometrischen Standpunkte aus U. Dini[27]) (1865) befaßt zu haben. Unsere allgemeinen assoziierten Minimalflächen treten (ohne isotrope Bedeutung) erstmalig bei K. Kommerell[28]) (1905) auf. Gewisse Eigenschaften der assoziierten und adjungierten Paare von Potentialflächen sind von den verschiedensten Autoren immer wieder von neuem entdeckt worden.

90. Das isotrope Gegenstück der Minimalfläche von Enneper. Man kennt im euklidischen Raume eine Reihe von besonderen Minimalflächen, denen aus verschiedenen Gründen erhöhtes Interesse zukommt. Im isotropen Raume gibt es zu diesen Flächen genaue Gegenstücke. Um wenigstens ein Beispiel dafür zu geben, will ich noch kurz *das isotrope Gegenstück der Enneperschen Minimalfläche* anführen.

Man kann diese Fläche in einer der beiden folgenden (konjugierten) Formen darstellen

$$(8,35) \qquad z = \Re\,(x + iy)^{\frac{3}{3}} \quad \Big| \quad z = \Im\,(x + iy)^{\frac{3}{3}}$$

oder sie parametrisch so schreiben:

$$(8,36) \qquad \begin{array}{l|l} x = u^3 - 3uv^2 & x = u^3 - 3uv^2 \\ y = 3u^2v - v^3 & y = 3u^2v - v^3 \\ z = u^2 - v^2 & z = 2uv \end{array}$$

---

[27]) U. Dini, Sulla teoria delle superficie. Giorn. di Mat. **3** (1865), S. 65–81; insbes. S. 78–81.

[28]) K. Kommerell, a) Riemannsche Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen. Math. Annalen **60** (1905), S. 548–596; insbes. § 13. — b) Theorie der Raumkurven und krummen Flächen II. Berlin-Leipzig 1931, S. 181.

wobei die Parameterlinien $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ die

isotropen Krümmungslinien | Asymptotenlinien

ergeben.

In der Tat sind *beide Flächen zueinander bewegungskongruent* und gehen, wie ihre cartesischen Gleichungen

$$(8,37)\quad 27(x^2+y^2)z^3+(x^2-y^2-4z^3)^3=0 \;\Big|\; 27(x^2+y^2)z^3-(2xy+4z^3)^3=0$$

zeigen, durch Drehung um die vollisotrope z-Achse um den Winkel $\frac{\pi}{4}$ auseinander hervor.

Die Ordnung der Fläche ist also (wie im euklidischen Falle) neun.

Schreibt man die Gleichung der nichtisotropen Ebenen mittels der Koordinaten (U, V, W) in der Form

$$(8,38)\qquad z = Ux + Vy + W,$$

so findet man aus den Ebenengleichungen

$$(8,39)\quad 27(U^2+V^2)^2\cdot W = 4(U^2-V^2) \;\Big|\; 27(U^2+V^2)^2\cdot W = 8UV$$

als Klasse der isotropen ENNEPER-Fläche fünf.

Aus den auf Krümmungs- und Asymptotenparameter bezogenen Darstellungen (36) folgt, daß (wie im euklidischen Falle) die *Asymptotenlinien der isotropen ENNEPER-Fläche kubische Raumkurven* (nämlich isotrope Böschungslinien) und ihre *isotropen Krümmungslinien ebene Kubiken* sind. Die beiden konjugierten Flächen (36) liegen dabei so, daß sich die Grundrisse der Krümmungs- und Asymptotenlinien wechselseitig decken. Zusammen bilden sie zwei isotherme Netze in diagonaler Lage.

91. Die assoziierten isotropen Enneper-Flächen. Die im Sinne der Nr. 89 zu diesen beiden konjugierten ENNEPER-Flächen (35) *assoziierten isotropen Minimalflächen* lauten

$$(8.40)\qquad z = \Re\left[(x+iy)^{\frac{2}{3}}\cdot e^{-ia}\right]$$

oder

$$(8,41)\qquad \begin{cases} x = u^3 - 3uv^2, \\ y = 3u^2v - v^3, \\ z = (u^2-v^2)\cos\alpha + 2uv\cdot\sin\alpha. \end{cases}$$

Sie sind gleichfalls untereinander und zu den beiden obigen isotropen ENNEPER-Flächen (36) *bewegungskongruent.* In der Tat gehen sie aus einer von ihnen, etwa der zu $\alpha = 0$ gehörigen Fläche (36, links) durch Drehung um die vollisotrope z-Achse um den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ hervor; die zu $\alpha = \frac{\pi}{2}$ gehörige konjugierte Fläche (36, rechts), entsteht dabei, wie erwähnt, durch Drehung um $\frac{\pi}{4}$.

Die assoziierten isotropen ENNEPER-*Flächen* (39) *sind* durch gleiche Parameter (u, v) so *aufeinander abgebildet*, daß sich entsprechende Punkte im Grundriß decken. Im isotropen Raume sind die Flächen daher *längentreu*, somit auch konform und *flächentreu* aufeinander bezogen. Darüber hinaus aber erfreuen sie sich der neuen, d. h. aus der Längentreue noch nicht folgenden, wichtigen Eigenschaft, der *Gleichheit der Relativkrümmungen* und der *Gleichheit der Relativoberflächen* korrespondierender Punkte bzw. Flächenstücke.

Die isotropen assoziierten ENNEPER-*Flächen sind daher* (Nr. 89) *unter Erhaltung der Relativoberflächen im isotropen Raume aufeinander abwickelbar.*

Man stellt leicht fest, daß die isotropen *sphärischen Bilder der Krümmungs- und Asymptotenlinien* unserer ENNEPER-Flächen (oder ihre Richtungsbilder im Sinne der Nr. 75), ähnlich dem euklidischen Falle, *parabolische Kreisbüschel* sind. Darum sind, wie erwähnt, die *Krümmungslinien ebene Kurven* und die *Asymptotenlinien isotrope Böschungslinien*[29]).

92. Erzeugung der isotropen (und euklidischen) Enneper-Flächen als quasielliptische Schiebflächen. Aus einem allgemeinen von mir gegebenen Theorem über die Flächen, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören[30]), kann man folgern, daß *die* ENNEPER-*Fläche des isotropen und des euklidischen Raumes sich in einem geeigneten quasielliptischen Raume durch* CLIFFORDsche *Schiebung ihrer Asymptotenlinien aneinander als Schiebflächen erzeugen lassen.* Der Ausdruck „quasielliptisch" ist dabei im komplexen Sinne, d. h. mit zulässigen Realitätsverschiebungen des quasielliptischen Maßgebildes zu verstehen. Beide Flächen gehören damit (komplex gesehen) zu einer Klasse, auf welche W. BLASCHKE unlängst aufmerksam gemacht hat[31]).

Übrigens gehören sie auch in beiden Fällen zur Klasse der Affinminimalflächen.

---

[29]) Über die *isotropen Böschungslinien* vgl. K. STRUBECKER[1]), insbes. Nr. 26. — Auch im isotropen Raume ist für Böschungslinien das *Verhältnis von Krümmung und Torsion konstant.*

[30]) K. STRUBECKER, Über die Flächen, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören. (Vorläufige Mitteilung.) Anzeiger der Akademie d. Wiss. Wien, Nr. 11 (1941).

[31]) W. BLASCHKE, Ebene Kinematik. Berlin-Leipzig, 1938, § 15.

(Eingegangen am 14. März 1942.)

Isoperimetrische Ungleichungen für konvexe Bereiche mit Ecken.

Von

Alexander Dinghas in Berlin.

1. In einer längeren, in dieser Zeitschrift vor kurzem veröffentlichten Abhandlung[1]) bewies ich durch eine einfache, geometrisch-analytische Methode einige isoperimetrische Gleichungen und Ungleichungen, welche eine von ERHARD SCHMIDT behandelte Aufgabe zum Gegenstand hatten.

Diese Aufgabe beherrscht das ganze isoperimetrische Problem für den n-dimensionalen euklidischen, sphärischen und hyperbolischen Raum und lautet in ihrer einfachsten Gestalt, die uns hier beschäftigen wird, folgendermaßen:

Unter allen, in einem Streifen einer gewöhnlichen Ebene eingeschriebenen, einfach geschlossenen Kurven von der Länge L soll diejenige bestimmt werden, welche das Maximum des eingeschlossenen Inhalts F aufweist[2]).

Die dort zugelassenen Kurven waren beliebig. Es ergab sich dann, daß das Maximum je nach dem Wert von L für zwei Typen von Extremalen eintreten kann, und zwar für die dort als linsenförmige bzw. als Kreis-Rechteck-Extremale bezeichneten Kurven.

Beschränkt man sich nur auf konvexe Kurven C, so kann die vorhin gestellte Aufgabe in dem Sinne verallgemeinert werden, daß man noch eine endliche oder abzählbar unendliche Anzahl von Ecken E_i mit vorgeschriebenen Eckenwinkeln ψ_i vorgibt. Unter Eckenwinkel (vgl. Fig. 1) verstehen wir diejenigen Winkel, welche die Normalen auf die beiden Tangenten in dem betreffenden Winkel bilden. Dabei wird vorausgesetzt, daß E_i nicht auf den beiden Begrenzungsgeraden α, α' liegen. Für diese vier Ecken A_1, A_2, A_3, A_4

[1]) Zum isoperimetrischen Problem in Räumen konstanter Krümmung. Math. Zeitschr. **47** (1942), S. 677–737.

[2]) Isoperimetrische Aufgaben (besonders für konvexe Kurven) in Zusammenhang mit der Breite wurden schon früher behandelt, hauptsächlich von BONNESEN. Wenn an dieser Stelle nur ERHARD SCHMIDT genannt wird, so geschieht dies, weil dieser mit einer bewunderungswürdigen Konsequenz die Aufgabe verallgemeinerte und sie für alle drei Räume konstanter Krümmung, den euklidischen, sphärischen und hyperbolischen, stellte und löste. Für die ältere Literatur vgl. man das Buch von BONNESEN-FENCHEL, Theorie der konvexen Körper. Berlin, Springer, 1935. Die Arbeiten von SCHMIDT sind alle in der Math. Zeitschr. erschienen. Für genaue Angaben vgl. man meine in 1. zitierte Arbeit.

definieren wir als Eckenwinkel ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 die Winkel, welche die Halbtangenten in den betreffenden Ecken mit α bzw. α' bilden. Es werden noch alle $\omega_i < \frac{\pi}{2}$ genommen, wodurch diese Definition der ω_i im wesentlichen mit derjenigen von ψ_i zusammenfällt.

Wir behandeln zuerst folgende Aufgabe:

Unter allen konvexen Kurven, welche dem Streifen

$$-a \leqq x \leqq a \tag{1.1}$$

eingeschrieben sind und die eine Anzahl von „inneren" Ecken E_i mit vorgegebenen Eckenwinkeln ψ_i und dazu noch vorgegebene Randwinkel $\omega_1, \ldots, \omega_4$ aufweisen, soll diejenige bestimmt werden, welche unter vorgegebenem L das Maximum von F aufweist.

Die Extremalen dieses Problems werden sich als der Gestalt nach nicht eindeutig bestimmte Kurven erweisen. Wie wir es ferner an der richtigen Stelle genauer feststellen werden, ist die gestellte Aufgabe nur dann lösbar, wenn L eine gewisse von ψ_i, ω_i und a abhängige Grenze überschreitet. Der Unterschied zwischen linsenförmigen und Kreis-Rechteck-Extremalen verschwindet hier, eigentlich bleiben nur die Kreis-Rechteck-Extremalen, und wir werden sehen, daß für feste ψ_i, ω_i alle Lösungen durch Bewegung von zwei Halbkreisen erhalten werden können. Nach Lösung dieser Aufgabe wird eine ähnliche behandelt, wobei an Stelle des Streifens (1.1) ein Winkelraum bzw. ein Dreieck T genommen wird. Beide Aufgaben führen zu interessanten Verschärfungen der isoperimetrischen Ungleichung für ebene konvexe Kurven.

Für den Fall z. B. einer Kurve C, welche einem Dreieck T oder im Streifen (1.1) eingeschrieben ist, gilt

$$F - La + \pi a^2 \leqq -a^2 \sum_i \left(\operatorname{tg} \frac{\psi_i}{2} - \frac{\psi_i}{2}\right) - a^2 \sum_i \left(\operatorname{tg} \frac{\omega_i}{2} - \frac{\omega_i}{2}\right), \tag{1.2}$$

wenn dabei a den Radius des in T eingeschriebenen Kreises bedeutet, ψ_i die „inneren" Winkel und die ω_i die Winkel von C mit den Seiten des Dreiecks T, oder des Streifen (1.1) sind.

Wählt man in dieser Ungleichung das Dreieck T so, daß die ω_i mit gewissen ψ_i übereinstimmen, so erhalten wir

$$F - La + \pi a^2 \leqq -a^2 \sum_i \left(\operatorname{tg} \frac{\psi_i}{2} - \frac{\psi_i}{2}\right) = -a^2 w. \tag{1.3}$$

Da nun (1.3) auch folgendermaßen geschrieben werden kann,

$$F - La + (\pi + \omega)a^2 = \left(F - \frac{L^2}{4(\pi + w)}\right) + \frac{1}{4(\pi + w)}(L - 2(\pi + w)a)^2 \leqq 0, \tag{1.4}$$

so folgt daraus die zuerst von G. Bol[3]) durch ganz andere Überlegungen bewiesene Ungleichung

$$4\pi F - L^2 \leqq -4F \sum_i \left(\operatorname{tg} \frac{\psi_i}{2} - \frac{\psi_i}{2}\right). \tag{1.5}$$

Soll nun hier das Gleichheitszeichen gelten, so muß

$$L = 2\pi a + a \sum_i \left(\operatorname{tg} \frac{\psi_i}{2} - \frac{\psi_i}{2}\right) \tag{1.6}$$

sein, und zugleich in (1.3) das Gleichheitszeichen gelten. Da dies nur für Kappenbereiche der Fall ist, so ist der Extremalbereich von (1.5) wegen (1.6) ein Kappenbereich, dessen Form sich einfach bestimmen läßt.

Die hier befolgte Methode besteht in der Zuordnung[4]) der Punkte der gegebenen Kurve und einer geeignet gewählten „Extremalen" mittels paralleler Tangenten.

2. *Eine isoperimetrische Gleichung.* Wir betrachten zuerst in der xy-Ebene (Fig. 1) einen Streifen von der Breite $2a$ etwa

$$-a \leqq x \leqq a \tag{2.1}$$

und eine in ihm eingeschriebene konvexe Kurve C. Wir nennen eine Kurve C eingeschrieben in (2.1), wenn diese innerhalb dieses Streifens verläuft und mit den Begrenzungsgeraden α, α' gemeinsame Punkte hat.

Wir setzen voraus, C weist eine endliche oder abzählbar unendliche Anzahl von „inneren" Ecken E_i $(i = 1, 2, \ldots)$ auf mit den Eckenwinkeln ψ_i und bildet mit α, α' die Winkel $\omega_1, \ldots, \omega_4$, wie dies in der Fig. 1 dargestellt ist[5]).

Kurven, welche alle Voraussetzungen der Aufgabe erfüllen, werden im folgenden zulässige Kurven genannt.

Unser Ziel ist zuerst die Aufstellung einer allgemeinen Ungleichung, welche Länge und Inhalt[6]) einer zulässigen Kurve C mit den entsprechenden Größen einer „Extremalen" verbindet.

Dazu konstruieren wir in den Schnittpunkten AA' der Begrenzungsgeraden α, α' mit der x-Achse die Winkel $\gamma = \operatorname{Min}\{\omega_i\}$ (Fig. 1), und be-

---

[3]) G. Bol, Ein isoperimetrisches Problem. Nieuw Arch. v. Wiskunde **20** (1940), S. 171–175.

[4]) Für ähnliche Probleme auch von Bonnesen benutzt [vgl. z. B. Quelques problèmes isopérimétriques. Acta Math. **48** (1926), S. 123–178].

[5]) Damit es allerdings überhaupt eine konvexe Kurve C mit den Winkeln ψ_i und ω_i gibt, muß die selbstverständliche Bedingung

$$\sum_1^4 \omega_i + \sum_i \psi_i \leqq 2\pi$$

erfüllt sein. Daraus folgt auch die Abzählbarkeit der Winkel.

[6]) Gemeint ist hier immer der Inhalt des von C begrenzten Bereiches $\mathfrak{R}$.

schreiben dann diejenigen Halbkreise K_1, K_2 mit dem Radius a, welche die Gerade α, α' und je zwei Seiten des so entstandenen Rhombus berühren, wie dies in der Fig. 1 gezeigt wird. Der Durchschnitt K der beiden Halbkreise K_1, K_2 bildet den „Kern" eines Kappenbereiches, der sich als sehr wichtig erweisen wird. Mit Hilfe von zwei Punkten auf α, α', z. B. B, B', kann man die beliebige „zulässige" Kurve C in zwei Teile C_1 bzw. C_2 zerlegen. Wir behaupten jetzt, daß es möglich ist, mit Hilfe paralleler Tangenten die Kurve C auf eine andere Kurve $\overline{C}$ abzubilden. Dafür betrachten wir irgendeine Stützgerade T von C, und setzen voraus, T hat mit C den Punkt M gemeinsam. Wir ordnen T diejenige zu ihr parallele Tangente T' zu, die K_1 oder K_2 entspricht, je nachdem M C_1 oder C_2 angehört. Auf diese Weise sind die Stützgeraden T von C den Tangenten T' von K_1, K_2 stetig und eindeutig zugeordnet. Wir betrachten zuerst ein Paar zugeordnete Tangenten, die nicht zur y-Achse parallel sind. Die durch $M(x, y)$ zur y-Achse parallele Gerade möge ihre zugeordnete T' in dem Punkt $\overline{M}$ mit Koordinaten x, η schneiden. Diesen Punkt ordnen wir dann dem Punkt M zu. Hat T mit C mehrere Punkte gemeinsam, so wird diese Konstruktion für jeden dieser Punkte wiederholt. Auf diese Weise sind (wegen der gemachten Voraussetzung über die ω_i) der Gesamtheit aller Punkte von C, welche nicht auf α, α' liegen, die Gesamtheit der Punkte $\overline{M}$ stetig zugeordnet, und zwar so, daß zwei verschiedenen M zwei verschiedene $\overline{M}$ entsprechen. Den Eckpunkten (und nur diesen) entsprechen mehrere Punkte $\overline{M}$, die alle auf einer Parallele zur y-Achse liegen. Den „Randpunkten" A_1, A_2, A_3, A_4[7]) ent-

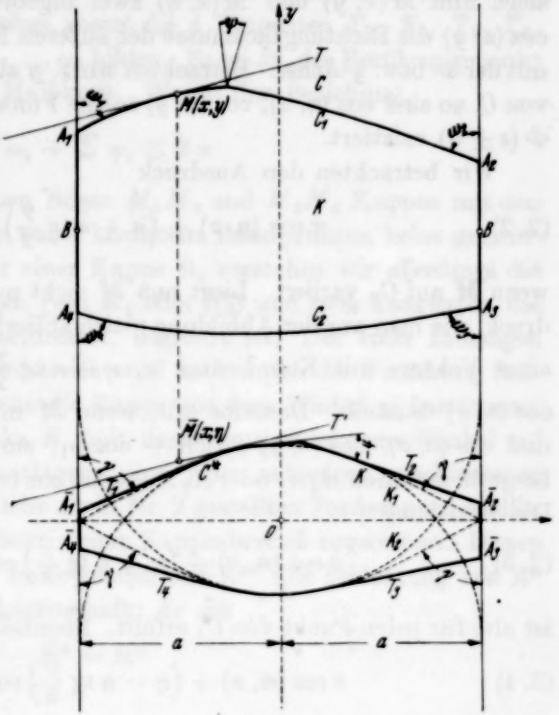

Fig. 1.

[7]) Hat C auf α oder α' nur eine „Randecke", so werden die entsprechenden A_i als zusammenfallende betrachtet. Diesem gemeinsamen Punkt entsprechen dann zwei $\overline{M}$ oder eins, je nachdem die zugehörigen ω_i verschieden oder gleich sind.

sprechen im allgemeinen vier Punkte $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$, $\bar{A}_4$. Die Zuordnung der Punkte zwischen A_1A_2 bzw. A_3A_4 zu den Punkten von $\bar{A}_1\bar{A}_2$, $\bar{A}_3\bar{A}_4$ wird im folgenden nicht gebraucht.

Die Punktmenge $\bar{M}$ begrenzt mit den zwei Geraden einen Bereich $\bar{\mathfrak{R}}$, den zugeordneten Bereich von $\mathfrak{R}$. Wir bezeichnen dessen Inhalt mit $\bar{F}$. Es seien nun $M(x, y)$ und $\bar{M}(x, \eta)$ zwei zugeordnete Punkte, und $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$ die Richtungskosinusse der äußeren Normale n von C im Punkte M mit der x- bzw. y-Achse. Betrachten wir x, y als Funktionen der Bogenlänge s von C, so sind $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$ solche Funktionen $\Phi(s)$ von s, daß immer $\Phi(s \pm 0)$ existiert.

Wir betrachten den Ausdruck

$$x \cos(n, x) + \left(\eta + a \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}\right) \cos(n, y), \tag{2.2}$$

wenn M auf C_1 variiert. Liegt nun M nicht auf α bzw. α', so ist dieser Ausdruck, wie man aus der Abbildung gleich abliest, gleich a, da ja die Projektion eines Vektors mit Koordinaten x, $\eta + a \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ in der Richtung $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$ darstellt. Dasselbe gilt, wenn M mit A_1 bzw. A_2 übereinstimmt und $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$ gleich $-\cos\omega_1$, $\sin\omega_1$ bzw. $\cos\omega_2$, $\sin\omega_2$ sind. Liegt M zwischen A_4A_1 oder A_2A_3, so ist $\cos(n, y) = 0$ und $x\cos(n, x) = a$. Die Beziehung

$$x \cos(n, x) + \left(\eta + a \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}\right) \cos(n, y) = a \tag{2.3}$$

ist also für jeden Punkt von C_1 erfüllt. Ebenfalls bestätigt man die Gleichung

$$x \cos(n, x) + \left(\eta - a \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}\right) \cos(n, y) = a \tag{2.4}$$

für jeden Punkt von C_2.

Fassen wir diese beiden letzten Gleichungen zusammen, so erhalten wir nach Multiplikation mit ds und Integration über die ganze Kurve C

$$\int x \cos(n, x)\, ds + \int \left(\eta \pm a \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}\right) \cos(n, y)\, ds = aL. \tag{2.5}$$

Im zweiten Integral wird allerdings $+$ oder $-$ genommen, je nachdem M auf C_1 oder C_2 liegt.

Wie man unmittelbar einsieht, stellt das erste Integral den Inhalt F von $\mathfrak{R}$ dar, während

$$\int_C \eta \cos(n, y)\, ds = \int_{-a}^{+a} \eta\, dx \tag{2.6}$$

den Inhalt $\bar{F}$ von $\bar{\mathfrak{R}}$ bedeutet.

Hiermit erhalten wir die fundamentale Gleichung[8])

$$F + \overline{F} + 4\,a^2 \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = a\,L, \tag{2.7}$$

welche für jede zulässige Kurve C erfüllt ist.

3. *Die Extremalen.* Wir konstruieren jetzt eine Extremale unseres Problems folgendermaßen: Wir gehen zuerst vom Durchschnitt K der beiden Halbkreise K_1, K_2 aus und ziehen zuerst die 4 Tangenten T_1, T_2, T_3, T_4, welche mit α, α' die Winkel $\omega_1, \ldots, \omega_4$ bilden. Es sei M_i der Berührungspunkt von T_i mit dem zugehörigen Halbkreis. Wegen der Beziehung

$$\sum_1^4 \omega_i + \sum \psi_i \leqq 2\pi \tag{3.1}$$

ist es jetzt möglich, in den freien Bögen M_1M_2 und M_3M_4 Kappen mit den Winkeln ψ_i anzusetzen, welche außer höchstens Randpunkten keine gemeinsamen Punkte besitzen. Unter einer Kappe $\mathfrak{K}_i$ verstehen wir allerdings die Figur, die von einem Kreisbogen (von K_1 oder K_2) und zwei Tangenten, die sich unter einem Winkel ψ_i schneiden, begrenzt ist. Der einer zulässigen Kurve C entsprechende Kappenbereich wird noch durch die Forderung festgelegt, daß die Tangenten, welche die Kappe von dem Winkel ψ_i bestimmen, zu den Halbtangenten der Ecke E_i (mit dem vorgeschriebenen Winkel ψ_i) parallel sind. Durch diese Festlegung sind jeder zulässigen geschlossenen Kurve C, d. h. jeder Kurve, welche die in Nr. 2 gestellten Forderungen erfüllt, ein der Gestalt nach eindeutig bestimmter Kappenbereich zugeordnet. Diesen Kappenbereich bezeichnen wir im folgenden mit $\mathfrak{K}^*$. Die Bedeutung von $\mathfrak{K}^*$ besteht in folgender Extremaleigenschaft: *Es gilt*

$$\overline{\mathfrak{K}}^* = \mathfrak{K}^* \tag{3.2}$$

und infolgedessen

$$\overline{F}^* = F^*. \tag{3.3}$$

Um nun (2. 9) weiter umzuformen, wiederholen wir die Rechnungen von Nr. 2 mit $\mathfrak{K}^*$ an Stelle des von C begrenzten Bereiches $\mathfrak{K}$ unter Berücksichtigung von (3. 3). Wir erhalten dann

$$F^* + F^* + 4\,a^2 \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = a\,L^*, \tag{3.4}$$

wobei L^* die Länge der Begrenzung C^* von $\mathfrak{K}^*$ bedeutet. Durch Subtraktion von (2. 9) folgt dann

$$F - F^* = a\,(L - L^*) - (\overline{F} - F^*). \tag{3.5}$$

Wie unmittelbar aus der Konstruktion von $\overline{\mathfrak{K}}$ bzw. $\mathfrak{K}^*$ folgt, ist der zweite Bereich immer im ersten enthalten und somit stellt die nicht negative Differenz $\overline{F} - F^*$ tatsächlich ein Restglied dar.

[8]) Für $\gamma = 0$ wurde diese Ungleichung zuerst von BONNESEN abgeleitet (l. c. S. 153).

Die Ungleichung (3. 5) gilt auch für $\gamma = 0$. In diesem Fall besteht der Kern des Kappenbereiches aus dem Kreis mit Radius a, der α, α' in A, A' berührt.

4. *Weitere isoperimetrische Gleichungen.* Um weitere isoperimetrische Gleichungen zu erhalten, schneiden wir die Begrenzung C^* von $\mathfrak{K}^*$ in den Punkten A, A' durch und ziehen die beiden Teile von C^* wie zwei Teile eines Teleskops auseinander. Werden diese beiden Teile um q voneinander entfernt, so beträgt der Inhalt F_q^* der so entstandenen Figur $\mathfrak{K}_q^*$, $F^* + 2aq$, während sein Rand C_q^* die Länge $L_q^* = L^* + 2q$ besitzt. Ebenfalls wird der neue Wert von $\overline{F}_q$ (in bezug auf die neu entstandene Figur des Rechtecks mit den zwei angesetzten Halbkreisen, wenn q genügend groß ist) gleich $\overline{F}_q = \overline{F} + 2aq$, und man erhält aus (3. 5) wegen

$$\overline{F} - F^* = \overline{F}_q - F_q^*, \quad F^* - aL^* = F_q^* - aL_q^*, \tag{4. 1}$$

die zweite wichtige isoperimetrische Gleichung

$$F - F_q^* = a(L - L_q^*) - (\overline{F}_q - F_q^*). \tag{4. 2}$$

Hier spielt wieder der Ausdruck $\overline{F}_q - F_q^* \geqq 0$ die Rolle eines Restgliedes, das dann und nur dann verschwindet, wenn C mit der zugehörigen C_q^* übereinstimmt.

Die Gleichung (4. 2), welche für $q = 0$ mit der (3. 5) identisch ist ($\mathfrak{K}_0^*$ ist dann mit dem früheren $\mathfrak{K}^*$ identisch), enthält eine vollständige Beantwortung der in Nr. 2 gestellten Aufgabe. Wir fassen die Ergebnisse im folgenden Satz zusammen:

Für vorgegebene ω_i, ψ_i und L hat die Aufgabe eine Lösung, wenn

$$L \geqq L^* \tag{4. 3}$$

ist, wobei L^* den Rand des in Nr. 3 konstruierten Kappenbereiches $\mathfrak{K}^*$ ist. Ist diese Ungleichung erfüllt, so ist die Extremale eine C_q^* mit $L = L_q^*$.

Der Beweis dieses Satzes folgt aus (4. 2) unmittelbar, wenn man dort q so wählt, daß $L = L_q^*$ wird. Wegen

$$L_q^* = L^* + 2aq \tag{4. 4}$$

ist der Wert von q durch die Forderung $L = L_q^*$ eindeutig bestimmt. Dagegen ist die Gestalt der Extremalen nicht eindeutig bestimmt, da im Falle des Eintreffens des Gleichheitszeichens in $F - F^* \leqq 0$ nur

$$\overline{F} = F_q^* \tag{4. 5}$$

sein muß. Hier tritt das Gleichheitszeichen für alle Kappenbereiche $\mathfrak{K}^*$ mit den Winkeln ψ_i, ω_i ein, die man aus einer derselben durch Verschiebung der Ecken und eventuelle Vertauschung der Kappen erhalten kann. Denn alle

diese Kappenbereiche haben denselben Inhalt F^* und dieselbe Länge L^* bzw. L_η^* [9]).

Zum Beweis dieser Tatsache erinnern wir nochmals an die Konstruktion von $\mathfrak{K}_\eta^*$.

Der Bereich $\mathfrak{K}^*$ mit den Winkeln ψ_i, ω_i wird in $A.\,A'$ durchgeschnitten. Danach werden die beiden Teile so weit auseinandergezogen, bis die Gesamtlänge L_q^* des Randes C_q^* des so entstandenen Bereiches die Länge L erreicht.

Nun zeigt ein Blick auf die Konstruktion von $\mathfrak{K}_q^*$ und $\bar{\mathfrak{K}}_q$, daß (4. 5) dann und nur dann besteht, wenn die Ecken von C mit den entsprechenden Ecken des Randes C^* auf denselben Parallelen zur y-Achse liegen. Da diese Tatsache durch q nicht gestört wird, trifft dies auch für $\mathfrak{K}_q^*$ zu. Wäre nämlich dies für eine Ecke E_i nicht der Fall, so käme, wie man leicht einsieht, zum Bereich $\bar{\mathfrak{K}}$ ein Dreieck von nicht verschwindendem Inhalt hinzu, der $\mathfrak{K}^*$ nicht angehören würde. Da nun aus (4. 5) noch folgt, daß die Begrenzungen $\bar{C}$ von $\bar{\mathfrak{K}}$ und C_q^* übereinstimmen, so ergibt sich also (eventuell mit Ausnahme einer abzählbaren Menge

$$\frac{d\,x}{d\,s} = \frac{d\,x}{d\,\bar{s}}, \qquad \frac{d\,y}{d\,s} = \frac{d\,\eta}{d\,\bar{s}}, \tag{4. 6}$$

wenn $\bar{s}$ die Bogenlänge von C_q^* bedeutet. Da es sich bei C um eine konvexe Kurve handelt, so folgt aus der ersten Differentialgleichung $\bar{s} = s + \text{konst}$, und aus der zweiten

$$y = \eta + \text{konst}. \tag{4. 7}$$

Daraus folgt, daß $\bar{\mathfrak{K}}$ durch Parallelverschiebung von $\mathfrak{K}$ entsteht. Da nun (4. 5) gelten muß, und $\mathfrak{K}_q^*$ konvex ist, entsteht $\mathfrak{K}$ durch Parallelverschiebung seines Kappenbereiches und ist hiermit mit diesem kongruent. Nimmt man jetzt als C irgendeinen „zulässigen" Kappenbereich, so sind alle Bedingungen für das Eintreffen von (4. 5) erfüllt. Da umgekehrt für das Eintreffen von (4. 5) die Übereinstimmung von C und C_q^* erforderlich ist, so folgt daraus, daß (4. 5) nur für Kappenbereiche und nur für diese erfüllt ist. Hiermit ist auch der Beweis des Satzes erbracht worden.

5. *Der Fall eines Winkelraumes.* Wir beschäftigen uns im folgenden mit einer allgemeinen Aufgabe, die sich auf konvexe Kurven mit Ecken bezieht, die in einem Dreieck eingeschrieben sind.

Wir behandeln zuerst folgende speziellere Aufgabe: Es soll ein konvexer Kurvenbogen C bestimmt werden, der zwei Punkte zweier sich schneidender Geraden verbindet (Fig. 2) so, daß der Ausdruck $J - \alpha S$ mit einem festen α ein Maximum wird.

---

[9]) Bei festgehaltenem q.

Dabei sind J und S folgendermaßen definiert: Der Kreis K_0 mit dem Radius a möge α bzw. α' in A bzw. A' berühren. Die Radien OA, OA' und der Kurvenbogen C bestimmen einen Bereich $OABCB'A'O$, dessen

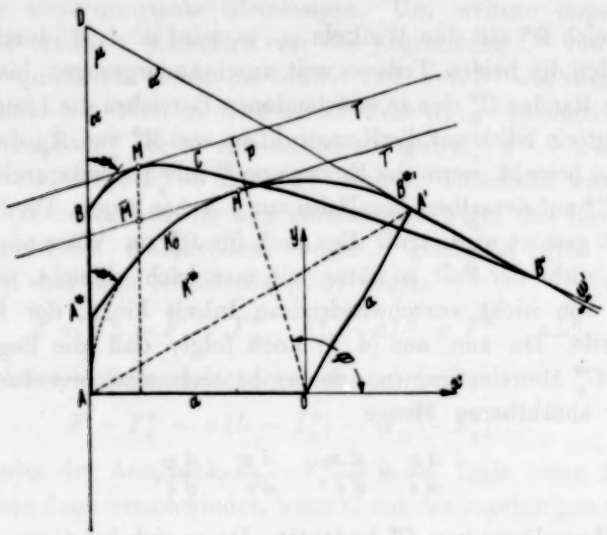

Fig. 2.

algebraischer Inhalt mit J bezeichnet werden soll. Damit wird gemeint, daß J gleich etwa dem Integral

$$J = \int x y' \, ds \tag{5.1}$$

erstreckt in dem üblichen positiven Sinn längs der nicht notwendig konvexen Kurve $AOA'B'BA$ gesetzt werden kann, wobei ds das Bogenelement dieser Kurve bezeichnet.

Ferner ist S gleich der Summe

$$(AB) + \text{Länge } C + (A'B'),$$

wobei (AB) bzw. $(A'B')$ positiv sind, falls die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ bzw. $\overrightarrow{A'B'}$ nach der Spitze D zeigen, und negativ im entgegengesetzten Fall. In der Figur ist z. B. (AB) positiv und $(A'B')$ negativ gezeichnet.

Wir machen noch folgende Voraussetzungen über die Ecken von C:

1) C bildet mit α bzw. α' die Winkel ω, ω' und 2) C besitzt endlich oder abzählbar unendlich viele Ecken, in denen die Normalen nach der früheren Definition die Winkel ψ_i bilden. Diese Winkel erfüllen die für die Lösung der Aufgabe selbstverständliche Bedingung

$$\omega + \omega' + \sum_i \psi_i + \mu \leqq \pi. \tag{5.2}$$

Daß es solche Kurven gibt, werden wir sofort bei der Konstruktion der Extremalen sehen.

Wir wiederholen nun unsere Konstruktion von Nr. 2. mittels paralleler Tangenten auf die beiden Gebiete $OAK_0A'O$ und $OABCB'A'O$. Einem inneren Punkt M von C werden folgende Punkte zugeordnet:

Es sei T eine durch M gehende Stützgerade von C und T' diejenige Tangente von dem Bogen K_0, welche zur T parallel ist. Die durch M zu α parallele Gerade trifft T' in einem Punkt $\overline{M}$, den wir dann M zuordnen. Gehen mehrere Stützgeraden durch M, so werden diesem Punkt mehrere Punkte zugeordnet. Für die übrigen Punkte des Zuges $OABCB'A'O$ führen wir die Zuordnung folgendermaßen durch: Die Punkte von OA, OA' werden sich selbst zugeordnet, ebenfalls die Punkte der Strecke $A'B'$. Für die Punkte der Strecke AB definieren wir die zugeordneten Punkte durch Stetigkeit. Es sei wie in 2. T eine Stützgerade mit Normalrichtung φ. Ist $p(\varphi)$ die Entfernung von T zum Nullpunkt 0 und sind x, y die Koordinaten von M und x, η diejenigen von $\overline{M}$, so ist

$$\eta = y - \frac{p-a}{\sin \varphi}. \tag{5.3}$$

Nun ist $p(\pi) = a$, es gilt also, wenn man $\varphi \to \pi - 0$ konvergieren läßt,

$$\eta_B = y_B - p'(\pi - 0) = y_B - y_B = 0. \tag{5.3}$$

Die Stetigkeit der Zuordnung wird also bewahrt, wenn man den Punkten der Strecke AB die Punkte von AA^* mittels paralleler Stützgeraden zugeordnet, wobei noch A sich selbst zugeordnet wird. Entsprechendes gilt für die Punkte der Strecke $A'B'$.

Durch diese Zuordnung entsteht aus der Menge der Punkte M von $OABCB'A'O$ eine Punktmenge $(\overline{M})$, welche eine geschlossene Kurve $\overline{C}$ bildet. Wir bezeichnen den von $\overline{C}$ eingeschlossenen Bereich mit $\overline{\mathfrak{R}}$. Es ist einfach zu sehen, daß $\overline{\mathfrak{R}}$ den Kappenbereich $\mathfrak{R}^*$ von C in sich enthält. Dieser letzte Bereich entsteht aus dem Kreissegment $OAK_0A'O$, wenn man ihm die durch die ω, ω' und ψ_i bestimmten Kappen ansetzt. Wir bezeichnen im folgenden mit $\overline{J}$ den Inhalt des durch $\overline{C}$ begrenzten Bereiches $\overline{\mathfrak{R}}$ und mit J^* dasjenige von $\mathfrak{R}^*$. Es seien nun $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$ die Richtungskosinusse der „äußeren" Normalen von $OABC'B'A'O$. Diese sind so definiert, daß bei dem üblichen positiven Durchlaufsinn n nach rechts gerichtet wird.

Wir betrachten nun den Ausdruck

$$x \cos(n, x) + \eta \cos(n, y) \tag{5.2}$$

und behaupten, daß für jeden Punkt von $ABCB'A'$ dieser Ausdruck gleich a ist. Diese Behauptung ist trivial insofern, als $M(x, y)$ ein innerer Punkt von C ist.

Liegt nun M auf AB, so ist $x = -a$, $\cos(n, x) = -1$ und $\cos(n, y) = 0$, also (5. 2) ist erfüllt. Dasselbe gilt aber, wenn M auf $B'A'$ liegt, da ja für diese Strecke dieser Ausdruck gleich $OA' = a$ ist. Auf beiden Radien OA, OA' ist

der Ausdruck Null. Integriert man nun (5. 2) längs des Zuges $OABCB'A'O$, so erhält man mit Rücksicht auf die Definition von S

$$\int x\cos(n,x)\,ds + \int \eta\cos(n,y)\,ds = aS. \tag{5.3}$$

Das erste Integral links ist jetzt, da $\cos(n,x) = \frac{dy}{ds}$ ist, gleich dem Inhalt J von $OABCB'A'O$, und das zweite Integral wegen $\cos(n,y) = -\frac{dx}{ds}$ gleich dem Inhalt $\overline{J}$ von $\overline{\mathfrak{R}}$. Es sind also

$$J + \overline{J} = aS. \tag{5.4}$$

Wir konstruieren jetzt von Segment K_0 ausgehend folgende „Extremalkurve" C^*. Wir ziehen zuerst die zwei Tangenten an K_0, welche mit α bzw. α' die Winkel ω bzw. ω' bilden, und setzen dann auf dem freien Bogen von K_0 die Kappen mit Winkeln ψ_i auf. Die so konstruierte Kurve C^* begrenzt mit OA, OA' einen Bereich $\mathfrak{R}^*$, der einer von den vielen möglichen Kappenbereichen von C ist. Nun gilt für den so konstruierten Bereich $\mathfrak{R}^*$, $\overline{\mathfrak{R}}^* = \mathfrak{R}^*$ und wir erhalten, wenn J^* den Inhalt von $\mathfrak{R}^*$ und S^* die Länge von C^* bedeutet,

$$J + J^* = aS^*\ ^{10}). \tag{5.5}$$

Durch Kombination mit (5. 4) folgt dann

$$J - J^* = a(S - S^*) - (J - J^*). \tag{5.6}$$

Man kann ebenso wie vorhin zeigen, daß $\overline{J} \geqq J^*$ ist, also daß die Ungleichung

$$J - J^* \leqq a(S - S^*) \tag{5.7}$$

gilt.

Daß hier das Gleichheitszeichen nur dann eintritt, wenn C mit C^* übereinstimmt, wird im folgenden im Zusammenhang mit einer allgemeineren Aufgabe gezeigt werden.

6. *Der Fall eines Dreiecks.* Wir betrachten nun eine in einem Dreieck T eingeschriebene konvexe Kurve C (Fig. 3), d. h. eine Kurve, welche mit jeder Seite von T gemeinsame Punkte hat. Es sei K der in T eingeschriebene Kreis und a sein Radius. Es seien ψ_i die Eckenwinkel von C, welche nicht auf den Seiten a_1, a_2, a_3 von T liegen, und ω_i, ω_i' $(i = 1, 2, 3)$ die Winkel von C mit den drei Seiten, wie dies in der Figur gezeichnet ist. Wenden wir unsere Konstruktion auf die Geraden a_1, a_2, a_2, a_3 und a_3, a_1 an, und addieren wir die entsprechenden Größen (mit den Indizes 3 für a_1a_2, 1 für a_2a_3 und 2 für a_3a_1), so wird wegen

$$L = \sum_1^3 S_i,\quad F = \sum_1^3 J_i,\quad F^* = \sum_1^3 J_i^*,\quad \overline{F} = \sum_1^3 \overline{F}_i, \tag{6.1}$$

$$F + \overline{F} = aL\ ^{11}). \tag{6.2}$$

---

[10]) C^* ist der Rand von $\mathfrak{R}^*$ ohne die Radien OA, OA'. Diese Gleichung wurde zuerst von BONNESEN bewiesen. BONNESEN, l. c. S. 153.

[11]) BONNESEN, l. c. S. 153.

Für den Kappenbereich $\mathfrak{K}^*$ von C mit den Winkeln ω_i, ω_i' und ψ_i erhält man dann durch ähnliches Verfahren wegen $F^* = \overline{F}^*$

$$F^* + F^* = aL \tag{6.3}$$

also

$$F - F^* = a(L - L^*) - (\overline{F} - F^*). \tag{6.4}$$

Wegen $\overline{F} \geqq F^*$ gilt nun

$$F - F^* \leqq a(L - L^*). \tag{6.5}$$

und das Gleichheitszeichen tritt hier nur dann ein, wenn $\overline{F} = F^*$ ist. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn $\overline{J}_i = J_i^*$ $(i = 1, 2, 3)$ ist, wodurch alles auf

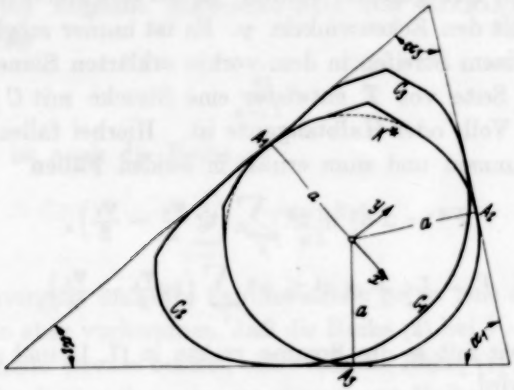

Fig. 3.

das Eintreten des Gleichheitszeichens in (5. 7) zurückgeführt ist. Nun kann man durch ähnliche Überlegungen wie in 2. schließen, daß die für das Eintreten des Gleichheitszeichens in (5. 7) gestellte Bedingung dann und nur dann erfüllt wird, wenn erstens

$$y = \eta + \text{konst} \tag{6.6}$$

ist. und zweitens, wenn B' mit der Ecke $B^{*\prime}$ des Kappenbereiches zusammenfällt. Sonst würde noch ein Dreieck von nicht verschwindendem positivem Inhalt enthalten, was $\overline{J} > J^*$ zur Folge haben würde. Dies erfordert also, daß die Konstante in (6. 6) verschwinden muß. Die Kurven C und C^* fallen also zusammen. Durch Wiederholung dieses Verfahrens für die drei Teile C_1, C_2, C_3 von C in der Fig. 3 können wir schließen, daß das Gleichheitszeichen in (6. 5) nur dann eintritt, wenn die geschlossene Kurve C mit dem Rand ihres Kappenbereiches $\mathfrak{K}^*$ übereinstimmt.

Diesen erhält man, wenn man zuerst Tangenten an K_0 zieht, welche mit a_i die Winkel ω_i, ω_i' bilden und dann die Kappen mit den Winkeln ψ_i auf den freien Bögen ansetzt.

Damit die Konstruktion möglich ist, muß

$$\sum_1^3 (\omega_i + \omega_i') + \sum_1^3 \alpha_i + \sum_i \psi_i \leqq 3\pi \tag{6.7}$$

sein, oder wegen $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$

$$\sum_1^3 (\omega_i + \omega_i') + \sum \psi_i \leqq 2\pi. \tag{6.8}$$

7. *Anwendungen. Die Verschärfung von* Bol. Als Anwendung der Ungleichungen (6.5) und (3.5) soll zum Schluß der Beweis einer schon in der Einleitung erwähnten interessanten Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung durch Bol gegeben werden. Es sei eine konvexe Kurve C in der Ebene gegeben mit den Eckenwinkeln ψ. Es ist immer möglich, C in einem Dreieck oder in einem Streifen in dem vorhin erklärten Sinne einzuschreiben derart, daß jede Seite von T entweder eine Strecke mit C gemeinsam hat oder daß sie eine Voll- oder Halbtangente ist. Hierbei fallen die ω_i, ω_i' mit gewissen ψ_i zusammen und man erhält in beiden Fällen

$$F^* = \pi a^2 + a^2 \sum_i \left(\operatorname{tg} \frac{\psi_i}{2} - \frac{\psi_i}{2}\right), \tag{7.1}$$

$$F - La + \pi a^2 \leqq a^2 \sum_i \left(\operatorname{tg} \frac{\psi_i}{2} - \frac{\psi_i}{2}\right). \tag{7.2}$$

Bezeichnen wir mit w die Summe rechts in (7.1) und setzt man noch $\pi + w = Q$, so wird

$$F - La + Qa^2 = \left(F - \frac{L^2}{4Q}\right) + \frac{1}{4Q}(L - 2aQ)^2 \leqq 0. \tag{7.3}$$

Daraus folgt die Verschärfung von Bol

$$4(\pi + w) F \leqq L^2,$$

oder

$$4\pi F - L^2 \leqq -4F \sum_i \left(\operatorname{tg} \frac{\psi_i}{2} - \frac{\psi_i}{2}\right) \tag{7.4}$$

unmittelbar.

Soll in (7.4) das Gleichheitszeichen gelten, so muß

$$L - 2aQ = 0 \tag{7.5}$$

sein, und dies hat wieder das Eintreten des Gleichheitszeichens in (7.2) zur Folge. Durch Kombination dieser Gleichung mit den Extremalfällen von (3.5) und (6.5), folgt nun leicht, daß C Kappenbereich eines Kreises vom Radius a sein muß.

(Eingegangen am 6. Februar 1942.)

Über das Riemannsche Summierungsverfahren.

Von

Nikola Obreschkoff in Sofia.

In der Theorie der Eindeutigkeit der Darstellung durch trigonometrische Reihen spielt der folgende klassische Satz von RIEMANN die Hauptrolle:

Ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

konvergent, so ist auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 \tag{2}$$

für jedes h konvergent und ihre Summe strebt gegen jene der Reihe (1), falls $h \to 0$. Es kann aber vorkommen, daß die Reihe (2) bei $h \to 0$ konvergent ist und eine bestimmte Grenze besitzt, ohne daß die Reihe (1) selbst konvergiert. Man erhält dadurch eine Summierung divergenter Reihen, die verallgemeinert folgendermaßen lautet: Die Reihe (1) ist nach dem RIEMANNschen Verfahren von der Ordnung $\varkappa$ summierbar ($\varkappa \geqq 0$, ganz), oder kurz $(R, \varkappa)$-summierbar, mit der Summe s, wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^{\varkappa} \tag{3}$$

für jedes h konvergiert und ihre Summe mit $h \to 0$ gegen s strebt. L. FEJÉR[1]) zeigte, daß jede $(C, 1)$-summierbare Reihe auch mit derselben Summe $(R, 4)$-summierbar ist. Ein allgemeineres Ergebnis bewies E. KOGBETLIANTZ[2]), nämlich das folgende: Jede (C, α)-summierbare Reihe, $0 < \alpha < p - 1$, ist (R, p)-summierbar mit derselben Summe.

In der vorliegenden Arbeit werden genauere Ergebnisse über die Abhängigkeit zwischen den Summierungen von CESARO und RIEMANN angegeben. Außerdem werden wir eine Summierung betrachten, die in Ver-

[1]) L. FEJÉR, Untersuchungen über FOURIERsche Reihen. Math. Annalen 58 (1904), S. 501–569.

[2]) E. KOGBETLIANTZ, Recherches sur l'unicité des série ultrasphériques. Journ. de Mathématiques pures et appliquées 5 (1924), S. 125–196.

bindung mit dem zweiten Satz von RIEMANN steht, der sich folgendermaßen ausdrücken läßt: Ist $a_n \to 0$, so strebt die Summe der Reihe

$$h \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2$$

gegen Null, falls $h \to 0$.

1. Einige Hilfssätze.

Wir werden im voraus einige Hilfssätze aufstellen, die für unsere Entwicklungen notwendig sind. Wir bezeichnen dabei mit $s_n^{(\alpha)}$ die CESÀROschen Mittelwerte der Ordnung α.

1. *Hat man für ein* $\alpha > 0$:

$$|s_0^{(\alpha)}| + |s_1^{(\alpha)}| + \cdots + |s_n^{(\alpha)}| = O(n),$$

so ist für jedes $\beta > \alpha$ *auch*

$$|s_0^{(\beta)}| + |s_1^{(\beta)}| + \cdots + |s_n^{(\beta)}| = O(n).$$

Wir können uns auf den Fall $\beta - \alpha = \delta < 1$ beschränken. Wegen

$$s_n^{(\beta)} = \frac{1}{A_n^{\beta}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\delta-1} A_\nu^{\alpha} s_\nu^{(\alpha)}, \quad A_n^{\alpha} = \binom{n+\alpha}{n} \tag{1}$$

ist dann

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{m} |s_n^{(\beta)}| &\leqq \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{A_n^{\beta}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\delta-1} A_\nu^{\alpha} |s_\nu^{(\alpha)}| \\
&= \sum_{\nu=0}^{m} A_\nu^{(\alpha)} |s_\nu^{(\alpha)}| \sum_{n=\nu}^{m} \frac{A_{n-\nu}^{\delta-1}}{A_n^{\beta}} \\
&< \sum_{\nu=0}^{m} A_\nu^{\alpha} |s_\nu^{(\alpha)}| \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{A_{n-\nu}^{\delta-1}}{A_n^{\beta}} \\
&< K \sum_{\nu=0}^{m} (\nu+1)^{\alpha} |s_\nu^{(\alpha)}| \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{(n+1-\nu)^{\delta-1}}{n^{\beta}} \\
&< K_1 \sum_{\nu=0}^{m} (\nu+1)^{\alpha} |s_\nu^{(\alpha)}| \int_{\nu}^{\infty} \frac{(x-\nu)^{\delta-1}}{x^{\beta}}\, dx < K_2 \sum_{\nu=0}^{m} |s_\nu^{(\alpha)}|.
\end{aligned}$$

2. *Ist* $\alpha < p-1$, $q_n \geqq 0$, *so folgt aus*

$$q_0 + q_1 + \cdots + q_n = O(n) \tag{2}$$

die Beziehung

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{q_n}{n^{p-\alpha}} = O(m^{\alpha+1-p}), \quad m \to \infty, \tag{3}$$

und umgekehrt.

Setzen wir

$$\sigma_n = q_0 + q_1 + \cdots + q_n,$$

so haben wir:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{q_n}{n^{p-\alpha}} = -\frac{\sigma_m}{(m+1)^{p-\alpha}} + \sum_{n=m+1}^{x} \sigma_n \left[\frac{1}{n^{p-\alpha}} - \frac{1}{(n+1)^{p-\alpha}}\right]$$

$$= O\left(\frac{m}{m^{p-\alpha}}\right) + \sum_{n=m+1}^{\infty} O(n) O\left(\frac{1}{n^{p-\alpha+1}}\right) = O\left(\frac{1}{m^{p-\alpha+1}}\right).$$

Ist umgekehrt (3) richtig, so erhalten wir, wenn wir

$$T_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{q_n}{n^{p-\alpha}}$$

setzen, für die Summe

$$t_m = q_0 + q_1 + \cdots + q_m$$

den Ausdruck

$$t_m = \sum_{n=1}^{m} n^{p-\alpha}(T_{n-1} - T_n) = T_0 - m^{p-\alpha} T_{m+1} + \sum_{n=1}^{m} T_n [n^{p-\alpha} - (n-1)^{p-\alpha}]$$

$$= T_0 + O(m) + O(m) = O(m).$$

3. *Es bezeichne $\varphi(x)$ die Funktion*

$$\varphi(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p,$$

worin p eine positive ganze Zahl bedeutet. Dann gilt für die m te Differenz der $\varphi(nx)$ und für reelles x:

$$|\Delta^m \varphi(nx)| \leqq M \frac{|x|^{m-p}}{n^p}, \tag{4}$$

worin M von x und n unabhängig ist.

In der Tat haben wir:

$$|\Delta^m \varphi(nx)| \leqq |x|^m \max_{n \leqq t \leqq n+m} |\varphi^{(m)}(tx)|. \tag{5}$$

Man sieht leicht, daß

$$|\varphi^{(m)}(x)| \leqq M_1 |x|^{-p} \tag{6}$$

ist für jedes reelle x. Setzen wir nämlich

$$u = \sin^p x, \quad v = x^{-p},$$

so wird:

$$\varphi^{(m)}(x) = \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} u^{(m-\mu)} v^{(\mu)},$$

und da wir bei $|x| \geqq a > 0$ auch $u^{(\nu)} = O(1)$ haben, erhalten wir:

$$\varphi^{(m)}(x) = O(|x|^{-p}),$$

für $|x| \geqq a$. Bei $|x| < a$ folgt (6) sofort aus der Entwicklung:

$$\varphi(x) = \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right)^p,$$

welche

$$|\varphi^{(m)}(x)| \leqq L < M|x|^{-p}$$

liefert.

4. *Es sei δ eine zwischen* 0 *und* 1 *liegende Zahl und*

$$g_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} A_{\nu-n}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(\nu h). \tag{7}$$

Dann haben wir für jedes $h \neq 0$

$$|g_n| < M n^{-p} |h|^{-\delta},$$

worin M von h und n unabhängig ist.

Da $A_n^{\delta-1} = O(n^{\delta-1})$, so ersieht man aus dem Hilfssatz 3, daß die Reihe (7) für jedes $h > 0$ konvergiert. Bezeichnen wir mit q die größte in $\frac{1}{h}$ enthaltene ganze Zahl, so haben wir

$$g_n = \sum_{\nu=n}^{n+q} A_{\nu-n}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(\nu h) + \sum_{\nu=n+q+1}^{\infty} A_{\nu-n}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(\nu h) = g_n' + g_n''.$$

Aus dem Hilfssatz 3 folgt aber

$$|\Delta^p \varphi(nh)| < M \frac{h^p}{n^p h^p} < M n^{-p},$$

so daß wir für g_n':

$$|g_n'| < M \sum_{\nu=n}^{n+q} A_{\nu-n}^{\delta-1} \frac{1}{\nu^p} < M n^{-p} \sum_{\nu=n}^{n+q} A_{\nu-n}^{\delta-1} = M n^{-p} A_q^{\delta}$$
$$< M_1 n^{-p} h^{-\delta},$$

und für g_n'':

$$g_n'' = -\sum_{\nu=n+q+1}^{\infty} A_{\nu-n+1}^{\delta-2} [\Delta^{p-1} \varphi(\overline{n+q+1}\, h) - \Delta^{p-1} \varphi(\overline{\nu+1}\, h)],$$

$$|g_n''| < K n^{-p} h^{-1} \sum_{\nu=n+q+1}^{\infty} \frac{1}{(\nu-n)^{2-\delta}} + K_1 h^{-1} \sum_{\nu=n+q+1}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)^p (\nu-n)^{2-\delta}}$$
$$< K' n^{-p} h^{-1} q^{\delta-1} + K_1' n^{-p} h^{-1} \sum_{\nu=n+q+1}^{\infty} \frac{1}{(\nu-n)^{2-\delta}} = O(n^{-p} h^{-\delta})$$

erhalten. Damit ist unser Hilfssatz bewiesen.

5. *Es sei $\varphi(x)$ eine für $x > 0$ definierte und Ableitungen bis zur p-ten Ordnung zulassende Funktion, welche den Bedingungen*

$$|\varphi(x)| < K, \quad x^p |\varphi^{(p)}(x)| < K, \tag{8}$$

für jedes $x > 0$ genügt, worin K von x unabhängig ist. Dann haben wir für jedes $m < p$ die Beziehung

$$x^m |\varphi^{(m)}(x)| < K', \quad x > 0, \tag{9}$$

in der K' von x unabhängig ist.

In der Tat folgt aus der TAYLORschen Formel für

$$\varphi(x+t) = \varphi(x) + t\varphi'(x) + \frac{t^2}{2!}\varphi''(x) + \cdots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(x) + \tag{10}$$
$$+ \frac{t^p}{p!}\varphi^{(p)}(x+\theta t), \quad 0 < \theta < 1.$$

Es seien jetzt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p-1}$ beliebig gewählte verschiedene positive Zahlen und es werde in (10) noch $t = \lambda_i x$, $i = 1, 2, \ldots, p-1$, gesetzt. Dann erhält man die $(p-1)$ Gleichungen

$$\varphi(x+\lambda_i x) = \varphi(x) + \lambda_i x\varphi'(x) + \frac{\lambda_i^2 x^2}{2!}\varphi''(x) + \cdots + \tag{11}$$
$$+ \frac{\lambda_i^{p-1} x^{p-1}}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(x) + \frac{\lambda_i^p x^p}{p!}\varphi^{(p)}(x+\theta_i\lambda_i x), \quad 0 < \theta_i < 1.$$

Es mögen ferner $C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$ die Zahlen bedeuten, die sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
&C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + \cdots + C_{p-1}\lambda_{p-1} = 0,\\
&C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 + \cdots + C_{p-1}\lambda_{p-1}^2 = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&C_1\lambda_1^{p-2} + C_2\lambda_2^{p-2} + \cdots + C_{p-1}\lambda_{p-1}^{p-2} = 0,\\
&C_1\lambda_1^{p-1} + C_2\lambda_2^{p-1} + \cdots + C_{p-1}\lambda_{p-1}^{p-1} = 1
\end{aligned} \tag{12}$$

ergeben. Dieses System besitzt Lösungen, da die Determinante der Koeffizienten vor den Unbekannten die von VANDERMONDEsche ist und folglich von Null verschieden ausfällt. Multiplizieren wir dann die Gleichungen (1) der Reihe nach mit $C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$ und addieren die so entstandenen Produkte, so erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^{p-1} C_i\varphi(x+\lambda_i x) = \varphi(x)\sum_{i=1}^{p-1} C_i + \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(x) + \tag{13}$$
$$+ \frac{x^p}{p!}\sum_{i=1}^{p-1} C_i\lambda_i^p\varphi^{(p)}(x+\theta_i\lambda_i x).$$

Da wir für jedes $x > 0$

$$|\varphi(x + \lambda_i x)| < M, \quad |\varphi^{(p)}(x + \theta_i \lambda_i x)| < \frac{M}{(1 + \theta_i \lambda_i)^p x^p} < \frac{M}{x^p}$$

haben, so erhalten wir aus (13) sofort:

$$x^{p-1} |\varphi^{(p-1)}(x)| < M'. \tag{14}$$

Aus demselben Grunde werden wir aus (14)

$$x^{p-2} |\varphi^{(p-2)}(x)| < M''$$

erhalten usw.

6. *Es sei $p > 1$ eine ganze Zahl. Dann ist*

$$\lim_{h \to 0} h \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nh}{nh}\right) = \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p dx = j_p.$$

Es sei $a > 0$ eine beliebige Zahl und es bedeute m die größte in $\frac{a}{h}$ enthaltene ganze Zahl. Gemäß der Definition eines bestimmten Integrals haben wir dann zunächst

$$\lim_{h \to 0} h \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^p = \int_0^a \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p dx.$$

Und für die Summe

$$i_h = h \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^p$$

erhalten wir

$$|i_h| < h \sum_{n=m-1}^{\infty} \frac{1}{n^p h^p} < \frac{1}{h^{p-1}} \int_m^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{(p-1) h^{p-1} m^{p-1}} < \frac{1}{(p-1)(a-1)^{p-1}}.$$

Wir können aber a so groß wählen, daß i_p beliebig klein wird.

2. Vergleich zwischen den Summierungen von Cesàro und Riemann.

Satz 1. *Es sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ für ein $\alpha < p-1$ $(C, \alpha + 1)$-summierbar und es gelte für sie*

$$|s_1^{(\alpha)}| + |s_2^{(\alpha)}| + \cdots + |s_n^{(\alpha)}| = O(n), \tag{1}$$

worin $s_n^{(\alpha)}$ die Cesàroschen Mittelwerte von der Ordnung α sind. Dann ist diese Reihe auch (R, p)-summierbar mit derselben Summe.

Wir setzen wieder

$$\varphi(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p$$

und werden zuerst beweisen, daß für jedes $h > 0$ die Reihe

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} u_n \varphi(nh), \quad u_0 = 0$$

konvergiert, der wir dabei zugleich noch eine andere Form verleihen werden. Wir bezeichnen nun mit $S_n^{(\alpha)} = A_n^{\alpha} s_n^{(\alpha)}$ die CESÀROschen Summen für die Reihe $\sum u_n$. Für die Teilsummen

$$l_m = \sum_{n=0}^{m} u_n \varphi(nh)$$

erhalten wir der Reihe nach

$$(3) \qquad \begin{aligned} l_m &= \sum_{n=0}^{m-1} S_n^{(0)} \Delta \varphi(nh) + S_m^{(0)} \varphi(mh) \\ &= \sum_{n=0}^{m-2} S_n^{(1)} \Delta^2 \varphi(nh) + S_{m-1}^{(1)} \Delta \varphi(\overline{m-1}\, h) + S_m^{(0)} \varphi(mh) \\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{m-p} S_n^{(p-1)} \Delta^p \varphi(nh) + S_{m-p+1}^{(p-1)} \Delta^{p-1} \varphi(\overline{m-p+1}\, h) + \cdots + \\ &\quad + S_{m-1}^{(1)} \Delta \varphi(\overline{m-1}\, h) + S_m^{(0)} \varphi(mh). \end{aligned}$$

Bei festem $q < p$ und $h > 0$ haben wir

$$S_m^{(q)} \Delta^q \varphi(mq) = o(m^p)\, O(m^{-p}) = o(1), \quad m \to \infty;$$

es folgt also, daß

$$l_m = \sum_{n=0}^{m-p} S_n^{(p-1)} \Delta^p \varphi(nh) + o(1) = i_{m-p} + o(1).$$

Auf Grund des Hilfssatzes 1 können wir annehmen, daß $p - 1 = \alpha + \delta$ ist, $(0 < \delta < 1)$. Wir haben weiter:

$$i_m = \sum_{n=0}^{m} \Delta^p \varphi(nh) \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\delta-1} S_\nu^{(\alpha)} = \sum_{\nu=0}^{m} S_\nu^{(\alpha)} \sum_{n=\nu}^{m} A_{n-\nu}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(nh).$$

Also konvergieren die Zahlen

$$g_{m\nu} = \sum_{n=\nu}^{m} A_{n-\nu}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(nh)$$

bei $m \to \infty$ und $h > 0$ gegen

$$g_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n-\nu}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(nh),$$

welche Reihe infolge der Beziehung

$$A_{n-\nu}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(nh) = O\left(\frac{1}{n^{p+1-\delta}}\right)$$

absolut konvergent ist. Wir werden beweisen, daß i_m gegen

$$i = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu S_\nu^{(\alpha)}$$

strebt. Indem wir die Bezeichnungen

$$t_n = A_{n-\nu}^{\vartheta-1}, \quad T_n = \sum_{\lambda=\nu}^{n} \Delta^p \varphi(\lambda h) = \Delta^{p-1}\varphi(\nu h) - \Delta^{p-1}\varphi(\overline{n+1}h)$$

einführen, erhalten wir für $g_{m\nu}$ die Ausdrücke:

$$g_{m\nu} = \sum_{n=\nu}^{m} t_n (T_n - T_{n-1}) = \sum_{n=\nu}^{m-1} T_n \Delta t_n + T_m t_m$$

$$= -\sum_{n=\nu}^{m} A_{n+1-\nu}^{\vartheta-2} [\Delta^{p-1}\varphi(\nu h) - \Delta^{p-1}\varphi(\overline{n+1}h)] +$$

$$+ A_{m-\nu}^{\vartheta-1} [\Delta^{p-1}\varphi(\nu h) - \Delta^{p-1}\varphi(\overline{m+1}h)].$$

Strebt dann $m \to \infty$, so ergibt sich:

$$g_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n+1-\nu}^{\vartheta-2} \Delta^{p-1}\varphi(\overline{n+1}h) + \Delta^{p-1}\varphi(\nu h).$$

Gemäß Hilfssatz 3 haben wir für festes $h > 0$

$$|g_\nu| < K \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{n^p (n+1-\nu)^{2-\vartheta}} < \frac{K}{\nu^p} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{2-\vartheta}} < \frac{K_1}{\nu^p},$$

da $2 - \delta > 1$ ist. Auf Grund des Hilfssatzes 4 konvergiert die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|s_\nu^{(\alpha)}|}{\nu^{p-\alpha}}.$$

Folglich wird die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu S_\nu^{(\alpha)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} O\left(\frac{|s_\nu^{(\alpha)}|}{\nu^{p-\alpha}}\right)$$

absolut konvergent. Wir haben ferner:

$$g_\nu - g_{m\nu} = A_{m+1-\nu}^{\vartheta-1} \Delta^{p-1}\varphi(\nu h) - A_{m-\nu}^{\vartheta-1} \Delta^{p-1}\varphi(\nu h) + A_{m-\nu}^{\vartheta-1} \Delta^{p-1}\varphi(\overline{m+1}h)$$

$$+ \sum_{n=m}^{\infty} A_{n+1-\nu}^{\vartheta-2} \Delta^{p-1}\varphi(\overline{n+1}h) = O(\nu^{-p}(m+1-\nu)^{\vartheta-1}) +$$

$$+ O(m^{-p}(m+1-\nu)^{\vartheta-1}) + \sum_{n=m}^{\infty} O(n^{-p}(n+1-\nu)^{\vartheta-2})$$

$$= O(\nu^{-p}(m+1-\nu)^{\vartheta-1}).$$

Für die Differenz:

$$A_m = \sum_{\nu=0}^{m} S_\nu^{(\alpha)} (g_\nu - g_{m\nu})$$

erhalten wir

$$|A_m| < K \sum_{\nu=0}^{m} \nu^{\alpha} |s_\nu^{(\alpha)}| \, |g_\nu - g_{m\nu}| < K_1 \sum_{\nu=1}^{m} \frac{|s_\nu^{(\alpha)}|}{\nu^{p-\alpha}} \frac{1}{(m+1-\nu)^{1-\delta}},$$

woraus man ersieht, daß

$$\lim_{m \to \infty} A_m = 0.$$

So erhalten wir die Gleichung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \varphi(nh) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^{(\alpha)} g_n.$$

Es sei nun N eine beliebige positive Zahl und m die größte in $\frac{N}{h}$ enthaltene ganze Zahl. Wir haben dann zunächst

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n^{(\alpha)} g_n = \sum_{n=1}^{m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} = \beta_1 + \beta_2,$$

und nach Hilfssatz 2 weiter:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} n^{-p} |S_n^{(\alpha)}| = O(m^{\alpha+1-p}), \quad m \to \infty.$$

Gemäß Hilfssatz 4 erhalten wir nun

$$|\beta_2| < M' h^{-\delta} \sum_{n=m+1}^{\infty} n^{-p} |S_n^{(\alpha)}| < M'' m^{\delta} N^{-\delta} \sum_{n=m+1}^{\infty} n^{-p} |S_n^{(\alpha)}| < M''' N^{-\delta}.$$

Wir können N so groß wählen, daß $|\beta_2|$ beliebig klein wird. Durch die Betrachtung der Reihe

$$(u_1 - s) + u_2 + u_3 + \cdots$$

an Stelle der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ können wir uns auf den Fall $s = 0$ beschränken. Es sei nun λ die größte in $\frac{1}{h}$ enthaltene ganze Zahl. Wir haben dann:

$$\beta_1 = \sum_{n=0}^{m} S_n^{\alpha} g_n' + \sum_{n=0}^{m} S_n^{\alpha} g_n'' = \beta_1' + \beta_1'',$$

$$g_n' = \sum_{\nu=n}^{n+\lambda} A_{\nu-n}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(\nu h), \quad g_n'' = \sum_{\nu=n+\lambda+1}^{\infty} A_{\nu-n}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(\nu h).$$

Da wir für g_n' auch

$$|g_n'| < K n^{-p} \sum_{\tau=0}^{\lambda} A_\tau^{\delta-1} < K_1 n^{-p} A_\lambda^{\delta} < K_2 n^{-p} h^{-\delta}$$

haben, so werden wir für

$$|\beta_1'| < K_3 h^{-\delta} \sum_{\nu=0}^{m} |s_\nu^{(\alpha)}| \frac{1}{(\nu+1)^{p-\alpha}} = K_3 h^{-\delta} \sum_{\nu=0}^{m} U_\nu \left[\frac{1}{(\nu+1)^{p-\alpha}} - \frac{1}{(\nu+2)^{p-\alpha}} \right] + K_3 h^{-\delta} \frac{U_m}{(m+1)^{p-\alpha}}$$

erhalten, worin U_n die Summe

$$U_n = |s_0^{(\alpha)}| + |s_1^{(\alpha)}| + \cdots + |s_n^{(\alpha)}|$$

bedeutet. Infolge $U_n < Mn$, $h = \frac{N}{m}$ ist überdies

$$|\beta_1'| < K_4 h^{-\vartheta} \sum_{\nu=0}^{m} \nu \left[\frac{1}{(\nu+1)^{p-\alpha}} - \frac{1}{(\nu+2)^{p-\alpha}}\right] + K_5 \frac{m h^{-\vartheta}}{(m+1)^{p-\alpha}}$$

$$< K_4 h^{-\vartheta} \sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{1}{\nu^{p-\alpha}} + K_5 \frac{m+1}{h^{\vartheta}(m+1)^{p-\alpha}} < K_6 h^{-\vartheta}(m+1)^{\alpha+1-p}$$

$$< K_7 N^{-\vartheta}.$$

Ist $\varepsilon > 0$ eine beliebige kleine Zahl, so läßt sich N so groß wählen, daß $|\beta_1'| < \varepsilon$ ist. Für β_1'' erhalten wir:

$$\beta_1'' = \sum_{n=0}^{m-1} S_n^{(\alpha+1)} \Delta g_n'' + S_m^{(\alpha+1)} g_m'',$$

$$\Delta g_n'' = \sum_{\tau=\lambda+1}^{\infty} A_\tau^{\vartheta-2} \Delta^p \varphi(\overline{n+\tau}\, h) + A_{\lambda+1}^{\vartheta-1} \Delta^p \varphi(\overline{n+\lambda+1}\, h),$$

$$|\Delta g_n''| < K' n^{-p} \sum_{\tau=\lambda+1}^{\infty} \frac{1}{\tau^{2-\vartheta}} < K'' n^{-p} \lambda^{\vartheta-1} < K''' n^{-p} h^{1-\vartheta},$$

$$|g_n''| < K^{\mathrm{IV}} h^{-\vartheta} n^{-p},$$

$$\sum_{n=0}^{m-1} S_n^{(\alpha+1)} \Delta g_n'' = \sum_{u=1}^{m-1} h^{1-\vartheta} o(n^{\alpha+1-p}) = h^{1-\vartheta} o(m^{\vartheta-1}) = o(1),$$

$$S_m^{(\alpha+1)} g_m'' = o(m^{\alpha+1}) O\left(\frac{1}{m^p h^{\vartheta}}\right) = o(1).$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 2. *Es sei $\varphi(x)$ eine für $x > 0$ definierte und bis zur p-ten Ordnung differenzierbare Funktion, welche den folgenden Bedingungen:*

$$\varphi(+0) = 1, \quad \varphi(x) = O(x^{-p}), \quad x \to \infty, \tag{4}$$

$$\varphi^{(p)}(x) = O(x^{-p}), \quad x > 0 \tag{5}$$

genügt. Ist dann die Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \tag{6}$$

$|C, p|$-summierbar mit der Summe s, so wird die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(nx) \tag{7}$$

für jedes $x > 0$ konvergieren und ihre Summe gegen s streben, falls $x \to 0$

Bezeichnen wir mit $S_n^{(\varkappa)}$ die Cesàroschen Summen der Ordnung $\varkappa$ der Reihe (6), so erhalten wir:

$$(8)\quad j_m = \sum_{n=0}^{m} a_n \varphi(n x) = \sum_{n=0}^{m-p-1} S_n^{(p)} \Delta^{p+1} \varphi(n x) + \sum_{\nu=0}^{p} S_{m-\nu}^{(\nu)} \Delta^{\nu} \varphi(\overline{m-\nu}\, x)$$

$$= \sum_{n=0}^{m-p-1} s_n^{(p)} A_n^p \Delta^{p+1} \varphi(n x) + \sum_{\nu=0}^{p} s_{m-\nu}^{(\nu)} A_{m-\nu}^{\nu} \Delta^{\nu} \varphi(\overline{m-\nu}\, x).$$

Betrachten wir speziell die Reihe

$$1 + 0 + 0 + 0 + \cdots,$$

für welche $s_n^{(p)} = 1$ ist, so werden wir aus (8)

$$(9)\quad 1 = \sum_{n=0}^{m-p-1} A_n^p \Delta^{p+1} \varphi(n x) + \sum_{\nu=0}^{p} A_{m-\nu}^{\nu} \Delta^{\nu} \varphi(\overline{m-\nu}\, x)$$

erhalten. Setzen wir nun:

$$S_n^{(\varkappa)} = s A_n^{\varkappa} + T_n^{(\varkappa)}, \quad \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p,$$

so ergibt sich aus (8) auf Grund von (9):

$$(10)\quad j_m - s = \sum_{n=0}^{m-p-1} T_n^{(p)} \Delta^{p+1} \varphi(n x) + \sum_{\nu=0}^{p} T_{m-\nu}^{(\nu)} \Delta^{\nu} \varphi(\overline{m-\nu}\, x).$$

Bei $\varkappa < p$ haben wir auch $S_n^{(\varkappa)} = o(n^p)$, $T_n^{(\varkappa)} = o(n^p)$ und folglich bei $x > 0$, (x fest), und für $m \to \infty$ auf Grund von (5)

$$T_{m-\nu}^{(\nu)} \Delta^{\nu} \varphi(\overline{m-\nu}\, x) = o(1).$$

Aus (10) folgt also:

$$j_m = s + \sum_{n=0}^{m-p-1} A_n^p t_n^{(p)} \Delta^{p+1} \varphi(n x) + o(1), \quad T_n^{(\varkappa)} = A_n^{\varkappa} t_n^{(\varkappa)}.$$

Bezeichnen wir mit $g_n(x)$ den Ausdruck

$$g_n(x) = \sum_{\mu=0}^{n} A_{\mu}^p \Delta^{p+1} \varphi(\mu x),$$

so haben wir nach Formel (9)

$$(11)\quad g_{n+1-p}(x) = 1 - \sum_{\nu=0}^{p} A_{n+2-\nu}^{\nu} \Delta^{\nu} \varphi(\overline{n+2-\nu}\, x).$$

Auf Grund von (5) und für festes n erhalten wir:

$$\lim_{x \to 0} g_{n+1-p}(x) = 1 - \lim_{x \to 0} \sum_{\nu=0}^{p} A_{n+2-\nu}^{\nu} \Delta^{\nu} \varphi(\overline{n+2-\nu}\, x) = 0.$$

Infolge der Bedingung (5) schließen wir aus dem Hilfssatz 5, daß für jedes $s \leqq p$ die Beziehung

$$(12)\quad \varphi^{(s)}(x) = O(x^{-s}), \quad x > 0$$

gültig ist. Auf Grund der Ungleichung:

$$|\Delta^s f(n)| \leqq \max_{n \leqq x \leqq n+s} |f^{(s)}(x)|$$

und aus (12) erhalten wir ferner für jedes x

$$|\Delta^s \varphi(nx)| \leqq M n^{-s},$$

worin M von n und x unabhängig ist. Dann folgt aus (11), daß wir für jedes n und x

$$|g_n(x)| < M'$$

haben, worin M' eine von n und x unabhängige Konstante ist.

Wir haben weiter:

$$j_m = s + \sum_{n=0}^{m-p-1} t_n^{(p)} [g_n(x) - g_{n-1}(x)] + o(1) \tag{13}$$

$$= s + \sum_{n=0}^{m-p-2} g_n(x) \Delta t_n^{(p)} + g_{m-p-1}(x) t_{m-p-1}^{(p)}.$$

Der Bedingung nach ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta t_n^{(p)}|$ konvergent. Setzen wir in (13) $m \to \infty$ ein, so erhalten wir:

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_n \varphi(nx) = s + \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \Delta t_n^{(p)}. \tag{14}$$

Es sei $\varepsilon > 0$ eine beliebige kleine Zahl und λ sei derart gewählt, daß:

$$\sum_{n=\lambda+1}^{\infty} |\Delta t_n^{(p)}| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Wir haben dann:

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) t_n^{(p)} = \sum_{n=0}^{\lambda} + \sum_{n=\lambda+1}^{\infty} = j' + j'',$$

$$\lim_{x \to 0} j' = 0, \quad |j''| < K \sum_{n=\lambda+1}^{\infty} |\Delta t_n^{(p)}| < \varepsilon.$$

Folglich auch:

$$\lim_{x \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(nx) = s,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Satz 3. *Wenn eine Reihe $|C, p|$-summierbar ist, so ist sie auch (R, p)-summierbar mit derselben Summe.*

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem vorigen, wenn in diesem

$$\varphi(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p$$

gesetzt wird, da man auch leicht ersehen kann, daß diese Funktion $\varphi(x)$ den Bedingungen des Satzes 2 Genüge leistet.

Wir setzen jetzt

$$j_p = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p dx$$

und nennen die Folge a_n (R_1, p)-limitierbar mit der Grenze s, wenn die Reihe

$$h \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^p$$

konvergiert und ihre Summe gegen $s j_p$ strebt, falls $h \to 0$. Aus Hilfssatz 6 ersieht man sofort, daß jede konvergente Folge bei $p \geqq 2$ auch (R_1, p)-limitierbar ist mit derselben Grenze. Wir werden jetzt den Satz beweisen.

Satz 4. *Ist die Folge u_n $(C, \alpha + 1)$-limitierbar mit der Grenze s, wobei $\alpha < p - 1$ und*

$$|u_1^{(\alpha)}| + |u_2^{(\alpha)}| + \cdots + |u_n^{(\alpha)}| < Kn$$

(hierin bedeuten $u_n^{(\alpha)}$ die Cesàroschen Mittelwerte der Ordnung α für die Folge u_n), so ist dieselbe Folge auch (R_1, p)-limitierbar mit der Grenze $s j_p$.

Der Beweisgang verläuft vollkommen analog wie beim Satz 2. Setzen wir $U_n^{(\alpha)} = \sum_{r=1}^{n} A_{n-r}^{\alpha-1} u_r$, so werden wir bei $u_n = a_n$ augenscheinlich $U_n^{(\alpha)} = S_n^{(\alpha-1)}$ haben. Für die Summe

$$T_m = \sum_{n=1}^{m} u_n \varphi(nh), \qquad \varphi(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p$$

erhalten wir bei festem $h > 0$ den Ausdruck

$$T_m = \sum_{n=1}^{m-p-1} U_n^{(p-1)} \Delta^{p-1} \varphi(nh) + o(1) = i_{m-p-1} + o(1).$$

Setzen wir noch $p - 1 = \alpha + \delta$, $0 < \delta < 1$, so erhalten wir:

$$i_m = \sum_{r=1}^{m} U_r^{(\alpha)} g_{mr}, \qquad g_{mr} = \sum_{n=r}^{m} A_{n-r}^{\delta-1} \Delta^{p-1} \varphi(nh).$$

Die Reihe

$$g_r = \sum_{n=r}^{\infty} A_{n-r}^{\delta-1} \Delta^{p-1} \varphi(nh)$$

ist also absolut konvergent, und zwar für jedes h, da $A_{n-r}^{\delta-1} \Delta^{p-1} \varphi(nh) = O(n^{\delta-p-1})$. Folglich konvergieren g_{mr} gegen g_r, falls $m \to \infty$. Da $\Delta^{p-1} \varphi(nh) = O(n^{-p})$, so ersieht man in ähnlicher Weise, daß i_m gegen $i = \sum_{n=p}^{\infty} U_n^{(\alpha)} g_n$ strebt. Dabei ist die letzte Reihe infolge

$$|g_n| < Kn^{-p}$$

konvergent. So erhalten wir die Gleichung:

$$h \sum_{n=1}^{\infty} u_n \varphi(nh) = h \sum_{n=1}^{\infty} U_n^{(a)} g_n$$

und es ist

$$|\Delta^{p-1} \varphi(nh)| < M h^{-1} n^{-p}$$

für jedes $h > 0$ und n. Der weitere Beweis verläuft genau wie der des vorangehenden Satzes.

Herrn M. Riess [3]) verdankt man die folgende Verallgemeinerung des Cantorschen Satzes: Ist die Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x) \tag{15}$$

für jedes x $(C, 1)$-summierbar mit der Summe 0 und die Reihe

$$\frac{a_0 x^2}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos n x + b_n \sin n x}{n^2} \tag{16}$$

gleichmäßig konvergent, so verschwinden die Koeffizienten a_n und b_n. Auf Grund unserer Sätze können wir andere neue Ergebnisse in dieser Richtung erhalten. Ist z. B. die Reihe (15) überall $|C, 2|$-summierbar mit der Summe 0 und stellt die Reihe (16) eine stetige Funktion dar, so verschwinden die sämtlichen Koeffizienten a_n und b_n. Ferner sei bemerkt, daß nach bekannten Sätzen [4]) die Reihe (16) für jedes x absolut konvergent ist. Der Beweis beruht auf dem Satz 3 und wird in einer schon bekannten Weise durchgeführt.

Ähnliche Bemerkungen lassen sich auch hinsichtlich des Satzes von H. Lebesgue und P. du Bois-Reymond machen.

---

[3]) M. Riess, Über summierbare trigonometrische Reihen. Math. Annalen **71** (1911), S. 54–75.

[4]) E. Kogbetliantz, Sur les séries absolument sommables par la méthode des moyennes arithmétiques, Bulletin des Sciences Mathématiques (2), **49** (1925), S. 234–256.

(Eingegangen am 28. März 1942.)

Streifenmodelle und Stangenmodelle zur Differentialgeometrie der Drehflächen, Schraubenflächen und Regelflächen.

Zum achtzigsten Geburtstag von Seb. Finsterwalder.

Von

Robert Sauer in Aachen.

Die „anschauliche Methode" der Differentialgeometrie hat durch den von S. Finsterwalder [1]) der Deutschen Mathematikvereinigung im Jahre 1899 erstatteten Bericht über „*Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation*" einen starken Anstoß erhalten. In dem Bericht wurden einerseits mechanische Eigenschaften von Kurvennetzen mit differentialgeometrischen Eigenschaften der von den Kurvennetzen überdeckten Flächen in Zusammenhang gebracht und zahlreiche sonstige „netzgeometrische" Fragen aufgeworfen. Andrerseits wurden Modelle entwickelt, deren diskretgeometrische Eigenschaften entsprechende differentialgeometrische Beziehungen der Flächentheorie anschaulich darstellen.

Nach beiden Richtungen hin hat der Bericht von S. Finsterwalder weitere Arbeiten seiner Schüler und anderer Geometer unmittelbar oder mittelbar angeregt. In die erste der beiden genannten Kategorien gehören Untersuchungen über geradlinige und geodätische Kurvennetze und über allgemeinere topologische Fragen der Differentialgeometrie. In der zweiten Kategorie sind vor allem Arbeiten zu nennen, welche die Statik der Ausnahmefachwerke mit dem Problem der infinitesimalen Flächenverbiegung verknüpfen, sowie der Aufbau einer Differenzengeometrie, durch welche die Grundgleichungen der Kurven- und Flächentheorie elementargeometrisch verdeutlicht werden.

Einen Beitrag zur zweiten Kategorie soll auch die vorliegende Abhandlung liefern, in der die Differentialgeometrie der Dreh- und Schraubenflächen an *Streifenmodellen* und die Differentialgeometrie der Regelflächen an *Stangenmodellen* entwickelt wird. Man erhält hierbei die grundlegenden Sätze über die Verbiegung der drei genannten Flächenklassen samt Aussagen über die geodätischen Linien der Dreh- und Schraubenflächen sowie eine differenzengeometrische Herleitung der Bewegungsinvarianten und der Ableitungs-

[1]) S. Finsterwalder, Jber. d. D. M. V. 6 (1899), S. 45–90.

gleichungen der Liniengeometrie der Regelflächen. Nebenher ergeben sich einfache Modelle der Pseudosphäre sowie der Flächenhäute, die sowohl auf Drehflächen als auch auf Spiralflächen verbogen werden können.

I. Drehflächen und Schraubenflächen.

1. *Drehkegel und Schraubenböschungsfläche.* Als wesentliches Hilfsmittel werden wir den *Drehkegel* und die *Schraubenböschungsfläche* benützen. Wir schicken daher einige einfache Grundtatsachen aus der Geometrie dieser beiden Flächen voraus:

Fig. 1 zeigt Grund- und Aufriß sowie die ebene Abwicklung der Vorderhälfte eines Drehkegels. Den Parallelkreisen des Kegels mit dem Radius r

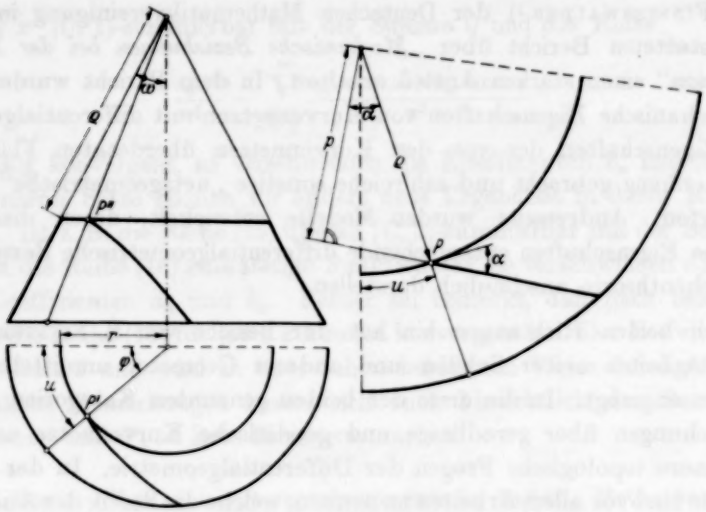

Fig. 1. Drehkegel samt ebener Abwicklung.

entsprechen in der Abwicklung konzentrische Kreise mit dem Radius

$$\varrho = \frac{r}{\sin \omega} \geqq r, \tag{1 a}$$

wobei ω den Winkel der Kegelerzeugenden gegen die Kegelachse bedeutet; $1/\varrho$ ist die geodätische Krümmung der Parallelkreise.

Fig. 2 zeigt Grund- und Aufriß sowie die ebene Abwicklung eines Ausschnittes einer Schraubenböschungsfläche. Sie wird erzeugt von den Tangenten einer Schraubenlinie, die auf einem Drehzylinder vom Radius a mit dem Neigungswinkel ω gegen die Zylinderachse verläuft und *Kehllinie* heißen soll. Die dem Drehwinkel 1 zugeordnete Parallelverschiebung

$$h = a \operatorname{cotg} \omega \tag{2}$$

bei der die Böschungsfläche erzeugenden Schraubenbewegung bezeichnen wir als *Vorschub*. Die zur Kehllinie koaxialen Zylinder schneiden aus der Böschungsfläche Schraubenlinien vom Radius r aus, welche alle denselben Vorschub h wie die Kehllinie haben. In der Abwicklung gehen die Schraubenlinien in konzentrische Kreise mit dem Radius ϱ über, wobei wieder $1/\varrho$ die

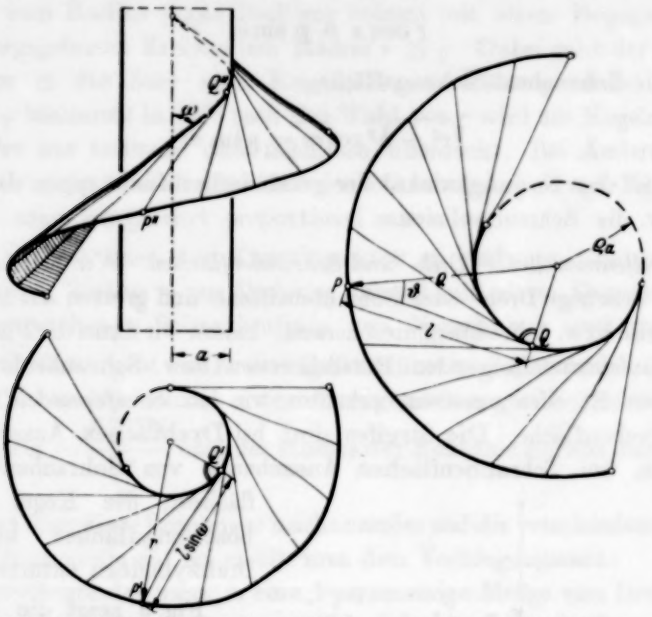

Fig. 2. Schraubenböschungsfläche samt ebener Abwicklung.

geodätische Krümmung der entsprechenden Schraubenlinien darstellt. Insbesondere liefert die Kehllinie in der Abwicklung einen Kreis vom Radius

$$\varrho_a = \frac{a^2 + h^2}{a} = \frac{2h}{\sin 2\omega}; \tag{3}$$

die Tangenten dieses Kreises stellen die Abwicklung der Erzeugenden der Schraubenböschungsfläche dar und schneiden die Radien der konzentrischen Kreise unter dem von ϱ abhängigen Winkel

$$\vartheta = \arcsin \varrho_a/\varrho = \arcsin \frac{2h}{\varrho \sin 2\omega}.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$r^2 = a^2 + l^2 \sin^2\omega, \quad \varrho^2 = \varrho_a^2 + l^2 = \frac{4h^2}{\sin^2 2\omega} + l^2,$$

wobei l die auf den Erzeugenden gemessene Länge bedeutet, ergibt sich mittels (2) nach kurzer Rechnung

$$\varrho = \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{\sin\omega} \geqq \sqrt{r^2 + h^2}. \tag{1b}$$

Die geodätischen Linien des Kegels und der Schraubenböschungsfläche liefern in der ebenen Abwicklung gerade Linien. Daraus folgt nach Fig. 1 in beiden Fällen

$$\varrho \cos \alpha = p,$$

woraus man mit Berücksichtigung von (1a) bzw. (1b) für den Kegel

$$r \cos \alpha = p \sin \omega \tag{4a}$$

und für die Schraubenböschungsfläche

$$\sqrt{r^2 + h^2} \cos \alpha = p \sin \omega \tag{4b}$$

erhält. α ist der Neigungswinkel der geodätischen Linie gegen die Parallelkreise bzw. die Schraubenlinien.

2. *Streifenmodell der Dreh- und Schraubenflächen.* Wir betrachten nunmehr eine beliebige Dreh- oder Schraubenfläche und greifen auf ihr einzelne Parallelkreise bzw. Schraubenlinien heraus. Indem wir dann die Flächenzonen zwischen aufeinanderfolgenden Parallelkreisen bzw. Schraubenlinien durch abwickelbare Streifen ersetzen, erhalten wir ein *Streifenmodell* der Dreh- bzw. Schraubenfläche. Die Streifen sind bei Drehflächen Ausschnitte von Drehkegeln, bei Schraubenflächen Ausschnitte von Schraubenböschungsflächen; die Kegel und die Böschungsflächen können zu Drehzylindern entarten.

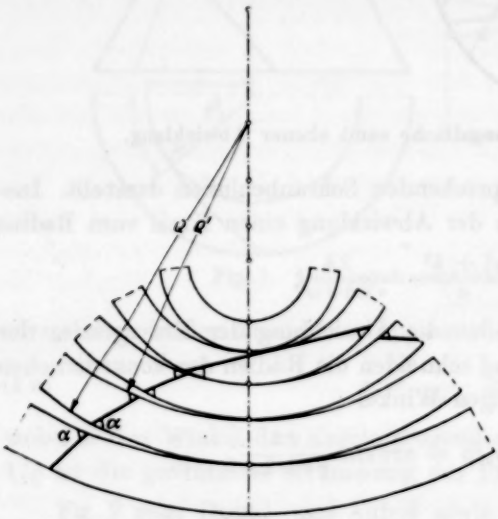

Fig. 3. Streifenmodell einer Dreh- oder Schraubenfläche.

Fig. 3 zeigt die ebene Abwicklung eines Streifenmodells. Sie besteht aus Sektoren von Kreisringen, die bei „negativ gekrümmten" konkaven Modellen sich überlappen und bei „positiv gekrümmten" konvexen Modellen klaffen.

Wenn man die Streifenbreite gegen Null gehen läßt, konvergieren die Modelle gegen die gegebene Dreh- bzw. Schraubenfläche. Durch diesen Grenzprozeß kann man Eigenschaften der Streifenmodelle in die Differentialgeometrie der Dreh- und Schraubenflächen übersetzen. Wir werden im folgenden mit diesem Verfahren die Verbiegung der Dreh- und Schraubenflächen und den Verlauf der geodätischen Linien untersuchen.

3. *Verbiegung von Dreh- und Schraubenflächen.* Nach Fig. 3 besteht die Abwicklung eines Streifenmodells aus Kreisringsektoren. Wir betrachten daher zunächst die Verbiegungsmöglichkeiten eines einzelnen Kreisringsektors mit den Radien ϱ, ϱ':

a) Nach (1a) kann der Kreisringsektor so verbogen werden, daß der Kreisrand vom Radius ϱ zur Deckung kommt mit einem Bogenstück eines beliebig vorgegebenen Kreises vom Radius $r \leqq \varrho$. Dabei geht der Kreisringsektor über in die Zone eines Kegels, dessen Öffnungswinkel 2ω durch $\sin\omega = r/\varrho$ bestimmt ist. Je nach der Wahl von r wird die Kegelzone genau einfach oder nur teilweise oder mehrfach überdeckt. Bei Änderung von r ändert sich r' proportional mit r und der Azimutwinkel φ (vgl. Fig. 1) wegen $r\varphi = u = \text{const}$ umgekehrt proportional mit r.

b) Nach (1b) kann der Kreisringsektor so verbogen werden, daß der Kreisrand vom Radius ϱ zur Deckung kommt mit einem Bogenstück einer beliebig vorgegebenen Schraubenlinie vom Vorschub h und vom Radius $r \leqq \sqrt{\varrho^2 - h^2}$. Dabei geht der Kreisringsektor über in die Zone einer Schraubenböschungsfläche; der Winkel ω der Erzeugenden gegen die Schraubenachse ist durch $\sin\omega = \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{\varrho}$ und der Radius der Kehllinie hierauf durch (3) festgelegt.

Wendet man diese Ergebnisse nacheinander auf die verschiedenen Streifen eines Streifenmodells an, so erhält man den Verbiegungssatz:

Ein Streifenmodell kann in eine 1-parametrige Menge von Drehmodellen und eine 2-parametrige Menge von Schraubenmodellen verbogen werden; bei Drehmodellen läßt sich ein Kreisradius $r \leqq \varrho$, bei Schraubenmodellen der Vorschub h sowie ein Kreisradius $r \leqq \sqrt{\varrho^2 - h^2}$ willkürlich vergeben. Bei je 2 aufeinander verbiegbaren Drehmodellen stehen einander entsprechende Radien in einem konstanten Verhältnis λ und einander entsprechende Azimutwinkel im umgekehrten Verhältnis $1/\lambda$.

Durch den in Ziffer 2 erwähnten Grenzprozeß geht der Verbiegungssatz der Streifenmodelle in den gleichlautenden Verbiegungssatz der Dreh- und Schraubenflächen über, der in der Differentialgeometrie als *Bourssches Theorem*[2]) bekannt ist. Außerdem läßt sich die Verbiegung der Streifenmodelle in einfachster Weise darstellend-geometrisch verwirklichen, indem man in Grund- und Aufriß die von den Erzeugenden der einzelnen Streifen gebildeten Streckenzüge konstruiert. Man erhält hierdurch mit beliebiger Genauigkeit die Meridiane der Biegungsdrehflächen und die zu den Schraubenlinien konjugierten Kurven der Biegungsschraubenflächen.

---

[2]) Vgl. z. B. L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale I 1, 1927 (Bologna), S. 343ff.

4. *Beispiele: Spiraldrehflächen und Pseudosphäre.* Als Beispiel betrachten wir Streifenmodelle, bei denen je zwei benachbarte Streifen der Abwicklung in einem konstanten Verhältnis μ zueinander ähnlich sind. Bei Ähnlichkeitstransformationen mit den Verhältnissen μ, μ^{-1}, μ^2, μ^{-2} usw. wird dann die Abwicklung als Ganzes, abgesehen vom ersten und letzten Streifen, in sich transformiert. Man kann diesen Tatbestand auch folgendermaßen ausdrücken: Wenn man ein Streifenmodell der hier betrachteten Art im Verhältnis μ, μ^2, μ^3 usw. ähnlich vergrößert oder verkleinert, so haben das ursprüngliche und das transformierte Modell dieselbe Abwicklung, sind also aufeinander verbiegbar. Beim Grenzübergang ergeben sich Flächen, die sich auf die 1-parametrigen Mengen der zu ihnen ähnlichen Flächen verbiegen lassen. Wie S. Lie [3]) gezeigt hat, sind Flächen dieser Art *Spiralflächen* oder Biegungsflächen von Spiralflächen. Da die vorliegenden Flächen demnach sowohl auf Dreh- und Schraubenflächen als auch auf Spiralflächen verbogen werden können, nennen wir sie kurz *Spiraldrehflächen.*

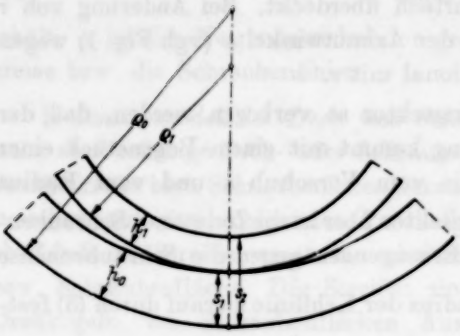

Fig. 4.
Streifenpaar für eine Spiraldrehfläche.

Wir bezeichnen mit ϱ_0, $\varrho_1 = \varrho_0\,\mu$, $\varrho_2 = \varrho_0\mu^2$ usw. die äußeren Kreisradien und mit h_0, $h_1 = h_0\mu$, $h_2 = h_0\mu^2$ usw. die Breiten der einzelnen Streifen; vgl. Fig. 4. Dann erhält man für die zu den Kreisen senkrechten Meridianpolygone die Bogenlängen

$$s_1 = h_0, \quad s_2 = h_0 + h_1, \ldots, \quad s_n = h_0 + h_1 + \cdots + h_{n-1},$$
$$= h_0\,(1 + \mu + \cdots + \mu^{n-1}),$$

woraus nach kurzer Rechnung

$$\varrho_n = \varrho_0 + a\,s_n, \quad a = \varrho_0\,\frac{\mu - 1}{h_0} \tag{5}$$

und nach dem Grenzübergang vom Modell zu Fläche

$$\boxed{\varrho = \varrho_0 + a\,s} \tag{6}$$

folgt.

Für $a = -1$ wird $\varrho_0 - \varrho_1 = h_0$, d. h. die Streifen der ebenen Abwicklung schließen sich lückenlos aneinander, die Spiraldrehfläche spezialisiert

[3]) Lie-Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen, Leipzig 1896, S. 162.

sich zum Drehkegel. Für $a > -1$ ergeben sich negativ gekrümmte und für $a < -1$ positiv gekrümmte Drehspiralflächen. Im Sonderfall $a = 0$ wird $\mu = 1$, d. h. die Streifen der ebenen Abwicklung sind kongruent. An Stelle der Ähnlichkeitstransformationen treten in diesem Falle Kongruenztransformationen und die Spiraldrehflächen entarten in Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes, wobei die aus (6) folgende Beziehung $\varrho = \varrho_0 = \text{const}$ die bekannte Traktrixeigenschaft der *Pseudosphäre* liefert.

In Fig. 5 ist ein Drehflächenmeridian für ein Streifenmodell einer negativ gekrümmten Spiraldrehfläche ($\varrho_0/h = 4$, $a = -0{,}08$) nach Gleichung (5) konstruiert.

Aus (6) folgt mit

$$\frac{dr}{ds} = -\frac{r}{\varrho} \quad \text{und} \quad \left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2$$

bei der Anfangsbedingung $r_0 = \varrho_0$ für $s = 0$ im Falle $a = 0$ als Meridiangleichung der Pseudosphäre

$$z = \int_{\varrho_0}^{r} \sqrt{\varrho_0^2 - r^2}\, \frac{dr}{r}$$

und im Falle $a \neq 0$ als Meridiangleichung der Spiraldrehflächen [4])

$$z = \frac{1}{a} \int_{\varrho_0}^{r} \sqrt{(r/\varrho_0)^{-2(a+1)} - 1}\, dr.$$

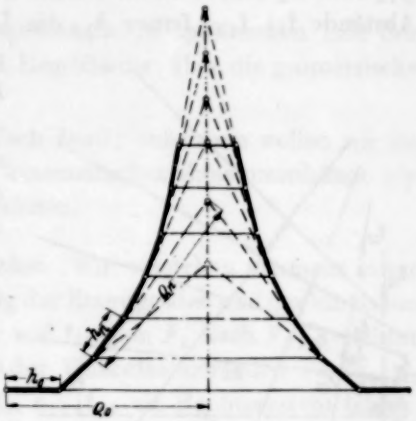

Fig. 5.
Konstruktion einer Spiraldrehfläche.

5. *Geodätische Linien auf Dreh- und Schraubenflächen.* Die geodätischen Linien eines Streifenmodells setzen sich in der ebenen Abwicklung aus geraden Strecken zusammen. Beim Übergang von einem Streifen zum nächsten sind die Scheitelwinkel α einander gleich (vgl. Fig. 3), so daß die Konstanten auf der rechten Seite der Gleichungen (4a) bzw. (4b) für alle Streifen denselben Wert haben. Man erhält daher für die geodätischen Linien auf Drehflächen die bekannte *Clairautsche Gleichung*

(7a) $$\boxed{r \cos \alpha = \text{const}}$$

und für die geodätischen Linien auf Schraubenflächen die allgemeinere Beziehung

(7b) $$\boxed{\sqrt{r^2 + h^2}\, \cos \alpha = \text{const}}$$

[4]) Vgl. hierzu L. Raffy, Par. soc. math. **20** (1892), S. 22.

II. Regelflächen.

1. *Stangenmodell der Regelflächen.* Auf einer beliebig vorgegebenen Regelfläche greifen wir einzelne Erzeugende heraus und verbinden je zwei aufeinanderfolgende Erzeugende durch die auf ihnen senkrecht stehenden kürzesten Abstände; wenn die aufeinanderfolgenden Erzeugenden parallel sind, wählen wir irgendein gemeinsames Lot als kürzesten Abstand. Das so erzeugte Geradengebilde bezeichnen wir als *Stangenmodell.*

In Fig. 6 ist ein Stangenmodell dargestellt. Die Erzeugenden sind mit $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ usw., die Geraden der kürzesten Abstände mit $\mathfrak{k}_{12}, \mathfrak{k}_{23}$ bezeichnet. φ_{12} bzw. ω_2 bedeutet den Winkel der Erzeugenden $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ bzw. der kürzesten Abstände $\mathfrak{k}_{12}, \mathfrak{k}_{23}$, ferner h_{12} die Länge des kürzesten Abstandes zwischen $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ und v_2 die Entfernung der Fußpunkte F_{21}, F_{23} der kürzesten Abstände auf $\mathfrak{g}_2$.

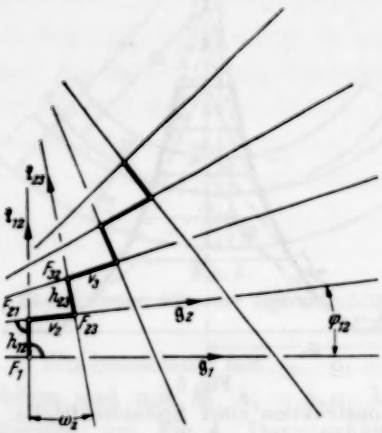

Fig. 6.
Stangenmodell einer Regelfläche.

Die Beziehung zwischen den Geradenfolgen $\mathfrak{g}_i$ und $\mathfrak{k}_{i,i+1}$ ist eine gegenseitige, d. h. man kann die Linien $\mathfrak{k}_{i,i+1}$ als Erzeugende nehmen und bekommt dann als kürzeste Abstände die Strecken v_i auf den Geraden $\mathfrak{g}_i$.

Wenn man die das Stangenmodell aufbauenden Erzeugenden $\mathfrak{g}_i$ auf der vorgegebenen Regelfläche enger und enger nimmt, konvergieren die Modelle gegen die Regelfläche und man erhält durch diesen Grenzprozeß die Differentialgeometrie der Regelflächen aus elementargeometrischen Beziehungen der Stangenmodelle. Die Streckenzüge mit den Fußpunkten F_{ik} der kürzesten Abstände als Eckpunkten gehen an der Grenze in die *Kehllinie* der Regelfläche über, die Geradenfolge $\mathfrak{k}_{12}, \mathfrak{k}_{23}$ usw. konvergiert gegen die *konjugierte Regelfläche*, welche die gegebene Regelfläche längs der gemeinsamen Kehllinie berührt.

2. *Bewegungsinvarianten der Regelflächen.* Ein Stangenmodell ist bis auf eine beliebige Bewegung im Raum festgelegt, wenn die Winkel $\varphi_{i,i+1}$ und ω_i sowie die Längen $h_{i,i+1}$ und v_i vorgegeben sind. Dabei muß man geeignete Festsetzungen über die Vorzeichen treffen, worauf wir in Ziffer 3 zurückkommen werden.

Beim Übergang vom Stangenmodell zur Regelfläche, deren Erzeugende durch hinreichend oft differenzierbare Funktionen eines Parameters t gegeben seien, erhält man die Grenzwerte

$$\frac{\varphi_{i,i+1}}{\Delta t} \to p(t), \quad \frac{\omega_i}{\Delta t} \to q(t). \quad \frac{h_{i,i+1}}{\Delta t} \to \bar{p}(t), \quad \frac{v_i}{\Delta t} \to \bar{q}(t).$$

Aus der Herleitung folgt, daß die vier Funktionen $p(t)$, $q(t)$, $\bar{p}(t)$, $\bar{q}(t)$ Differentialinvarianten sind, welche die Regelfläche bis auf eine beliebige Bewegung im Raum festlegen. Sie hängen noch von dem willkürlichen Parameter t ab, während ihre Verhältnisse von t unabhängig sind. Ebenso hängen die Integralinvarianten

$$P = \int_{t_a}^{t_b} p\,dt = \lim \Sigma \varphi_{i,\,i+1}, \quad Q = \int_{t_a}^{t_b} q\,dt = \lim \Sigma \omega_i,$$

$$\bar{P} = \int_{t_a}^{t_b} \bar{p}\,dt = \lim \Sigma h_{i,\,i+1}, \quad \bar{Q} = \int_{t_a}^{t_b} \bar{q}\,dt = \lim \Sigma v_i$$

nicht mehr von t ab. P und Q sind Bogenlängen im sphärischen Bild der Ausgangsregelfläche und der konjugierten Regelfläche; über die geometrische Bedeutung von $\bar{P}$ und $\bar{Q}$ vgl. Ziffer 4.

Das Verhältnis $\bar{p}/p$ nennt man vielfach *Drall*; außerdem wollen wir im Hinblick auf die in Ziffer 4 erläuterten kinematischen Zusammenhänge q/p als *Biegung* und $\bar{q}/p$ als *Schrotung* bezeichnen.

3. *Ableitungsgleichungen der Regelflächen.* Wir verstehen nunmehr unter $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{t}_{12}$ die Einheitsvektoren in Richtung der Erzeugenden und der kürzesten Abstände des Stangenmodells, und zwar soll $\mathfrak{t}_{12}$ von F_1 nach F_{21} gerichtet sein. Außerdem sei $\mathfrak{n}_{12}$ der zu $\mathfrak{t}_{12}$ und der Winkelhalbierenden von $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ senkrechte Einheitsvektor, derart, daß $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{n}_{12}, \mathfrak{t}_{12}$ ein Rechtssystem bilden. Schließlich bedeutet $\dot{\mathfrak{n}}_2$ den zu $\mathfrak{g}_2$ uud der Winkelhalbierenden von $\mathfrak{t}_{12}, \mathfrak{t}_{23}$ senkrechten Einheitsvektor, wobei $\mathfrak{g}_2, \dot{\mathfrak{n}}_2, \mathfrak{t}_{12}$ wieder rechtsorientiert sind. Dann gelten offenbar die Beziehungen

$$(8) \qquad \mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{n}_{12} \cdot 2 \sin \frac{\varphi_{12}}{2}, \quad \mathfrak{t}_{23} - \mathfrak{t}_{12} = -\dot{\mathfrak{n}}_2 \cdot 2 \sin \frac{\omega_2}{2},$$

welche gleichzeitig die Vorzeichen von φ_{12} und ω_2 definieren.

Beim Grenzübergang vom Stangenmodell zur Regelfläche konvergiert sowohl $\mathfrak{n}_{12}$ als auch $\dot{\mathfrak{n}}_2$ gegen den Normalenvektor $\mathfrak{n}$ der Regelfläche und aus (8) folgen die Ableitungsgleichungen

$$(9) \qquad \boxed{\mathfrak{g}' = p\,\mathfrak{n}, \quad \mathfrak{t}' = -q\,\mathfrak{n}, \quad \mathfrak{n}' = -p\,\mathfrak{g} + q\,\mathfrak{t}.}$$

Die letzte dieser Gleichungen ergibt sich aus den beiden ersten mit Hilfe der Orthogonalitätsbeziehung $\mathfrak{n} = \mathfrak{t} \times \mathfrak{g}$.

Zur Festlegung der Geraden benötigt man neben den die Richtung bestimmenden Einheitsvektoren $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{t}$ noch die Momentvektoren

$$(10) \qquad \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{r}_{(\mathfrak{g})} \times \mathfrak{g}, \quad \bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{r}_{(\mathfrak{n})} \times \mathfrak{n}, \quad \bar{\mathfrak{t}} = \mathfrak{r}_{(\mathfrak{t})} \times \mathfrak{t}$$

mit dem Radiusvektor $\mathfrak{r}$ von einem beliebig angenommenen Bezugspunkt 0 nach einem beliebigen Punkt der betreffenden Geraden. Für die Differentiation nach t liefern die an den Stangenmodellen ablesbaren Beziehungen

$$\Delta \mathfrak{r}_{(\mathfrak{g})} = h_{12}\mathfrak{k}_{12}, \quad \Delta \mathfrak{r}_{(\mathfrak{n})} = h_{12}\mathfrak{k}_{12} + v_2\mathfrak{g}_2, \quad \Delta \mathfrak{r}_{(\mathfrak{k})} = v_2\mathfrak{g}_2,$$

welche gleichzeitig die Vorzeichen von h_{12} und v_2 definieren, beim Grenzübergang zur Regelfläche die Formeln

$$\mathfrak{r}'_{(\mathfrak{g})} = \bar{p}\,\mathfrak{k}, \quad \mathfrak{r}'_{(\mathfrak{n})} = \bar{p}\,\mathfrak{k} + \bar{q}\,\mathfrak{g}, \quad \mathfrak{r}'_{(\mathfrak{k})} = \bar{q}\,\mathfrak{g}. \tag{11}$$

Durch Differentiation von (10) kommt schließlich mit Berücksichtigung von (9) und (11) das Gleichungssystem

$$\boxed{\bar{\mathfrak{g}}' = \bar{p}\,\mathfrak{n} + p\,\bar{\mathfrak{n}}, \quad \bar{\mathfrak{k}}' = -\bar{q}\,\mathfrak{n} - q\,\bar{\mathfrak{n}}, \quad \bar{\mathfrak{n}}' = -\bar{p}\,\mathfrak{g} - p\,\bar{\mathfrak{g}} + \bar{q}\,\mathfrak{k} + q\,\bar{\mathfrak{k}}.} \tag{12}$$

Die Differentialgleichungen (9) und (12) sind die bekannten *Ableitungsgleichungen*[5]) der Liniengeometrie der Regelflächen.

4. *Verbiegung und Verschrotung der Regelflächen.* Wir denken uns die kürzesten Abstände der Stangenmodelle nach Fig. 7 als Blechhülsen ausgebildet, welche um die Stangen $\mathfrak{g}_i$ verdrehbar und längs $\mathfrak{g}_i$ verschiebbar sind, während Winkel und Abstand aufeinanderfolgender Stangen ungeändert bleibt. Das Stangenmodell läßt sich dann durch Verdrehung und Verschiebung der Hülsen unter Festhaltung der Winkel $\varphi_{i,\,i+1}$ und der Längen $h_{i,\,i+1}$ deformieren. Bei reiner Verdrehung der Hülsen sprechen wir von *Verbiegungen*, im allgemeinen Fall, d. h. wenn Verschiebungen hinzukommen, von *Verschrotungen* des Modells. Bei Verbiegungen bleiben die Strecken v_i fest, während sich die Winkel ω_i ändern, bei allgemeinen Verschrotungen ändern sich sowohl die Strecken v_i als auch die Winkel ω_i.

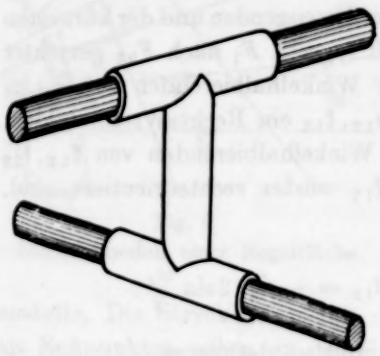

Fig. 7. Blechhülse zur Verkopplung eines Stangenpaars.

Je zwei aufeinanderfolgende, durch den kürzesten Abstand verbundene Stangen bezeichnen wir als *Stangenpaar* des Modells. Die Stangenpaare bleiben sowohl bei Verbiegungen wie bei Verschrotungen im Winkel und im kürzesten Abstand bis auf ein unwesentliches Gleiten der Stangen in den Hülsen ungeändert. Die sich paarweise entsprechenden Stangenpaare

[5]) Vgl. W. Blaschke, Differentialgeometrie I, Berlin 1930, S. 270; außerdem F. Löbell, Jber. d. D. M. V. 51 (1941), Heft 2, S. 29–41.

zweier in der Verbiegungsbeziehung stehenden Modelle I, II kommen der Reihe nach miteinander zur Deckung durch Drehungen um die Geraden $\mathfrak{g}_i$ mit den Winkeln $\omega_i^{II} - \omega_i^{I}$. Bei zwei in allgemeiner Verschrotungsbeziehung stehenden Modellen treten an Stelle der Drehungen um die Geraden $\mathfrak{g}_i$ Schraubungen, indem zu den Drehungen $\omega_i^{II} - \omega_i^{I}$ noch die Verschiebungen $v_i^{II} - v_i^{I}$ hinzukommen.

Beim Grenzübergang vom Modell zur Fläche liefert der Verbiegungsprozeß die Biegungsflächen und der Verschrotungsprozeß die Schrotungs-

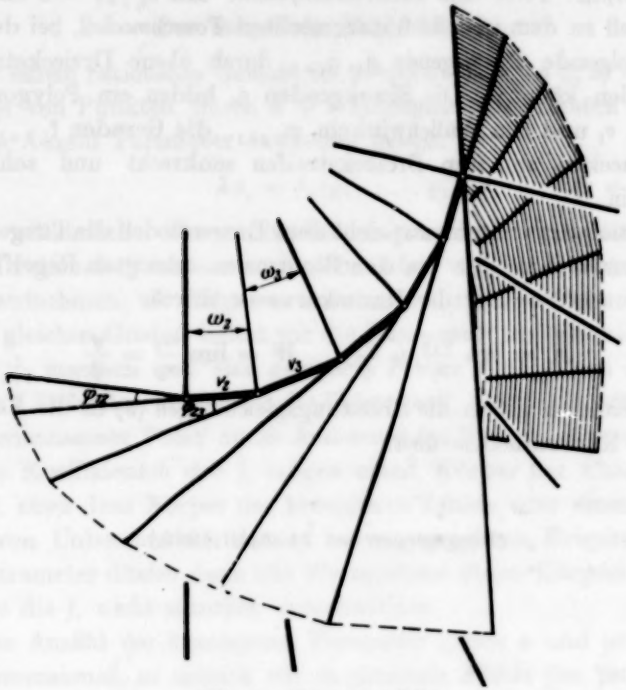

Fig. 8. Torsenmodell.

flächen der vorgegebenen Regelfläche. Die Schrotungsflächen stimmen in den Invarianten $p(t)$ und $\bar{p}(t)$ und demnach im Drall $\bar{p}/p$, die Biegungsflächen außerdem noch in der Invarianten $\bar{q}(t)$ und somit in der Schrotung $\bar{q}/p$ überein, während sie sich in der Biegung q/p unterscheiden. Biegungsregelflächen lassen sich aneinander abrollen. Dabei berühren sie sich in jedem Augenblick längs einer gemeinsamen Erzeugenden $\mathfrak{g}(t)$ und führen um diese eine Momentandrehung aus; die momentane Drehgeschwindigkeit ist gleich $q^{II}(t) - q^{I}(t)$, falls der Parameter t die Zeit bedeutet. Bei Schrotungsregelflächen tritt an Stelle des Abrollens ein „Abschroten"; die gemeinsamen Erzeugenden $\mathfrak{g}(t)$ sind die Achsen von Momentanschraubungen mit der Drehgeschwindigkeit $q^{II}(t) - q^{I}(t)$ und der Verschiebungsgeschwindigkeit $\bar{q}^{II}(t) - \bar{q}^{I}(t)$.

Ein Stangenmodell läßt sich stets so verbiegen, daß die Erzeugenden $\mathfrak{g}_i$ einer Ebene parallel werden; die kürzesten Abstände $\mathfrak{k}_{i,i+1}$ stehen dann auf dieser Ebene senkrecht und bilden die Winkel $\omega_i = 0$. Dem entsprechend kann eine Regelfläche stets in ein *Konoid* verbogen werden, indem man der Invarianten $q(t)$ den Wert Null gibt. Die Integralinvarianten $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ (vgl. Ziffer 2) zwischen zwei Geraden $\mathfrak{g}_a$ und $\mathfrak{g}_b$ können dann als kürzester Abstand dieser Geraden und als Bogenlänge des Konoidumrisses gedeutet werden.

5. *Sonderfall*: *Torse und Binormalenfläche.* Mit $h_{i,i+1} = 0$ entartet das Stangenmodell zu dem in Bild 8 dargestellten *Torsenmodell*, bei dem je zwei aufeinanderfolgende Erzeugende $\mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{g}_{i+1}$ durch ebene Dreieckstreifen verbunden werden können. Die Erzeugenden $\mathfrak{g}_i$ bilden ein Polygon mit den Seitenlängen v_i und den Außenwinkeln $\varphi_{i,i+1}$, die Geraden $\mathfrak{k}_{i,i+1}$ stehen in den Polygonecken auf den Dreieckstreifen senkrecht und schließen die Winkel ω_i ein.

Differentialgeometrisch entspricht dem Torsenmodell die Tangentenfläche einer Raumkurve samt der von den Binormalen erzeugten Regelfläche. Die Krümmung und Windung der Raumkurve ist durch

$$K = \lim \frac{\varphi_{12}}{v_2} = \frac{p}{q}, \qquad W = \lim \frac{\omega_2}{v_2} = \frac{q}{q}$$

gegeben. Hierdurch gehen die Ableitungsgleichungen (9) in die *Frenetschen Formeln* der Kurventheorie über.

(Eingegangen am 14. April 1942.)

Einige Bemerkungen über rationale Flächen.

Von

Oskar Perron in München.

§ 1.

Der behandelte Problemkreis.

Unter einem rationalen Gebilde im projektiven R_n ($n \geqq 2$) verstehen wir eine Menge von Punkten, deren $n+1$ homogene Koordinaten sich rational durch eine Anzahl Parameter darstellen lassen:

$$\lambda x_\nu = f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_k) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

λ ist ein willkürlicher Proportionalitätsfaktor, den wir später weglassen. Die f_ν sind rationale Funktionen, die wir, indem wir den Hauptnenner in den Faktor λ aufnehmen, als *Polynome* annehmen dürfen, ja sogar als homogene Polynome gleichen Grades, indem wir die Parameter homogenisieren, d. h. $\varrho_\varkappa$ durch $\varrho_\varkappa \varrho_{k+1}^{-1}$ ersetzen und eine geeignete Potenz von ϱ_{k+1} in den Faktor λ aufnehmen. Außerdem dürfen wir die Polynome f_ν als relativ prim annehmen, weil ein gemeinsamer Teiler durch Änderung des Faktors λ beseitigt werden kann. Die Koeffizienten der f_ν mögen einem Körper der Charakteristik 0 angehören, etwa dem Körper der komplexen Zahlen oder einem durch Adjunktion von Unbestimmten daraus hervorgegangenen Erweiterungskörper und die Parameter dürfen dann alle Wertsysteme dieses Körpers durchlaufen für welche die f_ν nicht sämtlich verschwinden.

Ist die Anzahl der homogenen Parameter gleich n und ist das Gebilde $(n-1)$-dimensional, so nennen wir es rationale *Fläche* (im projektiven R_n; *Kurve* für $n = 2$). Für eine rationale Fläche gilt also die Darstellung

$$x_\nu = f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n), \tag{1}$$

wo die f_ν homogene Polynome gleichen positiven Grades ohne gemeinsamen nichtkonstanten Teiler sind. Die Gleichungen (1) vermitteln eine (meist nicht eineindeutige) Abbildung der Fläche auf die $(n-1)$-dimensionale Ebene, deren Punkte die homogenen Koordinaten $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ haben. Man kennt allerhand Möglichkeiten, um bei einer algebraischen Fläche herauszubekommen, ob sie rational ist, und gegebenenfalls eine Abbildung auf die Ebene zu finden [1]. Aber um die umgekehrte Frage scheint man sich nie recht gekümmert zu

[1]) Darüber belehrt z. B. das Buch von F. Conforto, Le superficie razionali. Bologna 1939.

haben, wohl, weil man sie für trivial hielt; und doch sind da manche Fragen zu klären.

Daß es sowohl auf der Ebene wie auf der Fläche im allgemeinen Ausnahmepunkte gibt, denen bei der Abbildung kein Bildpunkt entspricht, ist zwar längst bekannt und wird auch bei Conforto a. a. O. mehrfach hervorgehoben. Aber wie bekommt man überhaupt die Flächengleichung? Die Antwort heißt natürlich, daß man ja nur die Parameter zu *eliminieren* braucht; aber da beginnt die Schwierigkeit. Zunächst kann es sein, daß die Gleichungen (1) überhaupt keine Fläche, sondern ein Gebilde von weniger als $n-1$ Dimensionen darstellen. Da möchte man doch brauchbare Kriterien haben. Und wenn sie eine Fläche darstellen, welches ist ihre Ordnung? Man wird sich die Antwort so überlegen. Eine allgemeine Gerade, dargestellt durch $n-1$ Gleichungen

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n-1),$$

hat mit der Fläche, wenn die f_ν vom Grad m sind, nach dem Bézoutschen Satz m^{n-1} Punkte gemein, also ist die Fläche von der Ordnung m^{n-1}. Aber dann wäre die Ordnung einer rationalen Fläche im R_n stets eine $(n-1)$-te Potenz, was nicht zutrifft. Bei den Flächen zweiter Ordnung im R_3 ist z. B. bei den üblichen Darstellungen in der Gestalt (1) stets $m = 2$, woraus man die Ordnung $2^2 = 4$ errechnet statt 2; die Rechnung stimmt also nicht. Andererseits ist bekannt, daß beim Eliminieren die „Endgleichung" leicht mit „falschen" Faktoren behaftet ist; um solchen zu entgehen, wird man etwa die Resultante

$$R\begin{pmatrix} f_1 - x_1, & \ldots, & f_n - x_n, & f_0 - x_0 \\ \varrho_1, & \ldots, & \varrho_n, & 1 \end{pmatrix}$$

oder auch die Resultante

$$R\begin{pmatrix} x_0 f_1 - x_1 f_0, & \ldots, & x_0 f_n - x_n f_0 \\ \varrho_1, & \ldots, & \varrho_n \end{pmatrix}$$

gleich 0 setzen. Aber erstens ist dieser Resultantenbegriff für $n > 1$ bzw. für $n > 2$ nur wenig bekannt, zweitens wird der Kenner leicht finden, daß die erste Resultante in den x_ν homogen vom Grad m^n und die zweite homogen vom Grad $n \cdot m^{n-1}$ ist, während man nur die Ordnung m^{n-1} erwartet. Die Rechnung stimmt also wieder nicht. Sind in den Resultanten vielleicht auch noch „falsche" Faktoren enthalten? Zu allem Unglück kommt es aber auch häufig vor, daß beide Resultanten identisch verschwinden (vgl. die Sätze des § 3), also überhaupt keine Flächengleichung liefern. Was dann?

Man sieht, es sind noch allerhand Fragen zu klären, und ein Beitrag dazu soll im folgenden mit streng algebraischen Methoden geliefert werden. Die dabei benötigten Sätze findet man in des Verfassers Buch: Algebra, Bd. 1, zweite Aufl. 1932, das unter „Algebra" zitiert wird.

§ 2.

Die Funktionalmatrix.

Satz 1. *Notwendig und hinreichend dafür, daß die Gleichungen* (1), *wo die f_ν homogene Polynome gleichen Grades sind* [2]), *eine und nur eine absolut irreduzible homogene algebraische Gleichung $F(x_0, \ldots, x_n) = 0$ nach sich ziehen, ist, daß die n-reihigen Determinanten der Funktionalmatrix*

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_0}{\partial \varrho_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \varrho_1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_0}{\partial \varrho_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \varrho_n} \end{matrix} \right\|$$

nicht sämtlich identisch verschwinden. Ist sie erfüllt, so ist also das rationale Gebilde (1) *ein (echter oder unechter) Teil der algebraischen Fläche $F(x_0, \ldots, x_n) = 0$, aber nicht zugleich Teil eines algebraischen Gebildes von weniger als $n-1$ Dimensionen.*

Beweis. Ganz unabhängig von der Funktionalmatrix haben die Gleichungen (1) nach Algebra, Satz 56 eine Gleichung $G(x_0, \ldots, x_n) = 0$ zur Folge. Es ist also $G(f_0, \ldots, f_n)$ als Polynom der ϱ_ν identisch 0, und da die f_ν homogen von gleichem Grad sind, muß dann schon jeder in bezug auf die f_ν homogene Bestandteil von $G(f_0, \ldots, f_n)$ für sich verschwinden. Die Gleichungen (1) haben also auch eine *homogene* Gleichung $G(x_0, \ldots, x_n) = 0$ zur Folge [3]). Zerlegt man G in absolut irreduzible Faktoren [4])

$$G(x_0, \ldots, x_n) = F_1(x_0, \ldots, x_n) \ldots F_r(x_0, \ldots, x_n),$$

die dann von selbst ebenfalls homogen sind, so ist das Produkt

$$F_1(f_0, \ldots, f_n) \ldots F_r(f_0, \ldots, f_n)$$

als Polynom der ϱ_ν identisch 0; also ist schon ein Faktor identisch 0, etwa der erste. Das besagt aber, daß die Gleichungen (1) die irreduzible Gleichung $F_1(x_0, \ldots, x_n) = 0$ nach sich ziehen. Würden sie noch eine zweite nach sich ziehen, so könnte man aus beiden Gleichungen eine beliebige der Größen x_ν eliminieren, d. h. die gewöhnliche (Sylvestersche) Resultante gleich 0 setzen

---

[2]) Daß die f_ν relativ prim sind, braucht bei diesem Satz nicht vorausgesetzt zu werden.

[3]) Ein anderer Beweis dieses Satzes findet sich in meiner Arbeit: Beweis und Verschärfung eines Satzes von Kronecker. Math. Annalen 118 (1942), S. 441—448.

[4]) Dazu ist es vielleicht nötig, den zugrunde gelegten Körper durch Adjunktion neuer Größen zu erweitern. Solche Adjunktionen denken wir uns hier und auch später, sobald sie nötig werden, stets stillschweigend vollzogen. Dagegen ist es nicht nötig, einen algebraisch abgeschlossenen Körper vorauszusetzen.

und würde so eine Relation zwischen den anderen x_μ erhalten [5]). Nach Algebra, Satz 61 müßten dann aber die Determinanten der Funktionalmatrix verschwinden, entgegen der Voraussetzung.

Bemerkung. Satz 1 sagt nur, daß das rationale Gebilde ein *Teil* der Fläche $F = 0$ ist. Es wäre falsch zu sagen, daß es die ganze Fläche ist; denn es kann Ausnahmepunkte auf der Fläche geben, die durch die Darstellung (1) nicht erfaßt werden.

Beispiele. I. $x_0 = \varrho_1^2,\ x_1 = \varrho_1\varrho_2,\ x_2 = \varrho_2^2,\ x_3 = \varrho_3^2,$

II. $x_0 = \varrho_1^3,\ x_1 = \varrho_1^2\varrho_2,\ x_2 = \varrho_1\varrho_2^2,\ x_3 = \varrho_3^3,$

III. $x_0 = \varrho_1^2,\ x_1 = \varrho_1\varrho_2,\ x_2 = \varrho_2^2,\ x_3 = \varrho_1\varrho_3,$

IV. $x_0 = \varrho_1^2,\ x_1 = \varrho_1\varrho_2,\ x_2 = \varrho_2\varrho_3,\ x_3 = \varrho_1\varrho_3 + \varrho_2^2.$

In den Beispielen I, II, III wird der Kegel $x_0x_2 - x_1^2 = 0$ dargestellt, und zwar im Beispiel I vollständig. Im Beispiel II fehlt ihm die Mantellinie $x_0 = 0$, $x_1 = 0$ mit Ausnahme der Spitze mit den Koordinaten 0, 0, 0, 1. Im Beispiel III fehlt ihm ebenfalls diese Mantellinie, aber diesmal einschließlich Spitze und mit Ausnahme des Punktes 0, 0, 1, 0. Im Beispiel IV wird die Fläche $x_0\,x_1\,x_3 = x_0^2\,x_2 + x_1^3$ dargestellt, doch fehlt ihr genau *ein* Punkt, nämlich der Punkt 0, 0, 1, 0.

§ 3.

Resultantensätze.

Das Kriterium in Satz 1 ist bei der praktischen Anwendung recht unhandlich, und außerdem sagt es nichts über die Ordnung der algebraischen Fläche aus. Um günstigere Resultate zu bekommen, brauchen wir einige Sätze über eine gewisse Resultante.

Satz 2. *Wenn die $n+1$ homogenen Polynome*

$$f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n),\ \ldots,\ f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$$

alle vom gleichen Grad m sind und wenn $m^{n-1} = l$ gesetzt wird, dann ist die Resultante

$$\mathsf{P} = R\left(\begin{matrix} x_0 f_1 - x_1 f_0, & x_0 f_2 - x_2 f_0, & \ldots, & x_0 f_n - x_n f_0 \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \ldots, & \varrho_n \end{matrix}\right)$$

als Polynom der Unbestimmten $x_0, \ldots, x_n$ teilbar durch $x^{(n-1)\,l}$. Setzt man demgemäß

$$\mathsf{P} = x_0^{(n-1)\,l} F(x_0, \ldots, x_n),$$

so ist F entweder identisch 0 oder ein homogenes Polynom vom Grad l.

---

[5]) Sollte zufällig eine der beiden Gleichungen schon von x_r frei sein, so hat man schon das Gewünschte und braucht natürlich nichts mehr zu eliminieren.

Beweis. Nach Algebra, Satz 120 und § 47, I ist die Resultante P jedenfalls ein homogenes Polynom der x_ν vom Grad nl oder identisch 0. Nach Algebra, Satz 147 bleibt sie ungeändert, wenn man in der ersten Zeile zum letzten Glied ein mit einem von $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ freien Faktor multipliziertes anderes Glied addiert. Da sie aber außerdem nach Algebra, S. 221 bei Umordnung der Glieder der ersten Zeile sich nur mit ± 1 multipliziert, darf man ebenso zum ν-ten Glied etwa das mit $-\frac{x_\nu}{x_\mu}$ multiplizierte μ-te Glied addieren. Macht man das bei festem μ für alle von μ verschiedenen ν, so geht P über in [6])

$$R\left(\frac{x_0}{x_\mu}(x_\mu f_\varkappa - x_\varkappa f_\mu),\quad x_0 f_\mu - x_\mu f_0,\quad \frac{x_0}{x_\mu}(x_\mu f_\lambda - x_\lambda f_\mu)\right)$$
$$\varrho_\varkappa \qquad , \qquad \varrho_\mu \qquad , \qquad \varrho_\lambda$$
$$= \left(\frac{x_0}{x_\mu}\right)^{(n-1)l} \cdot R\left(x_\mu f_\varkappa - x_\varkappa f_\mu,\quad x_0 f_\mu - x_\mu f_0,\quad x_\mu f_\lambda - x_\lambda f_\mu\right)$$
$$\varrho_\varkappa \qquad , \qquad \varrho_\mu \qquad , \qquad \varrho_\lambda$$

Dabei ist zur Abkürzung $\varkappa$ als Vertreter der Indizes $1, \ldots, \mu - 1$ geschrieben, und λ als Vertreter der Indizes $\mu + 1, \ldots, n$. Der Exponent $(n-1)l$ ergibt sich aus Algebra, Satz 120. Da nach dem gleichen Satz die zuletzt angeschriebene Resultante wieder ein Polynom der x_ν ist, ergibt sich, daß die ursprüngliche Resultante P den Faktor $x_0^{(n-1)l}$ enthält. Da sie identisch 0 oder ein homogenes Polynom der x_ν vom Grad nl ist, ergibt sich, daß der Restfaktor $F(x_0, \ldots, x_n)$ identisch 0 oder homogen vom Grad $nl - (n-1)l = l$ ist. Zugleich erhält man die Formel

$$(2)\quad R\left(x_\mu f_\varkappa - x_\varkappa f_\mu,\quad x_0 f_\mu - x_\mu f_0,\quad x_\mu f_\lambda - x_\lambda f_\mu\right) = x_\mu^{(n-1)l} F(x_0, \ldots, x_n)$$
$$\varrho_\varkappa \qquad , \qquad \varrho_\mu \qquad , \qquad \varrho_\lambda$$
$$(\varkappa = 1, \ldots, \mu - 1;\quad \lambda = \mu + 1, \ldots, n).$$

Satz 3. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2 haben die $n+1$ Polynome $f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ dann und nur dann eine gemeinsame Nullstelle* [7]), *wenn das Polynom $F(x_0, \ldots, x_n)$ identisch verschwindet. Die Koeffizienten von F bilden also, wenn die Koeffizienten der Polynome f_ν selbst Unbestimmte sind, ein Resultantensystem dieser Polynome* [8]).

Beweis. Wenn die Polynome f_ν eine gemeinsame Nullstelle haben, so haben die n Polynome von $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$

$$(3)\qquad x_0 f_\nu - x_\nu f_0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

[6]) Sogar ohne Änderung des Vorzeichens, worauf es aber gar nicht ankommt.

[7]) Unter einer Nullstelle eines homogenen Polynoms ist stets eine nichttriviale Nullstelle zu verstehen. Zwei Nullstellen, die sich nur durch einen Proportionalitätsfaktor unterscheiden, gelten nicht als verschieden.

[8]) Über den Begriff Resultantensystem vgl. Algebra, S. 276.

ebenfalls diese Nullstelle. Daher verschwindet nach Algebra, Satz 139 die Resultante P und folglich auch $F(x_0, \ldots, x_n)$. Wenn umgekehrt F identisch verschwindet, so gilt dasselbe von P, so daß nach Algebra, Satz 139 die Polynome (3) eine gemeinsame Nullstelle $\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0$ haben. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{f_0(\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0)}{x_0} = \lambda,$$

so ist also

$$f_\nu(\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0) = \lambda x_\nu \qquad (\nu = 0, \ldots, n). \tag{4}$$

Wenn wir zeigen können, daß $\lambda = 0$ ist, so heißt das, daß die f_ν die gemeinsame Nullstelle $\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0$ haben, womit Satz 3 bewiesen sein wird.

Nun besteht zwischen den f_ν eine homogene Abhängigkeit (vgl. Beweis von Satz 1), etwa vom Grad N:

$$\sum C_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n} f_0^{\nu_0} f_1^{\nu_1} \ldots f_n^{\nu_n} = 0 \qquad (\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_n = N).$$

Nach (4) ist dann

$$\lambda^N \sum C_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n} x_0^{\nu_0} x_1^{\nu_1} \ldots x_n^{\nu_n} = 0,$$

und daraus folgt, da die x_ν Unbestimmte sind, $\lambda = 0$; w. z. b. w.

Satz 4. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2 ist die Resultante*

$$R\begin{pmatrix} f_1 - x_1, & \ldots, & f_n - x_n, & f_0 - x_0 \\ \varrho_1, & \ldots, & \varrho_n, & 1 \end{pmatrix}$$

die m-te Potenz des Polynoms $-F(x_0, \ldots, x_n)$.

Wir werden diesen Satz nicht weiter benötigen, weshalb wir auf den Beweis, der sich mit Hilfe von Algebra, Satz 146 führen läßt, verzichten. Der Satz wurde nur aufgeführt, weil er immerhin eine in § 1 gestellte Frage in überraschender Weise teilweise beantwortet.

Satz 5. *Wenn die $n+1$ homogenen Polynome m-ten Grades*

$$f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \quad \ldots, \quad f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$$

keine gemeinsame Nullstelle haben, so daß das in Satz 2 eingeführte homogene Polynom $F(x_0, \ldots, x_n)$ nach Satz 3 nicht identisch verschwindet, sondern vom Grad m^{n-1} ist, so hat das Formelsystem

$$x_\nu = f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \qquad (\nu = 0, \ldots, n)$$

die Gleichung $F(x_0, \ldots, x_n) = 0$ zur Folge; d. h. zwischen den Polynomen f_ν besteht die Abhängigkeit $F(f_0, \ldots, f_n) = 0$.

Ist umgekehrt $x_0', \ldots, x_n'$ ein Größensystem, für welches $F(x_0', \ldots, x_n') = 0$ ist, so gibt es (mindestens) ein Größensystem $\varrho_1', \ldots, \varrho_n'$ derart, daß die Gleichungen gelten:

$$x_\nu' = f_\nu(\varrho_1', \ldots, \varrho_n') \qquad (\nu = 0, \ldots, n).$$

Beweis. Es ist nur eine Änderung der Bezeichnung, wenn wir statt von dem Formelsystem im ersten Teil des Satzes von dem Formelsystem

$$x_\nu = f_\nu(y_1, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 0, \ldots, n)$$

reden. Dieses Formelsystem besagt aber, daß das Gleichungssystem mit den Unbekannten $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$

$$x_0 f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) - x_\nu f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

eine Lösung hat, nämlich $\varrho_1 = y_1, \ldots, \varrho_n = y_n$. Daraus folgt nach Algebra, Satz 139, daß die Resultante P verschwindet. Daher verschwindet nach Satz 2 auch $F(x_0, \ldots, x_n)$, da ja, sobald die y_ν Unbestimmte sind, $x_0 \neq 0$ ist. Damit ist der erste Teil von Satz 5 bewiesen.

Wenn umgekehrt $F(x_0', \ldots, x_n') = 0$ ist, so hat das Gleichungssystem

$$x_\nu' = f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \qquad (\nu = 0, \ldots, n)$$

zunächst, falls alle $x_\nu' = 0$ sind, die Lösung $\varrho_1 = 0, \ldots, \varrho_n = 0$, womit dieser triviale Fall erledigt ist. Anderenfalls sei etwa $x_\mu' \neq 0$. Wegen $F(x_0', \ldots, x_n') = 0$ verschwindet dann nach (2) auch die dortige Resultante mit x_ν' an Stelle von x_ν. Daher hat nach Algebra, Satz 139 das Gleichungssystem

$$x_u' f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) - x_\nu' f_\mu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) = 0$$

$$(\nu = 1, \ldots, \mu - 1, 0, \mu + 1, \ldots, n)$$

eine Lösung $\varrho_1'', \ldots, \varrho_n''$. Setzt man dann

$$\frac{f_\mu(\varrho_1'', \ldots, \varrho_n'')}{x_\mu'} = \lambda,$$

so ist

$$f_\nu(\varrho_1'', \ldots, \varrho_n'') = \lambda x_\nu' \qquad (\nu = 0, \ldots, n). \tag{5}$$

Hierbei ist aber $\lambda \neq 0$, weil ja die Polynome f_ν nach Voraussetzung keine gemeinsame Nullstelle haben. Setzt man daher

$$\frac{\varrho_\nu''}{\sqrt[m]{\lambda}} = \varrho_\nu' \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

so folgt aus (5)

$$f_\nu(\varrho_1', \ldots, \varrho_n') = x_\nu' \qquad (\nu = 0, \ldots, n),$$

womit auch der zweite Teil von Satz 5 bewiesen ist.

Satz 6. *Unter den Voraussetzungen des ersten Teiles von Satz 5 ist das Polynom $F(x_0, \ldots, x_n)$ entweder absolut irreduzibel oder eine Potenz eines absolut irreduziblen Polynoms. Insbesondere im allgemeinen Fall, d. h. wenn die Koeffizienten der homogenen Polynome f_ν Unbestimmte sind, ist $F(x_0, \ldots, x_n)$ selbst absolut irreduzibel.*

Beweis. Nach Satz 5 verschwindet $F(f_0, \ldots, f_n)$ als Polynom der ϱ_ν identisch. Zerlegt man das Polynom $F(x_0, \ldots, x_n)$, falls es reduzibel ist, in irreduzible Faktoren:

$$F(x_0, \ldots, x_n) = \prod_{\lambda=1}^{r} G_\lambda(x_0, \ldots, x_n),$$

so ist $\prod G_\lambda(f_0, \ldots, f_n) = 0$, also verschwindet wenigstens einer der Faktoren, etwa

$$G_1(f_0, \ldots, f_n) = 0. \tag{6}$$

Wir setzen $F = G_1 H$ (also $H = G_2 \ldots G_r$):

$$F(x_0, \ldots, x_n) = G_1(x_0, \ldots, x_n) H(x_0, \ldots, x_n). \tag{7}$$

Wenn nun die x_ν irgendwie so spezialisiert werden, daß $H = 0$ ist, etwa

$$H(x_0', \ldots, x_n') = 0. \tag{8}$$

so ist nach (7) auch $F(x_0', \ldots, x_n') = 0$, und nach Satz 5 gibt es dann gewisse Größen $\varrho_1', \ldots, \varrho_n'$ derart, daß

$$x_\nu' = f_\nu(\varrho_1', \ldots, \varrho_n') \qquad (\nu = 0, \ldots, n)$$

ist. Nach (6) ist daher

$$G_1(x_0', \ldots, x_n') = 0. \tag{9}$$

Hiermit ist gezeigt, daß aus (8) allemal (9) folgt. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz (Algebra, Satz 136) ist also eine genügend hohe Potenz von $G_1(x_0, \ldots, x_n)$ durch $H(x_0, \ldots, x_n)$ teilbar. Die irreduziblen Faktoren von H, d. h. die Polynome $G_2, \ldots, G_r$ sind daher alle mit G_1 äquivalent. Somit ist $F = c G_1^r$, wo c eine Konstante, womit der erste Teil von Satz 6 bewiesen ist.

Der zweite Teil wird bewiesen sein, wenn sich zeigen läßt, daß unter den neu hinzukommenden Voraussetzungen jedes Polynom $\Phi(x_0, \ldots, x_n)$, für welches $\Phi(f_0, \ldots, f_n)$ als Polynom der ϱ_ν identisch verschwindet, durch $F(x_0, \ldots, x_n)$ teilbar ist. Um das zu zeigen, werde wieder $m^{n-1} = l$ gesetzt, und es sei

$$F(x_0, \ldots, x_n) = \sum A_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n} x_0^{\nu_0} x_1^{\nu_1} \ldots x_n^{\nu_n} \quad (\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_n = l) \tag{10}$$

und folglich

$$\sum A_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n} f_0^{\nu_0} f_1^{\nu_1} \ldots f_n^{\nu_n} = 0 \quad (\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_n = l). \tag{11}$$

Sind nun $y_1, \ldots, y_{n-1}$ weitere Unbestimmte, so hat das Gleichungssystem

$$f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) - y_\nu f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1) \tag{12}$$

nach dem Bézoutschen Satz (Algebra, Satz 143) genau l Lösungen

$$\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda} \qquad (\lambda = 1, \ldots, l),$$

die alle voneinander verschieden sind, und alle $\varrho_{\nu\lambda}$ sind $\neq 0$. Für jede dieser Lösungen ist $f_0 \neq 0$, weil sonst nach (12) auch $f_\nu = 0$ für $\nu \leqq n-1$ wäre, während doch das System

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 0, \quad \ldots, \quad f_{n-1} = 0$$

keine Lösung hat [9]). Man kann daher den in jeder Lösung steckenden willkürlichen Proportionalitätsfaktor so wählen, daß $f_0 = 1$ ist. Aus (11) und (12) folgt dann

$$(13)\quad \sum A_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n} y_1^{\nu_1} \ldots y_{n-1}^{\nu_{n-1}} [f_n(\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda})]^{\nu_n} = 0 \quad (\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_n = l).$$

Nun sind die l Werte $f_n(\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda})$ voneinander verschieden. Denn wäre etwa

$$f_n(\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda}) = f_n(\varrho_{1\mu}, \ldots, \varrho_{n\mu}),$$

oder ausführlicher geschrieben

$$\sum a_{\nu_1 \ldots \nu_n} \varrho_{1\lambda}^{\nu_1} \ldots \varrho_{n\lambda}^{\nu_n} = \sum a_{\nu_1 \ldots \nu_n} \varrho_{1\mu}^{\nu_1} \ldots \varrho_{n\mu}^{\nu_n},$$

so wäre, weil die Koeffizienten $a_{\nu_1 \ldots \nu_n}$ Unbestimmte sind [10]),

$$(14)\qquad \varrho_{1\lambda}^{\nu_1} \ldots \varrho_{n\lambda}^{\nu_n} = \varrho_{1\mu}^{\nu_1} \ldots \varrho_{n\mu}^{\nu_n} \quad \text{für } \nu_1 + \cdots + \nu_n = m,$$

also insbesondere auch $\varrho_{1\lambda}^m = \varrho_{1\mu}^m$, so daß $\dfrac{\varrho_{1\lambda}}{\varrho_{1\mu}}$ eine m-te Einheitswurzel wäre; ebenso $\dfrac{\varrho_{2\lambda}}{\varrho_{2\mu}}, \ldots, \dfrac{\varrho_{n\lambda}}{\varrho_{n\mu}}$. Ist ε eine primitive m-te Einheitswurzel, so wäre also

$$(15)\qquad \frac{\varrho_{1\lambda}}{\varrho_{1\mu}} = \varepsilon^{\alpha_1}, \ldots, \frac{\varrho_{n\lambda}}{\varrho_{n\mu}} = \varepsilon^{\alpha_n},$$

und folglich nach (14)

$$\varepsilon^{\alpha_1 \nu_1 + \ldots + \alpha_n \nu_n} = 1 \qquad \text{für } \nu_1 + \cdots + \nu_n = m.$$

Insbesondere wäre $\varepsilon^{\alpha_j + \alpha_k (m-1)} = 1$, also $\alpha_j \equiv \alpha_k \pmod m$, und folglich nach (15)

$$\frac{\varrho_{1\lambda}}{\varrho_{1\mu}} = \frac{\varrho_{2\lambda}}{\varrho_{2\mu}} = \cdots = \frac{\varrho_{n\lambda}}{\varrho_{n\mu}},$$

so daß $\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda}$ und $\varrho_{1\mu}, \ldots, \varrho_{n\mu}$ dieselbe Lösung wären.

---

[9]) Es sind ja n homogene Gleichungen mit n Unbekannten und mit Unbestimmten als Koeffizienten.

[10]) Man beachte, daß die $\varrho_{\nu\lambda}$ als Lösungen des Systems (12) von diesen Unbestimmten unabhängig sind; letztere sind daher auch Unbestimmte in bezug auf den Körper der $\varrho_{\nu\lambda}$.

Hiermit ist gezeigt, daß die l Werte $f_n(\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda})$ voneinander verschieden sind. Da sie aber alle die Gleichung (13) befriedigen, so muß in dieser das Glied mit der l-ten Potenz von $f_n(\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda})$ wirklich vorkommen. Daher ist $A_{0\ldots0l} \neq 0$, und folglich mit vereinfachter Bezeichnung

$$F(x_0, \ldots, x_n) = A x_n^l + \cdots \qquad (A \neq 0).$$

Hiernach ergibt sich, wenn man Φ durch F teilt, nach Algebra, Satz 71 eine Relation der Form

$$(16) \quad \Phi(x_0, \ldots, x_n) = F(x_0, \ldots, x_n) Q(x_0, \ldots, x_n) + R(x_0, \ldots, x_n),$$

wo Q und R nicht nur in bezug auf x_n, sondern in bezug auf alle x_ν Polynome sind, und wo der Grad von R in bezug auf x_n kleiner als l ist. Wenn nun R nicht identisch verschwände, so könnte man mit Bezug auf R dieselbe Überlegung durchführen wie seither mit Bezug auf F und würde finden, daß R in bezug auf x_n nicht von kleinerem als dem l-ten Grad sein könnte. Daher muß $R = 0$ sein, und aus (16) folgt, daß Φ durch F teilbar ist. W. z. b. w.

§ 4.

Anwendung auf rationale Flächen.

Satz 7. *Das rationale Gebilde*

$$(A) \qquad x_\nu = f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \qquad (\nu = 0, \ldots, n)$$

ist, wenn die homogenen Polynome m-ten Grades f_ν keine gemeinsame Nullstelle haben [11]*, identisch mit der algebraischen Fläche $F(x_0, \ldots, x_n) = 0$, wo F das in Satz 2 eingeführte und nach Satz 3 nicht identisch verschwindende homogene Polynom ist.*

Der Satz bedarf keines Beweises mehr, da er nur die geometrisierte Formulierung von Satz 5 ist. Der Satz besagt, wie zur Vermeidung von Irrtümern ausdrücklich bemerkt sei, nur, daß jeder Punkt des rationalen Gebildes auf der Fläche $F = 0$ liegt und daß umgekehrt jeder Punkt dieser Fläche auch dem rationalen Gebilde angehört, d. h. daß seine Koordinaten sich in der Gestalt (A) darstellen lassen. Dagegen wird nicht behauptet, daß diese Darstellung etwa nur auf *eine* Art möglich sei; sie kann für einzelne oder auch für alle Flächenpunkte auf mehrere Arten möglich sein, wobei proportionale Darstellungen, also eine Darstellung durch die Parameterwerte $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ und eine zweite durch $\varepsilon\varrho_1, \ldots, \varepsilon\varrho_n$, unter ε eine m-te Einheitswurzel verstanden, natürlich nicht als verschieden anzusehen sind. Von näheren Untersuchungen in dieser Richtung, die an sich sehr wünschens-

[11]) Sie sind dann von selbst relativ prim, so daß diese in § 1 erhobene Forderung hier nicht eigens gestellt zu werden braucht.

wert wären, müssen wir in dieser Arbeit absehen. Bemerkt sei nur, daß die Anzahl der Darstellungen in der Form (A) sich durchaus nicht mit der Vielfachheit des betreffenden Flächenpunktes im Sinne der algebraischen Geometrie zu decken braucht.

Satz 8. *Unter den Voraussetzungen von Satz 7 zerfällt die Fläche $F = 0$ nie in zwei verschiedene algebraische Flächen; wohl aber kann sie eine im Sinne der algebraischen Geometrie mehrfach zählende Fläche sein. Die Ordnung der (einfach gezählten) Fläche ist gleich m^{n-1} oder ein Teiler von m^{n-1}. Insbesondere im allgemeinen Fall, d. h. wenn die Koeffizienten der Polynome f, Unbestimmte sind, ist die Fläche nur einfach zählend und hat die Ordnung m^{n-1}.*

Das ergibt sich unmittelbar aus Satz 6.

Beispiel I. $\quad f_0 = \varrho_1^2, \quad f_1 = \varrho_2^2, \quad f_2 = a\varrho_1^2 + b\varrho_1\varrho_2 + c\varrho_2^2.$

Hier ist $m = 2$, $n = 2$ und die Polynome sind ohne gemeinsame Nullstelle. Da $n = 2$ ist, läßt sich die Resultante P als Sylvestersche Determinante schreiben:

$$\mathsf{P} = R\left(x_0\frac{\varrho_2^2}{\varrho_1} - x_1\varrho_1^2, \quad x_0(a\varrho_1^2 + b\varrho_1\varrho_2 + c\varrho_2^2)\frac{\varrho_2}{\varrho_1} - x_2\varrho_1^2\right)$$

$$= \begin{vmatrix} -x_1 & 0 & x_0 & 0 \\ 0 & -x_1 & 0 & x_0 \\ ax_0 - x_2 & bx_0 & cx_0 & 0 \\ 0 & ax_0 - x_2 & bx_0 & cx_0 \end{vmatrix} = x_0^2[(ax_0 + cx_1 - x_2)^2 - b^2x_0x_1].$$

F ergibt sich nach Abspaltung des Faktors x_0^2; also ist

$$F = (ax_0 + cx_1 - x_2)^2 - b^2x_0x_1.$$

Falls $b \neq 0$, ist F irreduzibel und die Fläche (Kurve) von zweiter Ordnung. Jeder Punkt der Kurve läßt sich auf genau *eine* Art in der Gestalt

$$x_0 = \varrho_1^2, \quad x_1 = \varrho_2^2, \quad x_2 = a\varrho_1^2 + b\varrho_1\varrho_2 + c\varrho_2^2$$

darstellen. Falls $b = 0$, ist F die zweite Potenz eines linearen Polynoms, die Kurve also von erster Ordnung. Jeder Punkt der Kurve läßt sich auf *zwei* Arten in der Gestalt

$$x_0 = \varrho_1^2, \quad x_1 = \varrho_2^2, \quad x_2 = a\varrho_1^2 + c\varrho_2^2$$

darstellen, außer den beiden Punkten $0, 1, c$ und $1, 0, a$, die nur *eine* Darstellung zulassen.

Beispiel II. $\quad f_0 = \varrho_1^2, \quad f_1 = \varrho_1\varrho_2, \quad f_2 = \varrho_2^2, \quad f_3 = \varrho_3^2.$

Hier ist $m = 2$, $n = 3$ und die Polynome sind wieder ohne gemeinsame Null-

stelle. Nach den Rechenregeln für Resultanten (Algebra, S. 221 f. und Satz 148) findet man

$$\mathsf{P} = R\Big(\frac{x_0\varrho_1\varrho_2 - x_1\varrho_1^2}{\varrho_1}, \frac{x_0\varrho_2^2 - x_2\varrho_1^2}{\varrho_2}, \frac{x_0\varrho_3^2 - x_3\varrho_1^2}{\varrho_3}\Big)$$

$$= \prod_{\varepsilon,\eta} R\Big(\frac{\varrho_1}{\varrho_1}, \frac{\sqrt{x_0}\,\varrho_2 - \varepsilon\sqrt{x_2}\,\varrho_1}{\varrho_2}, \frac{\sqrt{x_0}\,\varrho_3 - \eta\sqrt{x_3}\,\varrho_1}{\varrho_3}\Big) \times$$

$$\times \prod_{\varepsilon,\eta} R\Big(\frac{x_0\varrho_2 - x_1\varrho_1}{\varrho_1}, \frac{\sqrt{x_0}\,\varrho_2 - \varepsilon\sqrt{x_2}\,\varrho_1}{\varrho_2}, \frac{\sqrt{x_0}\,\varrho_3 - \eta\sqrt{x_3}\,\varrho_1}{\varrho_3}\Big) \quad (\varepsilon,\eta = \pm 1)$$

$$= \prod_{\varepsilon,\eta} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon\sqrt{x_2} & \sqrt{x_0} & 0 \\ -\eta\sqrt{x_3} & 0 & \sqrt{x_0} \end{vmatrix} \cdot \prod_{\varepsilon,\eta} \begin{vmatrix} -x_1 & x_0 & 0 \\ -\varepsilon\sqrt{x_2} & \sqrt{x_0} & 0 \\ -\eta\sqrt{x_3} & 0 & \sqrt{x_0} \end{vmatrix}$$

$$= x_0^4 \cdot (x_0^3 x_2 - x_0^2 x_1^2)^2.$$

F ergibt sich nach Abspaltung des Faktors x_0^8; also ist

$$F = (x_0 x_2 - x_1^2)^2.$$

F ist die zweite Potenz eines irreduziblen Polynoms zweiten Grades; die Fläche ist der Kegel $x_0 x_2 - x_1^2 = 0$ (vgl. auch S. 470, Beispiel I). Jeder Punkt des Kegels läßt sich auf *zwei* Arten in der Gestalt

$$x_0 = \varrho_1^2, \quad x_1 = \varrho_1\varrho_2, \quad x_2 = \varrho_2^2, \quad x_3 = \varrho_3^2$$

darstellen, mit Ausnahme der Kegelspitze 0, 0, 0, 1 und der Schnittpunkte mit der Ebene $x_3 = 0$, die nur je *eine* Darstellung zulassen.

Die Beispiele dienen zur Illustration unserer Sätze und der verschiedenen vorkommenden Fälle. Die Elimination selbst ließe sich natürlich auch viel einfacher durchführen.

§ 5.

Andere Gewinnung des Polynoms $F(x_0, \ldots, x_n)$.

Bei der Wichtigkeit des Polynoms F wird man den Wunsch haben, zu ihm zu gelangen ohne den Umweg über die Resultante P, da die Berechnung einer Resultante für $n > 2$ bekanntlich eine äußerst komplizierte Sache ist. Dabei wird es natürlich erlaubt sein, die Koeffizienten der f_ν als Unbestimmte vorauszusetzen. Alsdann hat aber nach Satz 5 das Polynom $F(x_0, \ldots, x_n)$ die Eigenschaft, daß $F(f_0, \ldots, f_n) = 0$ ist, und beim Beweis des zweiten Teiles von Satz 6 ergab sich, daß jedes Polynom Φ mit derselben Eigenschaft durch F teilbar ist. Daher ist F durch diese Eigenschaft und durch seinen Grad m^{n-1} bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

Nun habe ich kürzlich gerade die Existenz eines solchen Polynoms auf ganz andere Art bewiesen [12]) und dieser Beweis enthält zugleich eine Methode zur Herstellung des Polynoms. Das Verfahren ist folgendes:

Bezeichnet man die Potenzprodukte

$$\varrho_1^{r_1}\varrho_2^{r_2}\cdots\varrho_n^{r_n}$$

$$\text{für } 0 \leqq r_\nu \leqq m-1, \quad r_1 + r_2 + \cdots + r_n \equiv 0 \pmod m,$$

deren Anzahl gleich $m^{n-1} = l$ ist, in irgendeiner Reihenfolge mit $U_1, \ldots, U_l$, so kann man l^2 Polynome $\Phi_{\lambda\mu}(x_1, \ldots, x_n)$ so bestimmen, daß die Identitäten gelten:

$$f_0 U_\lambda = \sum_{\mu=1}^{l} \Phi_{\lambda\mu}(f_1, \ldots, f_n)\, U_\mu \qquad (\lambda = 1, \ldots, l), \tag{17}$$

woraus folgt:

$$\begin{vmatrix} \Phi_{11} - f_0 & \Phi_{12} & \cdots & \Phi_{1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi_{l1} & \Phi_{l2} & \cdots & \Phi_{ll} - f_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

Die Polynome $\Phi_{\lambda\mu}$, d. h. ihre Koeffizienten, ergeben sich dabei aus einem linearen Gleichungssystem mit ebensoviel Gleichungen wie Unbekannten, und die bei der Auflösung auftretende Nennerdeterminante ist von 0 verschieden. Die Relation (18) ist in bezug auf die f_ν homogen vom Grad l und ist daher, von einem konstanten Faktor abgesehen, gerade die Relation $F(f_0, \ldots, f_n) = 0$.

In Spezialfällen, wenn die Koeffizienten der f_ν keine Unbestimmte sind, lassen sich die $\Phi_{\lambda\mu}$ unter Umständen viel einfacher ermitteln. Aber es kann auch sein, daß die Berechnung unmöglich wird, weil die erwähnte Nennerdeterminante gleich 0 ist. Sie ist jedoch gewiß von 0 verschieden, wenn für $\nu = 1, \ldots, n$ der Koeffizient a_ν von ϱ_ν^m in f_ν von 0 verschieden, und zwar eine Unbestimmte ist. Das kann oft schon, wenn es nicht von vornherein der Fall ist, durch Umnumerieren der f_ν erreicht werden. Wenn nicht, so kann man die fehlenden Glieder zunächst mit Unbestimmten als Koeffizienten ergänzen, mit diesen die Rechnung durchführen und im Endresultat die Unbestimmten spezialisieren. Denn die Koeffizienten von F sind, wie sich aus der Definition von F ergibt, mit ganzzahligen Koeffizienten versehene Polynome der Koeffizienten der f_ν; man bekommt also F für beliebig spezialisierte f_ν, indem man die Rechnung zunächst mit Unbestimmten als Koeffizienten irgendwie durchführt und im Endresultat die Spezialisierung vornimmt.

Beispiel. $f_0 = \varrho_1^2$, $f_1 = \varrho_1\varrho_2$, $f_2 = \varrho_2^2$, $f_3 = \varrho_3^2$.

[12]) In § 3 der in Fußnote [3]) zitierten Arbeit.

Die Potenzprodukte U_λ sind hier: 1, $\varrho_1\varrho_2$, $\varrho_1\varrho_3$, $\varrho_2\varrho_3$. In f_1 fehlt das Glied mit ϱ_1^2. Nimmt man aber eine Umnumerierung vor, indem man f_0 und f_1 ihre Rollen tauschen läßt, so hat man das Gewünschte, und die Identitäten (17) sind ohne weiteres hinzuschreiben:

$$\begin{aligned}
f_1 \cdot 1 &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot \varrho_1\varrho_2 + 0 \cdot \varrho_1\varrho_3 + 0 \cdot \varrho_2\varrho_3,\\
f_1 \cdot \varrho_1\varrho_2 &= f_0 f_2 \cdot 1 + 0 \cdot \varrho_1\varrho_2 + 0 \cdot \varrho_1\varrho_3 + 0 \cdot \varrho_2\varrho_3,\\
f_1 \cdot \varrho_1\varrho_3 &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot \varrho_1\varrho_2 + 0 \cdot \varrho_1\varrho_3 + f_0 \cdot \varrho_2\varrho_3,\\
f_1 \cdot \varrho_2\varrho_3 &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot \varrho_1\varrho_2 + f_2 \cdot \varrho_1\varrho_3 + 0 \cdot \varrho_2\varrho_3.
\end{aligned}$$

Also kommt

$$\begin{vmatrix} -f_1 & 1 & 0 & 0 \\ f_0 f_2 & -f_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f_1 & f_0 \\ 0 & 0 & f_2 & -f_1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder $(f_1^2 - f_0 f_2)^2 = 0$. In der Tat wurde auch in § 4 bei diesem Beispiel gefunden: $F = (x_0 x_2 - x_1^2)^2$.

Ohne Umnumerierung kann man so verfahren, daß man zunächst das allgemeinere Polynomsystem

$$f_0 = \varrho_1^2, \quad f_1 = a\varrho_1^2 + \varrho_1\varrho_2, \quad f_2 = \varrho_2^2, \quad f_3 = \varrho_3^2$$

mit der Unbestimmten a betrachtet. Um ganz sicher zu gehen, könnte man $f_2 = b\varrho_2^2$, $f_3 = c\varrho_3^2$ setzen; doch sieht man leicht voraus, daß die Rechnung auch gehen muß, wenn man von Anfang an b und c zu 1 spezialisiert. Das System (17) ist jetzt das folgende:

$$\begin{aligned}
f_0 \cdot 1 &= \frac{f_1}{a} \cdot 1 - \frac{1}{a} \cdot \varrho_1\varrho_2 + * + *,\\
f_0 \cdot \varrho_1\varrho_2 &= -\frac{f_1 f_2}{a^2} \cdot 1 + \frac{a f_1 + f_2}{a^2} \cdot \varrho_1\varrho_2 + * + *,\\
f_0 \cdot \varrho_1\varrho_3 &= * + * + \frac{a f_1 + f_2}{a^2} \cdot \varrho_1\varrho_3 - \frac{f_1}{a^2} \cdot \varrho_2\varrho_3,\\
f_0 \cdot \varrho_2\varrho_3 &= * + * - \frac{f_2}{a} \cdot \varrho_1\varrho_3 + \frac{f_1}{a} \cdot \varrho_2\varrho_3.
\end{aligned}$$

Also kommt

$$\begin{vmatrix} \frac{f_1}{a} - f_0 & -\frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{f_1 f_2}{a^2} & \frac{a f_1 + f_2}{a^2} - f_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a f_1 + f_2}{a^2} - f_0 & -\frac{f_1}{a^2} \\ 0 & 0 & -\frac{f_2}{a} & \frac{f_1}{a} - f_0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder ausgerechnet:

$$\frac{1}{a^6}\left[(f_1 - a f_0)(f_2 + a f_1 - a^2 f_0) - f_1 f_2\right]^2 = 0.$$

Nach Multiplikation mit a^4 (nicht erst mit a^6) läßt sich der Nenner wegheben und man erhält:

$$(f_1^2 - f_0 f_2 - 2 a f_0 f_1 + a^2 f_0^2)^2 = 0.$$

Wenn man jetzt a zu 0 spezialisiert, kommt wieder wie vorhin: $(f_1^2 - f_0 f_2)^2 = 0$.

Eine elegante Darstellung gestattet das Polynom F im Falle $n = 2$. Setzt man nämlich in diesem Falle

$$\begin{aligned} f_0 &= a_0 \varrho_1^m + a_1 \varrho_1^{m-1} \varrho_2 + \cdots + a_m \varrho_2^m, \\ f_1 &= b_0 \varrho_1^m + b_1 \varrho_1^{m-1} \varrho_2 + \cdots + b_m \varrho_2^m, \\ f_2 &= c_0 \varrho_1^m + c_1 \varrho_1^{m-1} \varrho_2 + \cdots + c_m \varrho_2^m, \end{aligned}$$

so läßt sich die Resultante P als $(2m)$-reihige Sylvestersche Determinante schreiben. Diese kann man leicht durch Ränderung in eine $(3m)$-reihige Determinante verwandeln, von der sich der Faktor x_0^m abspalten läßt, so daß gerade F übrigbleibt. Man erhält so die Darstellung

$$F(x_0, x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \overbrace{x_0\ 0\ \ldots\ 0}^{m} & \overbrace{a_0\ a_1\ \ldots\ a_m}^{m+1} & \overbrace{0\ \ldots\ 0}^{m-1} & 1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ x_1\ 0\ \ldots\ 0 & b_0\ b_1\ \ldots\ b_m & 0\ \ldots\ 0 & m+1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ x_2\ 0\ \ldots\ 0 & c_0\ c_1\ \ldots\ c_m & 0\ \ldots\ 0 & 2m+1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

und zwar ist diese Determinante so gebildet, daß nach der angeschriebenen ersten, $(m+1)$-ten und $(2m+1)$-ten Zeile immer noch $(m-1)$-mal dieselbe Zeile kommt, aber jedesmal um eine weitere Stelle zyklisch nach rechts verschoben wie bei einer Sylvesterschen Determinante. Man sieht auch leicht direkt, daß die obige Determinante die das Polynom F charakterisierenden Eigenschaften hat: Sie ist in bezug auf die x_i ein homogenes Polynom m-ten Grades[13]), und wenn man x_i durch f_i ersetzt, verschwindet sie; denn wenn man alsdann die Spalten der Reihe nach mit

$$\varrho_1^{m-1},\ \varrho_1^{m-2}\varrho_2,\ \ldots,\ \varrho_2^{m-1},\ -\varrho_1^{2m-1},\ -\varrho_1^{2m-2}\varrho_2,\ \ldots,\ -\varrho_2^{2m-1}$$

multipliziert und zueinander addiert, kommt in jeder Zeile 0.

---

[13]) Nicht etwa identisch 0; denn z. B. der Koeffizient von x_0^m ist die Resultante von f_1 und f_2, verschwindet also gewiß nicht, wenn die Koeffizienten der f_i Unbestimmte sind.

§ 6.

Eine weitere Resultante.

Wenn die f_ν eine gemeinsame Nullstelle haben, so verschwindet F nach Satz 3 identisch, so daß man auf die bisherige Weise zu keiner Flächengleichung gelangt. Zwar gibt es nach Satz 5 der in Fußnote [3]) erwähnten Arbeit auch in diesem Falle eine homogene Identität vom Grad m^{n-1} zwischen den f_ν. Aber wir werden jetzt auf ganz andere Art sehen, daß es sogar *eine Identität von geringerem Grad gibt, so daß die Ordnung der Fläche sich erniedrigt.* Dazu benötigen wir einige vorbereitende Sätze. Unerledigt wird allerdings der Fall bleiben, daß die f_ν ***unendlich viele*** gemeinsame Nullstellen haben.

Die n homogenen Polynome m-ten Grades

$$f_1(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \quad \ldots, \quad f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \tag{19}$$

mögen endlich viele gemeinsame Nullstellen haben (eventuell gar keine). Sind dann $u_1, \ldots, u_n$ Unbestimmte, so haben die $n+1$ Polynome

$$f_1(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \quad \ldots, \quad f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \quad \Sigma u_\nu \varrho_\nu,$$

wo die Summe nach ν von 1 bis n läuft, offenbar gar keine gemeinsame Nullstelle. Dann haben aber auch, wenn $x_1, \ldots, x_n, y$ weitere Unbestimmte sind, die $n+1$ homogenen Polynome von $\varrho_1, \ldots, \varrho_n, \sigma$

$$f_1 - x_1\sigma^m, \quad \ldots, \quad f_n - x_n\sigma^m, \quad \Sigma u_\nu \varrho_\nu - y\sigma \tag{20}$$

keine gemeinsame Nullstelle. Denn nach dem bereits Gesagten haben sie jedenfalls keine mit $\sigma = 0$. Hätten sie eine andere, so könnte man $\sigma = 1$ annehmen, und das Gleichungssystem

$$f_1 = x_1, \quad \ldots, \quad f_n = x_n, \quad \Sigma u_\nu \varrho_\nu = y$$

hätte eine Lösung. Aber zwischen den $n+1$ links stehenden Polynomen besteht nach Algebra, Satz 56 eine Abhängigkeit; die gleiche Abhängigkeit müßte dann zwischen $x_1, \ldots, x_n, y$ bestehen, während das doch Unbestimmte sind.

Nachdem hiermit gezeigt ist, daß die Polynome (20) keine gemeinsame Nullstelle haben, folgt aus Algebra, Satz 139, daß die Resultante

$$\mathsf{T} = R\begin{pmatrix} f_1 - x_1\sigma^m, & \ldots, & f_n - x_n\sigma^m, & \Sigma u_\nu \varrho_\nu - y\sigma \\ \varrho_1 & , \ \ldots, & \varrho_n & , \quad \sigma \end{pmatrix} \tag{21}$$

nicht verschwindet. Daraus folgt aber weiter (Algebra, S. 290), daß das Gleichungssystem

$$f_1 - x_1\sigma^m = 0, \quad \ldots, \quad f_n - x_n\sigma^m = 0 \tag{22}$$

nur endlich viele Lösungen hat, und wir gewinnen den

Satz 9. *Wenn die n homogenen Polynome* (19) *vom Grad m nur endlich viele gemeinsame Nullstellen haben* (*eventuell gar keine*), *so hat auch, wenn $x_1, \ldots, x_n$ Unbestimmte sind, das homogene Gleichungssystem* (22) *mit den Unbekannten $\varrho_1, \ldots, \varrho_n, \sigma$ nur endlich viele Lösungen.*

Die Anzahl der Lösungen des Systems (22) ist nach dem Bézoutschen Satz, wenn jede ihrer Multiplizität entsprechend gezählt wird, gleich m^n (Algebra, Satz 145). Unter diesen finden sich, falls die Polynome (19) wirklich gemeinsame Nullstellen haben, auch Lösungen mit $\sigma = 0$, und die zugehörigen Systeme $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ sind dann gerade diese gemeinsamen Nullstellen. Das gibt Veranlassung zu folgender

Definition. *Als Pseudomultiplizität einer gemeinsamen Nullstelle $\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0$ der Polynome* (19) *bezeichnen wir die* (*Bézoutsche*) *Multiplizität der Lösung $\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0, 0$ des Gleichungssystems* (22), *bei dem $x_1, \ldots, x_n$ Unbestimmte sind.*

Bemerkung. Der allgemein anerkannte Multiplizitätsbegriff, den wir hier durch den Namen Bézout kennzeichnen, bezieht sich immer auf den Fall, daß die Anzahl der homogenen Gleichungen um 1 kleiner ist als die der Unbekannten. Es gibt aber auch verschiedene Multiplizitätsdefinitionen, die auf das Gleichungssystem passen, das durch Nullsetzen der Polynome (19) entsteht, und manche Mathematiker mögen vielleicht noch ihre privaten Vorstellungen von diesem Begriff haben. Was wir hier als „Pseudomultiplizität" definieren, deckt sich damit nicht, sondern hat oft (vielleicht immer) einen größeren Wert als die Multiplizität. Im Falle $n = 2$ hat z. B. das Gleichungssystem

$$(\varrho_1 - \varrho_2)^m = 0, \qquad (\varrho_1 - \varrho_2)(\varrho_1 + \varrho_2)^{m-1} = 0$$

nur die eine Lösung $\varrho_1 = \varrho_2$, der wohl niemand eine andere Multiplizität als 1 zuerkennen wird; die Pseudomultiplizität ist aber m. Das System

$$(\varrho_1 - \varrho_2)^m = 0, \quad (\varrho_1 - \varrho_2)^m = 0 \quad \text{(zweimal dieselbe Gleichung)}$$

hat wieder nur die eine Lösung $\varrho_1 = \varrho_2$, diesmal mit der Multiplizität m; die Pseudomultiplizität ist aber m^2.

Ist nun die Anzahl der gemeinsamen Nullstellen der Polynome (19), wenn jede ihrer Pseudomultiplizität entsprechend gezählt wird, gleich p, wobei dann $0 \leqq p \leqq m^n$ ist, und bezeichnet man diese Nullstellen mit

$$\varrho_{1\lambda}^0, \ldots, \varrho_{n\lambda}^0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, p), \tag{23}$$

so hat das System (22), wenn jede Lösung ihrer (Bézoutschen) Multiplizität entsprechend gezählt wird, noch $m^n - p$ Lösungen

$$\varrho_{1\lambda}^*, \ldots, \varrho_{n\lambda}^*, \sigma_\lambda \qquad (\lambda = 1, \ldots, m^n - p). \tag{24}$$

bei denen $\sigma_\lambda \neq 0$ ist, und bei geeigneter Wahl des in einer Lösung steckenden willkürlichen Faktors ergibt sich für die Resultante T, wenn wieder $m^{n-1} = l$ gesetzt wird, der Ausdruck (Algebra, S. 290)

$$\mathsf{T} = \prod_{\lambda=1}^{p} (\sum u_r \varrho^0_{r\lambda}) \cdot \prod_{\lambda=1}^{l^{m-p}} (\sum u_r \varrho^*_{r\lambda} - y\sigma_\lambda), \tag{25}$$

wobei im Falle $p = 0$ das erste, im Falle $p = lm$ das zweite Produkt durch 1 zu ersetzen ist.

Andererseits ist aber T ein Polynom der Gestalt

$$\mathsf{T} = \sum \Phi_{\lambda_1 \ldots \lambda_n \mu}(u_1, \ldots, u_n)\, x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n} y^\mu, \tag{26}$$

wobei nach Algebra, Satz 121 in jedem Glied

$$m\lambda_1 + m\lambda_2 + \cdots + m\lambda_n + \mu = m^n \tag{26a}$$

und wobei $\Phi_{\lambda_1 \ldots \lambda_n \mu}$ nach Algebra, Satz 120 ein homogenes Polynom der u_r vom Grad $m^n - \mu$ oder identisch 0 ist. Wegen (26a) sind alle μ durch m teilbar; T ist also ein Polynom von y^m, und aus (25) folgt dann, daß auch p durch m teilbar ist: $p = qm$; es ist dann $0 \leqq q \leqq l$. Aus (25) folgt weiter, daß sich in (26) ein homogenes in Linearfaktoren zerlegbares Polynom der u_r allein vom Grad $p = qm$ abspaltet, so daß man für T schließlich die folgende Gestalt erhält:

$$\mathsf{T} = \Phi(u_1, \ldots, u_n)\,[\Omega_0 y^{m(l-q)} + \Omega_1 y^{m(l-q-1)} + \cdots + \Omega_{l-q}]. \tag{27}$$

Dabei ist $\Phi(u_1, \ldots, u_n)$ einfach das erste Produkt in Formel (25), also homogen vom Grad $p = qm$; speziell für $p = 0$, also $q = 0$ ist $\Phi = 1$. Ferner ist

$$\Omega_\varkappa = \Omega_\varkappa(u_1, \ldots, u_n, x_1, \ldots, x_n)$$

entweder identisch 0 oder in bezug auf die u_r homogen vom Grad λm und in bezug auf die x_r homogen vom Grad $q + \lambda$. Speziell Ω_0 ist nicht identisch 0, sondern also ein Polynom von $x_1, \ldots, x_n$ allein, homogen vom Grad q:

$$\Omega_0 = \Omega_0(x_1, \ldots, x_n). \tag{28}$$

Von jetzt an bis § 8 einschließlich setzen wir $q < l$, also $p < lm$ voraus, so daß in (25) das zweite Produkt nicht durch 1 zu ersetzen ist. In diesem Produkt muß dann, da T ein Polynom von y^m ist, neben dem Faktor

$$\sum u_r \varrho^*_{r\lambda} - y\sigma_\lambda$$

stets auch der Faktor

$$\sum u_r \varrho^*_{r\lambda} - y\sigma_\lambda \varepsilon,$$

wo ε eine beliebige m-te Einheitswurzel ist, mit der gleichen Vielfachheit vorkommen. Es ist ja auch von vornherein klar, daß das System (22) neben der Lösung (24) stets auch die Lösung

$$\varrho^*_{1\lambda}, \ldots, \varrho^*_{n\lambda}, \sigma_\lambda \varepsilon$$

hat; darüber hinaus sehen wir aber jetzt, daß die m zu den verschiedenen m-ten Einheitswurzeln ε gehörenden Lösungen dieselbe Multiplizität haben. Faßt man jetzt im zweiten Produkt von (25) je m Faktoren, bei denen die σ_λ sich nur um m-te Einheitswurzeln unterscheiden, zusammen und setzt $\varrho^*_{\nu\lambda}\sigma_\lambda^{-1} = \varrho_{\nu\lambda}$, so kommt

$$(29) \qquad \mathsf{T} = \Phi(u_1, \ldots, u_n)\, \Omega_0(x_1, \ldots, x_n) \prod_{\lambda=1}^{l-q} [y^m - (\Sigma u_\nu \varrho_{\nu\lambda})^m],$$

wobei Φ und Ω_0 dieselben Polynome wie in (27), (28) sind. Nach der Bedeutung der $\varrho_{\nu\lambda}$ ist natürlich

$$(30) \qquad f_\nu(\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda}) = x_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, n;\ \lambda = 1, \ldots, l-q).$$

Ein Vergleich der Formeln (27) und (29) lehrt, daß die symmetrischen Grundfunktionen der $l-q$ Größen

$$\Big(\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \varrho_{\nu 1}\Big)^m, \quad \Big(\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \varrho_{\nu 2}\Big)^m, \quad \ldots, \quad \Big(\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \varrho_{\nu, l-q}\Big)^m$$

bekannt sind. Daher sind auch die Potenzsummen dieser Größen

$$\sum_{\lambda=1}^{l-q} \Big(\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \varrho_{\nu\lambda}\Big)^{rm} \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

und folglich die Potenzproduktsummen

$$(31) \qquad \sum_{\lambda=1}^{l-q} \varrho_{1\lambda}^{\mu_1} \varrho_{2\lambda}^{\mu_2} \ldots \varrho_{n\lambda}^{\mu_n} \quad (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = rm)$$

bekannt; und zwar sind die letzteren rationale Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ mit dem Nenner Ω_0^r.

Wenn die Koeffizienten der f_ν Unbestimmte sind, die wir vorübergehend mit $\xi_1, \ldots, \xi_k$ bezeichnen wollen, so haben die f_ν keine gemeinsame Nullstelle; daher ist in diesem Falle

$$p = 0, \quad q = 0, \quad \varphi(u_1, \ldots, u_n) = 1, \quad \Omega_0(x_1, \ldots, x_n) = \text{konstant}.$$

Alsdann lehrt aber die Formel (29), wenn man die Resultante T speziell für $y = 0$ mit T_0 bezeichnet, daß T_0 die m-te Potenz eines Polynoms der u_ν ist:

$$\mathsf{T}_0 = \mathsf{T}_0(u_1, \ldots, u_n) = [V(u_1, \ldots, u_n)]^m.$$

Nach der Definitionsformel (21) sind die Koeffizienten von T_0 (vielleicht aber nicht die von V) Polynome der Unbestimmten $\xi_1, \ldots, \xi_k$. Sie erfüllen natürlich, da T_0 eine m-te Potenz ist, die Bedingungsgleichungen, die nach dem unten in § 10 bewiesenen Hilfssatz dafür notwendig sind. Diese Bedingungsgleichungen sind aber Identitäten in den Unbestimmten $\xi_1, \ldots, \xi_k$ und bleiben daher erfüllt, wenn diese Unbestimmten nachträglich spezialisiert werden. Da sie auch hinreichend sind, muß T_0 auch nach der Spezialisierung eine m-te

Potenz bleiben, so daß in Formel (29) für $y = 0$ stets eine m-te Potenz steht. Da dann aber das Produkt bereits eine m-te Potenz ist, ergibt sich, daß auch Φ eine sein muß:

$$\Phi(u_1, \ldots, u_n) = [\Psi(u_1, \ldots, u_n)]^m. \tag{32}$$

In (25) ist daher das erste Produkt, welchem ja Φ gleich war, eine m-te Potenz, so daß die Faktoren zu je m einander gleich sind. Daraus folgt

Satz 10. *Die Pseudomultiplizität einer gemeinsamen Nullstelle der Polynome* (19) *ist stets durch m teilbar.*

§ 7.

Fortsetzung.

Unter Beibehaltung der Bezeichnungen des vorigen Paragraphen sei $f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ ein weiteres homogenes Polynom m-ten Grades und sei x_0 eine weitere Unbestimmte. Dann gibt es (vgl. den Beweis von Satz 1) ein homogenes absolut irreduzibles Polynom $P(x_0, \ldots, x_n)$ derart, daß $P(f_0, \ldots, f_n)$ als Polynom der ϱ_ν identisch verschwindet. P sei etwa vom Grad N, also

$$P(x_0, \ldots, x_n) = \sum C_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_n} x_0^{\lambda_0} x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n} \quad (\lambda_0 + \cdots + \lambda_n = N), \tag{33}$$

$$P(f_0, \ldots, f_n) = 0. \tag{34}$$

Wir wollen jetzt annehmen, daß in P das Glied mit x_0^N wirklich vorkommt, daß also $C_{N0\ldots0} \neq 0$ ist. Aus der Identität (34) folgt dann, daß f_0 an den gemeinsamen Nullstellen von $f_1, \ldots, f_n$ ebenfalls verschwindet. Da die Potenzproduktsummen (31) rationale Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ sind, so ist auch das Produkt

$$\prod_{\lambda=1}^{l-q} [x_0 - f_0(\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda})] \tag{35}$$

ein Polynom von x_0, dessen Koeffizienten rationale Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ sind.

Aus (34) folgt mit Rücksicht auf (30) insbesondere

$$P(f_0(\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda}), x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, l-q).$$

Daher ist $P(x_0, \ldots, x_n)$ als Polynom von x_0 durch jeden Faktor des Produkts (35) teilbar und eine genügend hohe Potenz von $P(x_0, \ldots, x_n)$ ist durch das ganze Produkt (35) teilbar. Hieraus folgt, da in P das Glied mit x_0^N wirklich vorkommt, daß das Produkt (35) sogar in bezug auf alle x_ν ein Polynom ist (Algebra, Satz 93). Da es Teiler von einer Potenz des homogenen Polynoms P ist, ist es außerdem homogen, und zwar vom Grad $l - q$. Setzt man demgemäß

$$\prod_{\lambda=1}^{l-q} [x_0 - f_0(\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda})] = Q(x_0, \ldots, x_n), \tag{36}$$

so ist, da Q ein Teiler von einer Potenz des absolut irreduziblen Polynoms P ist, wegen (34)

$$Q(f_0, \ldots, f_n) = 0. \tag{37}$$

Im Falle $q = 0$, d. h. wenn die Polynome $f_1, \ldots, f_n$ keine gemeinsame Nullstelle haben, ist Q, von einem konstanten Faktor abgesehen, das frühere Polynom F; denn Q hat alsdann die zu Beginn des § 5 für F als charakteristisch erkannten Eigenschaften. Für $q > 0$ wird es eine analoge Rolle spielen

Nun seien umgekehrt $x_0', \ldots, x_n'$ irgendwelche Größen, für die

$$Q(x_0', \ldots, x_n') = 0 \tag{38}$$

ist; außerdem sei aber

$$\Omega_0(x_1', \ldots, x_n') \neq 0. \tag{39}$$

Bildet man dann die Resultante

$$\mathsf{T}' = R\begin{pmatrix} f_1 - x_1'\sigma^m, & \ldots, & f_n - x_n'\sigma^m, & \sum u_\varrho \varrho_\varrho - y\sigma \\ \varrho_1, & \ldots, & \varrho_n, & \sigma \end{pmatrix}, \tag{40}$$

die sich von T nur dadurch unterscheidet, daß die Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ zu $x_1', \ldots, x_n'$ spezialisiert sind, so ist nach (27)

$$\mathsf{T}' = \Phi(u_1, \ldots, u_n)\,[\Omega_0' y^{m(l-q)} + \Omega_1' y^{m(l-q-1)} + \cdots + \Omega_{l-q}'], \tag{41}$$

wobei $\Omega_\lambda' = \Omega_\lambda(u_1, \ldots, u_n; x_1', \ldots, x_n')$ ist, wegen (39) also insbesondere

$$\Omega_0' = \Omega_0(x_1', \ldots, x_n') \neq 0. \tag{42}$$

Daher ist $\mathsf{T}' \neq 0$, und daraus folgt, daß das Gleichungssystem

$$f_1 - x_1'\sigma^m = 0, \quad \ldots, \quad f_n - x_n'\sigma^m = 0 \tag{43}$$

ebenso wie das System (22) nur endlich viele Lösungen hat. Und zwar hat es, wie der Faktor $\Phi(u_1, \ldots, u_n)$ in (41) lehrt, zunächst die $p = qm$ Lösungen des Systems (22):

$$\varrho_{1\lambda}^0, \ldots, \varrho_{n\lambda}^0, 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, qm). \tag{44}$$

Es hat aber keine weiteren Lösungen mit $\sigma = 0$, weil in der eckigen Klammer von (41) das erste Glied von den u_ν frei ist und nach (42) nicht verschwindet, so daß sich kein weiterer Faktor, der ein Polynom der u_ν allein ist, abspalten läßt. Das System (43) hat also außer den Lösungen (44) nur noch Lösungen, bei denen $\sigma \neq 0$ ist. Da T' nach (41) ein Polynom von y^m ist, so ist analog wie bei dem System (22) neben einer Lösung

$$\varrho_{1\lambda}', \ldots, \varrho_{n\lambda}', \sigma_\lambda$$

stets auch die Lösung

$$\varrho_{1\lambda}', \ldots, \varrho_{n\lambda}', \sigma_\lambda \varepsilon,$$

wo ε eine beliebige m-te Einheitswurzel ist, mit gleicher Multiplizität vorhanden, und da $\sigma_\lambda \neq 0$ ist, also gleich 1 angenommen werden kann, ergibt

sich analog zu (29) die Formel

$$(45) \qquad \mathsf{T}' = \Phi(u_1, \ldots, u_n)\, \Omega_0(x_1', \ldots, x_n') \prod_{\lambda=1}^{l-q} [y^m - (\Sigma\, u_\nu \varrho_{\nu\lambda}')^m].$$

Durch Vergleich von (45) mit (41) erkennt man, daß die Potenzproduktsummen, die entstehen, wenn man in den Potenzproduktsummen (31), die ja rationale Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ mit dem Nenner Ω_0' waren, die $\varrho_{\nu\lambda}$ durch $\varrho_{\nu\lambda}'$ ersetzt, wieder bekannt sind; man erhält sie einfach, indem man in den erwähnten rationalen Funktionen die x_ν zu x_ν' spezialisiert, was wegen der Voraussetzung (39) möglich ist. Nach (36) ist daher

$$(46) \qquad \prod_{\lambda=1}^{l-q} [x_0 - f_0(\varrho_{1\lambda}', \ldots, \varrho_{n\lambda}')] = Q(x_0, x_1', \ldots, x_n').$$

Dabei genügen die $\varrho_{\nu\lambda}'$ dem zu (30) analogen Gleichungssystem

$$f_\nu(\varrho_{1\lambda}', \ldots, \varrho_{n\lambda}') = x_\nu' \quad (\nu = 1, \ldots, n;\ \lambda = 1, \ldots, l-q).$$

Für wenigstens einen Wert λ gilt aber außerdem auch die Gleichung

$$f_0(\varrho_{1\lambda}', \ldots, \varrho_{n\lambda}') = x_0',$$

wie ein Vergleich von (46) für den Spezialwert $x_0 = x_0'$ mit (38) lehrt. Die gewonnenen Resultate fassen wir zusammen in dem folgenden Analogon zu Satz 5:

Satz 11. *Die n homogenen Polynome m-ten Grades*

$$f_1(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \quad \ldots, \quad f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$$

mögen qm gemeinsame Nullstellen haben, wobei jede ihrer (stets durch m teilbaren) Pseudomultiplizität entsprechend gezählt ist, und es sei[14]*: $q < m^{n-1}$.*

Wenn dann $f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ ein weiteres homogenes Polynom m-ten Grades ist und wenn zwischen $f_0, f_1, \ldots, f_n$ eine homogene Abhängigkeit von irgendeinem Grad N besteht, bei der das Glied mit f_0^N einen von 0 verschiedenen Koeffizienten hat[15]*, dann ist das in (36) eingeführte Polynom $Q(x_0, \ldots, x_n)$ homogen vom Grad $m^{n-1} - q$. Sein von $x_1, \ldots, x_n$ freies Glied hat einen von 0 verschiedenen Koeffizienten (nämlich offenbar 1) und das Polynom hat die Eigenschaft, daß zwischen den f_ν die Abhängigkeit $Q(f_0, \ldots, f_n) = 0$ besteht.*

Wenn umgekehrt $x_0', \ldots, x_n'$ irgendein Größensystem ist, für welches $Q(x_0', \ldots, x_n') = 0$ ist, so gibt es im allgemeinen (mindestens) ein Größensystem $\varrho_1', \ldots, \varrho_n'$, für welches die Gleichungen gelten:

$$x_\nu' = f_\nu(\varrho_1', \ldots, \varrho_n') \qquad (\nu = 0, \ldots n).$$

---

[14]) Nach § 6 ist stets $q \leqq m^{n-1}$. Der Fall $q = m^{n-1}$ wird in § 9 erledigt.

[15]) Die beim Beweis vorausgesetzte absolute Irreduzibilität von P braucht hier natürlich nicht gefordert zu werden, da man an Stelle von P ja stets einen geeigneten irreduziblen Teiler von P betrachten kann.

Eine Ausnahme besteht höchstens bei solchen Systemen x'_ν, für die auch $\Omega_0(x'_1, \ldots, x'_n) = 0$ ist, wo Ω_0 das in (27), (28) eingeführte homogene Polynom vom Grad q bedeutet.

Auch zu Satz 6 gibt es ein Analogon:

Satz 12. *Unter den Voraussetzungen des ersten Teiles von Satz 11 ist das Polynom $Q(x_0, \ldots, x_n)$ entweder absolut irreduzibel oder eine Potenz eines absolut irreduziblen Polynoms.*

Beweis. Zerlegt man das Polynom Q, falls es reduzibel ist, in irreduzible Faktoren

$$Q(x_0, \ldots, x_n) = \prod_{\lambda=1}^{r} G_\lambda(x_0, \ldots, x_n),$$

so ist nach Satz 11 $\prod G_\lambda(f_0, \ldots, f_n) = 0$; also verschwindet wenigstens einer der Faktoren, etwa

$$G_1(f_0, \ldots, f_n) = 0. \tag{47}$$

Wir setzen $Q = G_1 H$ (also $H = G_2 \ldots G_r$):

$$Q(x_0, x_1, \ldots, x_n) = G_1(x_0, x_1, \ldots, x_n) H(x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Läßt man nun $x_1, \ldots, x_n$ als Unbestimmte und spezialisiert x_0 zu x'_0 so, daß

$$H(x'_0, x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{48}$$

ist [16]), so ist auch $Q(x'_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$, und folglich gibt es nach Satz 11 ein Größensystem $\varrho'_1, \ldots, \varrho'_n$ derart, daß

$$x'_0 = f_0(\varrho'_1, \ldots, \varrho'_n),$$
$$x_\nu = f_\nu(\varrho'_1, \ldots, \varrho'_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

ist [17]). Nach (47) ist daher

$$G_1(x'_0, x_1, \ldots, x_n) = 0. \tag{49}$$

Aus (48) folgt also allemal (49). Daher muß eine Potenz von $G_1(x_0, \ldots, x_n)$, als Polynom von x_0 allein betrachtet, teilbar sein durch $H(x_0, \ldots, x_n)$. Aber in Q hat das von $x_1, \ldots, x_n$ freie Glied einen von 0 verschiedenen Koeffizienten; die Teiler G_1 und H haben daher dieselbe Eigenschaft, und aus Algebra, Satz 72 folgt dann, daß die genannte Potenz von G_1 auch als Polynom aller x_ν durch H teilbar ist. Die irreduziblen Faktoren von H, d. h. die Polynome $G_2, \ldots, G_r$ sind daher sämtlich mit G_1 äquivalent. Somit ist $Q = c G_1^r$, wo c eine Konstante. W. z. b. w.

---

[16]) Das ist möglich, weil in Q und folglich auch in dem Teiler H das von $x_1, \ldots, x_n$ freie Glied einen von 0 verschiedenen Koeffizienten hat, so daß x_0 in H wirklich vorkommt.

[17]) Man beachte, daß ja $x_1, \ldots, x_n$ Unbestimmte sind, so daß der am Schluß von Satz 11 erwähnte Ausnahmefall gewiß nicht vorliegt.

§ 8.

Anwendung auf rationale Flächen.

Satz 13. *Wenn zwischen den $n+1$ homogenen Polynomen m-ten Grades*

$$f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n),\ f_1(\varrho_1, \ldots, \varrho_n),\ \ldots,\ f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$$

eine homogene Abhängigkeit von irgendeinem Grad N besteht, bei der das Glied mit f_0^ν einen von 0 verschiedenen Koeffizienten hat, und wenn speziell die letzten n Polynome genau qm gemeinsame Nullstellen haben[18]*, wobei jede ihrer (stets durch m teilbaren) Pseudomultiplizität entsprechend gezählt ist, so liegen die Punkte des rationalen Gebildes*

$$x_\nu = f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \qquad (\nu = 0, \ldots, n),$$

falls $q < m^{n-1}$ ist[19]*, auf einer nicht zerfallenden algebraischen Fläche, deren Ordnung gleich $m^{n-1} - q$ oder ein Teiler davon ist. Und zwar enthält das Gebilde alle Punkte dieser Fläche außer allenfalls die Schnittpunkte mit einer zweiten (möglicherweise zerfallenden) algebraischen Fläche, deren Ordnung gleich q ist.*

Der Satz ist eine unmittelbare Folge der Sätze 11 und 12. Ausdrücklich sei wieder bemerkt, der Satz besagt nicht, daß die einzelnen Flächenpunkte sich etwa nur auf *eine* Art in der Parameterform darstellen lassen.

Beispiel I (Beispiel III von S. 470 nach Umnumerierung der f_ν).

$$f_0 = \varrho_1\varrho_2,\quad f_1 = \varrho_1^2,\quad f_2 = \varrho_2^2,\quad f_3 = \varrho_1\varrho_3.$$

Hier ist $n = 3$, $m = 2$; man findet ohne weiteres die Abhängigkeit zweiten Grades $f_0^2 - f_1 f_2 = 0$, bei der das Glied mit f_0^2 vorkommt. Die Polynome f_1, f_2, f_3 haben nur die eine gemeinsame Nullstelle $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 = 0$. Eine Rechnung ähnlich der auf S. 478 bei Beispiel II ergibt

$$\begin{aligned}\mathsf{T} &= R\Big(\underset{\varrho_1,}{\varrho_1^2 - x_1\sigma^2},\ \underset{\varrho_2,}{\varrho_2^2 - x_2\sigma^2},\ \underset{\varrho_3,}{\varrho_1\varrho_3 - x_3\sigma^2},\ \underset{\sigma}{\Sigma u_\nu \varrho_\nu - y\sigma}\Big)\\ &= u_3^4\{x_1^2 y^4 - 2x_1[(u_1x_1 + u_3x_3)^2 + u_2^2 x_1 x_2]y^2 +\\ &\quad + [(u_1x_1 + u_3x_3)^2 - u_2^2 x_1 x_2]^2\};\end{aligned}$$

doch hätte es genügt, von der geschweiften Klammer das erste Glied zu berechnen. Es ist also

$$\Phi(u_1, u_2, u_3) = u_3^4, \qquad \Omega_0(x_1, x_2, x_3) = x_1^2.$$

Nach S. 484 ist Φ vom Grad $qm = 2q$, Ω_0 vom Grad q. Daher ist $q = 2$, die Ordnung der Fläche also ein Teiler von $2^2 - 2 = 2$. In der Tat handelt es sich um den Kegel zweiter Ordnung $x_0^2 - x_1x_2 = 0$.

---

[18]) Hier gilt wieder das in Fußnote [11]) Gesagte.

[19]) Hier gilt wieder das in Fußnote [14]) Gesagte.

Durch die Parameterdarstellung werden nach Satz 11 alle Punkte des Kegels erfaßt außer allenfalls die Schnittpunkte mit $x_1^2 = 0$, also die Punkte der Mantellinie $x_1 = 0$, $x_0 = 0$. In der Tat sieht man sofort, daß von dieser nur der eine Punkt 0, 0, 1, 0 erfaßt wird.

Beispiel II (Beispiel IV von S. 470 nach Umnumerierung der f_i).

$$f_0 = \varrho_1\varrho_2, \quad f_1 = \varrho_1^2, \quad f_2 = \varrho_2\varrho_3, \quad f_3 = \varrho_1\varrho_3 + \varrho_2^2.$$

Hier ist wieder $n = 3$, $m = 2$; man findet leicht die Abhängigkeit dritten Grades $f_0^3 - f_0 f_1 f_3 + f_1^2 f_2 = 0$, bei der das Glied mit f_0^3 vorkommt. Die Polynome f_1, f_2, f_3 haben wieder nur die eine gemeinsame Nullstelle $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 = 0$. Daher muß (was man auch bei Beispiel I hätte ausnutzen können) Φ von u_1 und u_2 frei sein[20]). Zur Berechnung von Φ und Ω_0 genügt es also, die Resultante T für $u_1 = u_2 = 0$ zu berechnen; sie sei T^*. Man findet

$$\mathsf{T}^* = R\left(\frac{\varrho_1^2 - x_1\sigma^2}{\varrho_1}, \frac{\varrho_2\varrho_3 - x_2\sigma^2}{\varrho_2}, \frac{\varrho_1\varrho_3 + \varrho_2^2 - x_3\sigma^2}{\varrho_3}, \frac{u_3\varrho_3 - y\sigma}{\sigma}\right)$$
$$= u_3^2\,[-x_1 y^6 + \cdots].$$

Es ist also $\Phi = u_3^2$, $\Omega_0 = -x_1$. Daher ist $q = 1$, die Ordnung der Fläche also ein Teiler von $2^2 - 1 = 3$. In der Tat handelt es sich um die Fläche dritter Ordnung

$$x_0^3 - x_0 x_1 x_3 + x_1^2 x_2 = 0.$$

Durch die Parameterdarstellung werden nach Satz 11 alle Punkte der Fläche erfaßt außer allenfalls die Schnittpunkte mit $x_1 = 0$, also die Punkte der Geraden $x_1 = 0$, $x_0 = 0$. Man sieht aber leicht, daß diesmal auch diese Punkte erfaßt werden mit Ausnahme des einen Punktes 0, 0, 1, 0.

Beispiel III. $f_0 = \varrho_1^2\varrho_2$, $f_1 = \varrho_1^3$, $f_2 = \varrho_2^2(\varrho_2 - \varrho_3)$, $f_3 = (\varrho_1 + \varrho_2)\,\varrho_3^2$.

Hier ist $n = 3$, $m = 3$. Durch sukzessive Elimination findet man leicht die Abhängigkeit siebenten Grades

$$(f_0^3 - f_1^2 f_2)^2 (f_0 + f_1) - f_0^4 f_1^2 f_3 = 0,$$

bei der das Glied mit f_0^7 vorkommt. Aus gleichem Grunde wie beim vorigen Beispiel genügt es wieder, die Resultante T für $u_1 = u_2 = 0$ zu berechnen. Man findet

$$\mathsf{T}^* = R\left(\frac{\varrho_1^3 - x_1\sigma^3}{\varrho_1}, \frac{\varrho_2^2(\varrho_2 - \varrho_3) - x_2\sigma^3}{\varrho_2}, \frac{(\varrho_1 + \varrho_2)\,\varrho_3^2 - x_3\sigma^3}{\varrho_3}, \frac{u_3\varrho_3 - y\sigma}{\sigma}\right)$$
$$= u_3^6\,[x_1^2 y^{21} + \cdots].$$

---

[20]) Φ ist ja das erste Produkt in Formel (25).

Es ist also $\Phi = u_3^6$, $\Omega_0 = x_1^2$. Daher ist $q = 2$ und die Ordnung der Fläche ein Teiler von $3^2 - 2 = 7$. In der Tat handelt es sich um die Fläche siebenter Ordnung

$$(x_0^3 - x_1^2 x_2)^2 (x_0 + x_1) - x_0^4 x_1^2 x_3 = 0.$$

Durch die Parameterdarstellung werden nach Satz 11 alle Punkte der Fläche erfaßt außer allenfalls die Schnittpunkte mit $x_1 = 0$. Man sieht aber leicht, daß diesmal auch diese Punkte ausnahmslos erfaßt werden.

Bei Satz 13 ist unbequem, daß zwischen den f_ν eine homogene Abhängigkeit von einem gewissen Grad N bestehen muß, *in der das Glied mit f_0^N wirklich vorkommt*. Ist diese Bedingung aber nicht erfüllt, so kann ihr Erfülltsein stets durch eine lineare Transformation

$$f_\nu = \sum_{\mu=0}^{n} a_{\nu\mu} \varphi_\mu \qquad (\nu = 0, \ldots, n), \tag{50}$$

$$\begin{vmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n0} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{51}$$

erreicht werden (unter Umständen schon durch Umnumerieren der f_ν, siehe oben Beispiel I und II). Denn daß überhaupt eine homogene Abhängigkeit

$$\Sigma A_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_n} f_0^{\lambda_0} f_1^{\lambda_1} \ldots f_n^{\lambda_n} = 0 \quad (\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = N) \tag{52}$$

besteht, ist zu Beginn des § 2 gezeigt. Übt man hier die Transformation (50) aus, so entsteht zwischen den φ_ν die Abhängigkeit

$$\Sigma B_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_n} \varphi_0^{\lambda_0} \varphi_1^{\lambda_1} \ldots \varphi_n^{\lambda_n} = 0 \quad (\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = N), \tag{53}$$

wobei insbesondere

$$B_{N0\ldots0} = \Sigma A_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_n} a_{00}^{\lambda_0} a_{10}^{\lambda_1} \ldots a_{n0}^{\lambda_n} \tag{54}$$

ist. Nun kann man die $a_{\nu\mu}$ so wählen (nach Algebra, Satz 29 sogar als ganze Zahlen), daß

$$B_{N0\ldots0} \neq 0 \tag{55}$$

ist und daß zugleich die Bedingung (51) erfüllt ist. Dann hat man das Gewünschte.

Haben nun die $n + 1$ Polynome $f_0, \ldots, f_n$ nur endlich viele gemeinsame Nullstellen, so haben die n Polynome $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, da man die Gleichungen (50) nach den φ_ν auflösen kann, ebenfalls diese Nullstellen. Sie haben aber keine weiteren, also gewiß auch nur endlich viele. Denn wenn sie noch eine hätten, so hätte wegen (53) und (55) auch φ_0 diese Nullstelle, die dann nach (50) auch eine weitere gemeinsame Nullstelle aller f_ν wäre. Jetzt lassen sich die Sätze 11 und 12 auf die Polynome φ_ν anwenden. Dabei ist aber die Berechnung von Φ

und Ω_0, wie schon die obigen Beispiele zeigen, eine mühsame Sache. Unter Verzicht darauf kann man aber aus Satz 13 nach Rückkehr zu den Polynomen f_ν immerhin das folgende weniger präzise Resultat entnehmen:

Satz 14. *Die Punkte des rationalen Gebildes*

$$x_\nu = f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \qquad (\nu = 0, \ldots, n)$$

liegen, wenn die f_ν homogene Polynome m-ten Grades mit s verschiedenen gemeinsamen Nullstellen sind [21]*, und wenn $s < m^{n-1}$ ist* [22]*, im allgemeinen auf einer nicht zerfallenden algebraischen Fläche, deren Ordnung höchstens gleich $m^{n-1} - s$ ist; und zwar enthält das Gebilde alle Punkte dieser Fläche außer allenfalls die Schnittpunkte mit einer zweiten (möglicherweise zerfallenden) algebraischen Fläche. — Ausnahmsweise kann es sich aber auch um ein Gebilde von weniger als $n-1$ Dimensionen handeln.*

Nach Fußnote [22]) ist nämlich $s \leqq q$, also $m^{n-1} - q \leqq m^{n-1} - s$. — Der Ausnahmefall liegt vor für $q = m^{n-1}$ (siehe § 9).

Beispiel. $f_0 = p_1 p_2$, $f_1 = p_1 p_3$, $f_2 = p_2 p_4$, $f_3 = p_3 p_4$.

Die p_ν seien ein System linearer Formen von $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ derart, daß $\frac{p_4}{p_1}$ und $\frac{p_3}{p_2}$ nicht konstant sind. Hier gibt es im allgemeinen zwei verschiedene gemeinsame Nullstellen, nämlich

$$\text{eine aus dem System } p_1 = 0,\ p_4 = 0$$
$$\text{und eine aus dem System } p_2 = 0,\ p_3 = 0.$$

Die Ordnung der Fläche ist also höchstens gleich $2^2 - 2 = 2$. In der Tat ist es die Fläche zweiter Ordnung $x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0$. — Der Ausnahmefall liegt vor, wenn die gemeinsame Nullstelle von p_1 und p_4 mit der von p_2 und p_3 zusammenfällt, wenn also die Koeffizientenmatrix der vier Linearformen p_ν vom Rang 2 ist. Dann besteht zwischen den f_ν auch noch eine lineare Relation, und das Gebilde ist ein Kegelschnitt.

§ 9.

Der Fall $q = m^{n-1}$.

Nach § 6 ist stets $q \leqq m^{n-1}$, und wir haben bisher $q < m^{n-1}$ vorausgesetzt. Wenn nun $q = m^{n-1}$, also $p = m^n$ ist, so hat das Gleichungs-

[21]) Hier gilt wieder das in Fußnote [11]) Gesagte.

[22]) Von selbst ist stets $s \leqq m^{n-1}$. Denn die s verschiedenen Nullstellen der $n+1$ Polynome f_ν sind als Nullstellen der n Polynome $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ihrer Pseudomultiplizität entsprechend zu zählen, und da eine Pseudomultiplizität nach Satz 10 durch m teilbar, also mindestens gleich m ist, so liefern sie mindestens ms gemeinsame Nullstellen von $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Da wir die genaue Anzahl dieser Nullstellen mit qm bezeichnet haben, so ist $s \leqq q$, wegen $q \leqq m^{n-1}$ also auch $s \leqq m^{n-1}$. Der Fall $s = m^{n-1}$ wird in § 9 erledigt.

system (22), wo die x_ν Unbestimmte sind, gar keine Lösung mit $\sigma \neq 0$; denn die Anzahl dieser Lösungen war ja gleich $m^n - p$. Das besagt dann, daß das inhomogene Gleichungssystem

$$f_1(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) = x_1, \quad \ldots, \quad f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) = x_n \tag{56}$$

keine Lösung hat. Daraus läßt sich aber schließen, daß die Funktionaldeterminante der f_ν identisch verschwindet. Denn wenn sie etwa für das Spezialsystem $\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0$ nicht verschwände, so könnte man den zugrunde gelegten Körper so erweitern, daß das Gleichungssystem (56), wo die x_ν Unbestimmte sind, auflösbar wird. Eine Lösung wäre nämlich vorhanden in dem zu seinem Quotientenkörper erweiterbaren Ring der formalen Potenzreihen nach Potenzen der Größen

$$y_1 = x_1 - f_1(\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0), \quad \ldots, \quad y_n = x_n - f_n(\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0),$$

die ja zugleich mit $x_1, \ldots, x_n$ den Charakter von Unbestimmten haben; das zeigt man genau wie in der Funktionentheorie, wobei nur die Konvergenzbetrachtungen wegfallen. Nachdem somit das Verschwinden der Funktionaldeterminante feststeht, ergibt sich aus Algebra, Satz 61, daß zwischen den f_ν eine Abhängigkeit besteht, und wie zu Beginn des § 2 sieht man dann, daß sogar eine *homogene* Abhängigkeit besteht. Somit gewinnen wir als Ergänzung der Sätze 11 und 13 den

Satz 15. *Wenn die n homogenen Polynome m-ten Grades*

$$f_1(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \ldots, f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$$

genau m^n gemeinsame Nullstellen haben, wobei jede ihrer (stets durch m teilbaren) Pseudomultiplizität entsprechend gezählt ist, so besteht zwischen den n Polynomen (mindestens) eine homogene Abhängigkeit $G(f_1, \ldots, f_n) = 0$ [23]).

Liegen jetzt $n+1$ homogene Polynome m-ten Grades

$$f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \ldots, f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$$

mit genau m^{n-1} verschiedenen gemeinsamen Nullstellen vor, so gehen wir wie in der zweiten Hälfte des § 8 durch eine lineare Transformation zu $n+1$ neuen Polynomen

$$\varphi_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \ldots, \varphi_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$$

über, zwischen denen eine homogene Abhängigkeit etwa N-ten Grades besteht, bei der das Glied mit φ_0^N wirklich vorkommt. Aber die letzten n Polynome φ_ν

[23]) Man beachte, daß bei weniger als m^n gemeinsamen Nullstellen keine solche Abhängigkeit besteht. Dann haben nämlich die Gleichungen (22), wo die x_ν Unbestimmte sind, eine Lösung mit $\sigma \neq 0$, also auch mit $\sigma = 1$; d. h. die Gleichungen (56) sind lösbar. Zwischen den f_ν kann daher keine Abhängigkeit bestehen, weil sonst dieselbe Abhängigkeit auch zwischen den Unbestimmten x_ν bestehen würde.

haben auch genau dieselben m^{n-1} gemeinsamen Nullstellen (Beweis wie in § 8), so daß bereits zwischen ihnen nach Satz 15 eine homogene Abhängigkeit besteht [24]). Kehrt man zu den ursprünglichen Polynomen f_ν zurück, so ergibt sich als Ergänzung zu Satz 14 der

Satz 16. *Wenn die $n+1$ homogenen Polynome m-ten Grades*

$$f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \ldots, f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$$

genau m^{n-1} verschiedene gemeinsame Nullstellen haben, dann gehören die Punkte des rationalen Gebildes

$$x_\nu = f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \qquad (\nu = 0, \ldots, n)$$

dem Durchschnitt von mindestens zwei verschiedenen algebraischen Flächen an. Das Gebilde ist also höchstens $(n-2)$-dimensional.

Beispiel. $x_0 = \varrho_1^2 - \varrho_2^2$, $x_1 = \varrho_2^2 - \varrho_3^2$, $x_2 = \varrho_3^2 - \varrho_1^2$,

$$x_3 = \varrho_1^2 - 2\,\varrho_2^2 + \varrho_3^2.$$

Hier ist $n = 3$, $m = 2$ und die Polynome haben genau $2^2 = 4$ verschiedene gemeinsame Nullstellen, nämlich

$$\varrho_2 = \pm\,\varrho_1, \quad \varrho_3 = \pm\,\varrho_1$$

mit allen vier Vorzeichenkombinationen. Das Gebilde ist keine Fläche, sondern die Kurve (Gerade)

$$x_0 + x_1 + x_2 = 0, \quad x_0 - x_1 - x_3 = 0.$$

Jeder Punkt der Geraden läßt sich auf unendlich viele Arten in der Parameterform darstellen.

§ 10.

Beweis eines in § 6 benutzten Hilfssatzes.

Hilfssatz. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein homogenes Polynom vom Grad km*

$$\sum a_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} u_1^{\lambda_1} \ldots u_n^{\lambda_n} \qquad (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = km)$$

die m-te Potenz eines Polynoms ist, besteht darin, daß seine Koeffizienten einem System von Bedingungsgleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten genügen.

---

[24]) Die m^{n-1} verschiedenen gemeinsamen Nullstellen der f_ν liefern nämlich, wie sich aus Fußnote [22]) ergibt, m^n gemeinsame Nullstellen der n Polynome $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, so daß man Satz 15 anwenden kann.

Beweis. Setzt man das Polynom versuchsweise gleich

$$\text{(I)} \qquad (\Sigma b_{\nu_1 \dots \nu_n} u_1^{\nu_1} \dots u_n^{\nu_n})^m \qquad (\nu_1 + \dots + \nu_n = k),$$

so ist

$$\text{(II)} \qquad a_{\lambda_1 \dots \lambda_n} = \Sigma b_{\nu_{11} \dots \nu_{n1}} b_{\nu_{12} \dots \nu_{n2}} \dots b_{\nu_{1m} \dots \nu_{nm}},$$

wobei die Summe sich über alle Systeme von Indizes erstreckt, für die

$$\nu_{11} + \nu_{12} + \dots + \nu_{1m} = \lambda_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\nu_{n1} + \nu_{n2} + \dots + \nu_{nm} = \lambda_n$$

ist. Gesucht sind also die Bedingungen, unter denen das System (II) mit den Unbekannten $b_{\nu_1 \dots \nu_n}$ eine Lösung hat. Betrachtet man statt dessen das homogene Gleichungssystem

$$\text{(III)} \qquad a_{\lambda_1 \dots \lambda_n} c^m = \Sigma b_{\nu_{11} \dots \nu_{n1}} b_{\nu_{12} \dots \nu_{n2}} \dots b_{\nu_{1m} \dots \nu_{nm}}$$

mit den Unbekannten c und $b_{\nu_1 \dots \nu_n}$, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer nichttrivialen Lösung das Verschwinden eines Resultantensystems. Ist die Bedingung erfüllt, so ist bei einer nichttrivialen Lösung gewiß $c \neq 0$, so daß man $c = 1$ setzen kann, womit auch das System (I) gelöst ist. Denn wenn $c = 0$ wäre, so würde aus (III) folgen:

$$\Sigma b_{\nu_{11} \dots \nu_{n1}} b_{\nu_{12} \dots \nu_{n2}} \dots b_{\nu_{1n} \dots \nu_{nm}} = 0,$$

was aber besagen würde, daß die m-te Potenz (I) und also auch das Basispolynom identisch verschwände. Daher wären auch alle $b_{\nu_1 \dots \nu_n}$ gleich 0, und die Lösung von (III) wäre die triviale.

Nach Algebra, Satz 139 gibt es ein Resultantensystem, das aus Polynomen der $a_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ mit ganzzahligen Koeffizienten besteht, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

(Eingegangen am 1. Mai 1942.)

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für Doppelreihen.

Von

Ludwig Neder in Münster i. W.

Unter den nach CAUCHYS Definition konvergent genannten Doppelreihen

(1) $$\Sigma a_{\mu,\nu} \qquad (\mu \text{ und } \nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

besitzen diejenigen mit ausnahmslos konvergenten Zeilen und Spalten eine Reihe von Eigenschaften, durch die sie vor den übrigen Reihen ausgezeichnet sind, und durch die sie den berechtigten Erwartungen entsprechen, die man einer sinnvollen Verallgemeinerung der eindimensionalen konvergenten Reihen entgegenbringt. Von solchen Eigenschaften erwähnen wir hier nur die folgenden: a) Die Teilsummen

(2) $$s_{m,n} = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu} \qquad (m \text{ und } n = 1, 2, 3, \ldots)$$

bilden eine beschränkte Zahlenmenge. b) Desgleichen die Glieder $a_{\mu,\nu}$ der Doppelreihe. c) Jede durch Weglassung von je höchstens endlich vielen Anfangszeilen und -spalten erzeugte Teilreihe konvergiert (samt allen Zeilen und Spalten). d) Die iterierten Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu,\nu} \right\} \quad \text{und} \quad \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\mu,\nu} \right\}$$

konvergieren, und zwar gegen die Summe s der Doppelreihe.

Zweck dieser kurzen Note ist es nun, eine einfache notwendige und hinreichende Bedingung anzugeben dafür, daß eine Doppelreihe zur obengenannten Teilklasse der nach CAUCHY konvergenten Doppelreihen gehört:

Satz. *Damit eine Doppelreihe* (1) ***konvergent ist samt allen ihren Zeilen und Spalten, ist notwendig und hinreichend, daß für die Teilsumme*** (2) *eine Entwicklung besteht*

(3) $$s_{m,n} = s - \varphi_m - \psi_n + \chi_{m,n},$$

wobei

(4) $\varphi_m \to 0$ bei $m \to \infty$, $\psi_n \to 0$ bei $n \to \infty$, $\chi_{m,n} \to 0$ bei $m + n \to \infty$.

Beweis. A. *Die Bedingung ist hinreichend.* Aus (3) und (4) folgt, daß $s_{m,n}$ einem wohlbestimmten Grenzwert zustrebt, wenn $m \to \infty$, $n \to \infty$ bzw. wenn $m \to \infty$, n fest oder m fest, $n \to \infty$. Und dies liefert gerade die Konvergenz der Doppelreihe (nach CAUCHY) bzw. die Konvergenz der Zeilen und Spalten.

B. *Die Bedingung ist notwendig.* Restkern heiße der Ausdruck

$$r_{m,n} = \sum a_{\mu,\nu} \qquad (\mu > m,\ \nu > n).$$

Dann haben wir zunächst die Zerlegung

$$(5) \qquad \sum_{\mu=m+1}^{M} \sum_{\nu=n+1}^{N} a_{\mu,\nu} = s_{M,N} + s_{m,n} - s_{m,N} - s_{M,n},$$

aus der sich bei $M \to \infty$, $N \to \infty$ ergibt

$$r_{m,n} = s + s_{m,n} - s_{m,\infty} - s_{\infty,n} = s + s_{m,n} - (s - r_{m,0}) - (s - r_{0,n}).$$

Daraus resultiert

$$s_{m,n} = s - r_{m,0} - r_{0,n} + r_{m,n},$$

womit die gewünschte Entwicklung (3) gefunden ist, und auch (4) besteht, sobald die Beziehung

$$(6) \qquad r_{m,n} \to 0 \text{ bei } m + n \to \infty$$

sichergestellt ist, was nunmehr erfolgen soll.

Dazu haben wir zunächst wegen der vorausgesetzten Konvergenz (nach Cauchy) der Doppelreihe

$$|s - s_{m,n}| < \delta \quad \text{für} \quad m \geqq P,\ n \geqq P.$$

Setzen wir also in (5) voraus

$$M \geqq m \geqq P, \quad N \geqq n \geqq P,$$

und subtrahieren wir in (5) von jeder der vier Teilsummen einmal s (was sich im Effekt gegenseitig aufhebt), so kommt nach dem Grenzübergang $M \to \infty$, $N \to \infty$ die Beziehung

$$(7) \qquad |r_{m,n}| < 4\,\delta \quad \text{für} \quad m \geqq P,\ n \geqq P.$$

Weiter ist wegen der vorausgesetzten Konvergenz der Zeilen und Spalten

$$(8) \qquad \begin{cases} \left| \sum_{\mu=m+1}^{\infty} a_{\mu,\nu} \right| < \frac{\delta}{P} & \text{für } m \geqq M_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, P), \\ \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\mu,\nu} \right| < \frac{\delta}{P} & \text{für } n \geqq N_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, P), \end{cases}$$

Wenn wir dann setzen

$$Q = \max\,(P, M_1, \ldots, M_P, N_1, \ldots, N_P),$$

so ergibt sich jetzt die Beziehung

$$|r_{m,n}| < 5\,\delta \text{ für } m \geqq Q \text{ (und entsprechend auch für } n \geqq Q)$$

folgendermaßen: Für $n \geqq P$ ist sie in (7) enthalten, und für $n = 0, 1, \ldots,$ $P - 1$ gilt

$$r_{m,n} = r_{m,P} + \sum_{\nu=n+1}^{P} \left\{ \sum_{\mu=m+1}^{\infty} a_{\mu,\nu} \right\},$$

so daß die Behauptung aus (7) und (8) folgt.

Nunmehr aber gilt

$$|r_{m,n}| < 5\delta \quad \text{für} \quad m + n \geqq 2Q,$$

da dann $m \geqq Q$ oder $n \geqq Q$, womit (6) und somit alles bewiesen ist.

Schlußbemerkung. Die Übertragung unserer notwendigen und hinreichenden Bedingung auf drei- und mehrfach unendliche Reihen dürfte von geringerem Interesse sein.

(Eingegangen am 31. März 1942.)

Zu einem Approximationssatz von Koksma.

Von

L. Rédei in Szeged (Ungarn).

Herr Koksma[1]) hat folgenden Satz bewiesen: Für fast alle reellen Zahlen $\alpha \geqq 1$ ist die Folge α^x $(x = 1, 2, \ldots)$ gleichverteilt (mod 1).

Trivial ist der Fall, daß α ganz rational ist. Hiervon abgesehen wurde meines Wissens das Verhalten von α^x (mod 1) bisher für kein spezielles α angegeben. Im folgenden soll ein kleiner Beitrag zu dieser Frage geliefert werden.

Es werde ω eine Häufungsstelle (mod 1) einer Folge a_x genannt, wenn es ganz rationale Zahlen g_x gibt so, daß ω eine (gewöhnliche) Häufungsstelle von $a_x + g_x$ ist. Dann sind alle $\omega + g$ (g ganz rational) auch Häufungsstellen (mod 1), die wir äquivalent nennen. Gibt es keine weiteren Häufungsstellen (mod 1) und ist ω eine beliebige unter ihnen, so sagen wir, daß a_x gegen ω konvergiert (mod 1). Wir beweisen:

a. *Ist α ganz algebraisch und sind die von α verschiedenen Konjugierten von α absolut kleiner als* 1[2]), *so konvergiert α^x gegen* 0 (mod 1).

b. *Ist $\alpha = \frac{a}{b}$ (a, b ganz rational, $a > b > 1$, $b \nmid a$), so hat α^x unendlich viele nicht äquivalente Häufungsstellen* (mod 1). *Ist ω eine unter ihnen, so ist mit einem passenden ganz rationalen r auch $\alpha\,\omega + \frac{r}{b}$ eine solche. [Ob aber die Häufungsstellen* (mod 1) *überall dicht oder sogar gleichverteilt liegen, bleibt dahingestellt.]*

Zu **a.** Die über alle Konjugierten erstreckte Summe $\Sigma\,\alpha^x$ ist für jedes x ganz rational. Hieraus folgt schon die Behauptung.

---

[1]) J. F. Koksma, Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins. Compositio math. **2** (1935), S. 250–258. Vgl. auch den Bericht desselben Verfassers: Diophantische Approximationen. Ergebnisse der Math. **4**, Heft 4, Berlin 1936, S. 1–157, insbes. S. 95.

[2]) Offenbar muß ein solches α absolut größer als 1, also auch reell sein. Zu jeder Gradzahl lassen sich unendlich viele solche α leicht angeben. Vgl. z. B. St. Lipka, Über die Irreduzibilität von Polynomen. Math. Annalen **118** (1941), S. 235–245.

Zu **b**. Wir beweisen zuerst die zweite Behauptung. Es sei ε eine vorgegebene positive Zahl. Nach der Annahme gibt es dann unendlich viele natürliche Zahlen x so, daß

$$\alpha^{x-1} = \omega + g_x + \delta_x$$

mit ganz rationalem g_x und $|\delta_x| < \frac{\varepsilon}{\alpha}$. Hieraus folgt

$$\alpha^x \equiv \alpha\,\omega + \frac{r}{b} + \alpha\delta_x \pmod 1$$

mit einem passenden $r = 0, 1, \ldots, b-1$. Da $|\alpha\delta_x| < \varepsilon$ ist und für r bloß ein endlicher Wertevorrat vorliegt, erhellt die Richtigkeit der zweiten Behauptung in **b**.

Kommt in **b** ein irrationales ω vor, so ergibt sich die erste Behauptung in **b** durch Iteration des eben Bewiesenen. Für alle Fälle gilt aber folgender Beweis. Neben allen ω betrachten wir auch noch diejenigen Zahlen $\overline{\omega} = \alpha\,\omega$, die unter den ω nicht vorkommen (natürlich können die $\overline{\omega}$ auch fehlen) und bezeichnen mit H die Menge der ω und $\overline{\omega}$. Nehmen wir jetzt an, daß die erste Behauptung in **b** falsch ist. Das bedeutet, daß die ω endlichviele Restklassen (mod 1) ausmachen; so besteht H offenbar aus ebenfalls endlichvielen Restklassen (mod 1), da ja α rational ist. Somit können wir um jedes Element ξ von H als Mittelpunkt ein Intervall $J(\xi)$ der Länge 2ε legen, wobei $\varepsilon\,(>0)$ genügend klein gewählt ist, so daß alle diese $J(\xi)$ paarweise fremd sind. Sodann konstruieren wir ähnlich zu den ω weitere Intervalle $J'(\omega)$ der Länge $\frac{2\varepsilon}{\alpha}$ statt 2ε. [$J'(\omega)$ ist in $J(\omega)$ enthalten.] Jetzt wählen wir eine natürliche Zahl N so groß, daß α^x für $x = N, N+1, \ldots$ in die Vereinigungsmenge aller $J'(\omega)$ fällt. Dadurch wird jedem $x = N, N+1, \ldots$ ein bestimmtes $\omega = \omega_x$ zugeordnet mit

$$\alpha^x = \omega_x + \delta_x \quad \text{und} \quad |\delta_x| \leqq \frac{\varepsilon}{\alpha}. \tag{1}$$

Da

$$\alpha^{x+1} = \alpha\,\omega_x + \alpha\delta_x$$

und $|\alpha\delta_x| \leqq \varepsilon$ ist, so liegt α^{x+1} in $J(\alpha\,\omega_x)$. Letzteres muß also ein $J'(\omega)$ enthalten, und das heißt, daß $\alpha\,\omega_x$ einem ω gleich ist. Da (1) auch mit $x+1$ statt x gilt, so muß eben $\alpha\,\omega_x = \omega_{x+1}$ sein. Das hat wieder $\delta_{x+1} = \alpha\delta_x$ zur Folge. Also ist $\delta_{N+k} = \alpha^k\delta_N$ $(k = 1, 2, \ldots)$, und das ergibt wegen (1) und $\alpha > 1$: $\delta_x = 0$, $\alpha^x = \omega_x$ $(x = N, N+1, \ldots)$. Da aber alle α^x inkongruent sind (mod 1)[3]), so bedeutet letzteres unendlich viele nicht äquivalente Häufungsstellen von α^x (mod 1). Dieser Widerspruch beweist **b**.

---

[3]) Sie haben sogar verschiedene reduzierte Nenner.

Bemerkung. Ein bekannter Satz von WEYL[4]) lautet so: Sind je zwei der ganzen rationalen Zahlen a_x ($x = 1, 2, \ldots$) voneinander verschieden, so ist für fast alle reellen γ die Folge γa_x gleichverteilt (mod 1). Offenbar gilt dieser Satz auch dann, wenn a_x durch $a_x + \delta_x$ ersetzt wird, wobei δ_x eine reelle Nullfolge ist, insbesondere also für α^x statt a_x mit einem α aus $\mathfrak{a}$. Ist γ aus dem durch α erzeugten Zahlkörper, so hat $\gamma \alpha^x$ nur endlichviele nicht äquivalente Häufungsstellen (mod 1), wie das aus $\mathfrak{a}$ leicht folgt.

---

[4]) H. WEYL, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. Math. Annalen 77 (1916), S. 313–352, insbes. S. 344. Vgl. auch den unter Anm. [1]) zitierten Bericht, S. 94.

(Eingegangen am 2. Mai 1942.)

Konstruktion lösender Kerne für singuläre Integralgleichungen erster Art, insbesondere bei Differenzkern.

Von

M. Eichler in Darmstadt.

Aufgabestellung.

1. Den nachstehenden Ausführungen liegt eine Integralgleichung

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} L(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \tag{1}$$

von erster Art zugrunde. Der Kern möge die spezielle Gestalt

$$\begin{aligned} L(x, \xi) = {} & \frac{1}{x - \xi} + c_0(x) \left(\gamma_0(\xi) + \mathfrak{I}_0(x - \xi) \right) \\ & + c_1(x) \left(\frac{1}{1!} x \gamma_0(\xi) + \gamma_1(\xi) + \mathfrak{I}_1(x - \xi) \right) \\ & + \cdots \\ & + c_n(x) \left(\frac{1}{1!} x^n \gamma_0(\xi) + \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} \gamma_1(\xi) + \cdots \right. \\ & \qquad \left. + \gamma_n(\xi) + \mathfrak{I}_n(x - \xi) \right) \end{aligned} \tag{2}$$

haben, wobei $c_\nu(x)$, $\gamma_\nu(\xi)$ stetig differenzierbare Funktionen sind und

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_0(x) &= \ln |x|, \\ \mathfrak{I}_n(x) &= \int_0^x \mathfrak{I}_{n-1}(x)\, dx, \end{aligned} \tag{3}$$

also

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_1(x) &= x(\ln |x| - 1), \\ \mathfrak{I}_2(x) &= \tfrac{1}{2} x^2 \ln |x| - \tfrac{3}{4} x^2, \\ \mathfrak{I}_3(x) &= \tfrac{1}{6} x^3 \ln |x| - \tfrac{11}{36} x^3, \text{ usw.} \end{aligned} \tag{4}$$

Die Besonderheit des Kerns, auf die sich alle Rechnungen stützen, ist die, daß die einzelnen Terme in (2) bis auf die Faktoren $c_\nu(x)$ auseinander durch Ableitung nach x hervorgehen.

$L(x, \xi)$ ist für $x = \xi$ singulär, und es ist in dem Integral (1) der Cauchysche Hauptwert zu nehmen. Es wird verabredet, daß Integrale mit singulärem Integranden stets im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu verstehen sind.

Integralgleichungen dieser Art, wenn auch mit einer unendlichen Reihe (2), kommen in der Tragflügeltheorie oder bei gewissen Randwertaufgaben für

die geschlitzte Ebene und die Differentialgleichung $\Delta u + u = 0$ vor. Als Kern tritt im letzteren Fall die HANKELsche Funktion $H_1^{(2)}(x - \xi)$ auf, die sich in eine gut konvergente Reihe (2) entwickeln läßt (vgl. hierzu den Abschnitt 12). Auf die dem Praktiker naheliegende Vermutung, daß man beim Lösen der Integralgleichung die unendliche Reihe durch einen endlichen Abschnitt ersetzen darf, wird hier nicht eingegangen.

Gesucht und konstruiert werden für eine endliche Reihe (2) zwei Funktionen $\Lambda(\xi, t)$, $\mathsf{N}(\xi)$ von der Art, daß

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \Lambda(\xi, t)\, f(t)\, dt \tag{5}$$

die Integralgleichung (1) löst, während $\mathsf{N}(\xi)$ der zugehörigen homogenen Gleichung

$$0 = \int_{-1}^{+1} L(x, \xi)\, \mathsf{N}(\xi)\, d\xi \tag{6}$$

genügt. Es ist demnach $\Lambda(\xi, t) + \mathsf{N}(\xi)\, \varphi_0(t)$ mit beliebigem $\varphi_0(t)$ ein lösender Kern der vorgelegten Integralgleichung. Die Konstruktion wird auf die Auflösung eines Systems von $n + 1$ linearen Gleichungen zurückgeführt, deren Lösbarkeit für die Durchführbarkeit der Berechnung von Λ und N maßgebend ist; in Ausnahmefällen versagt sie.

Die Konstruktion von $\Lambda(\xi, t)$ und $\mathsf{N}(\xi)$ läßt sich für Differenzkerne der Form (2) weitgehend explizit leisten, wie zum Schluß gezeigt wird (Abschnitt 12 bis 14).

Ersetzt man in (2) die $c_\nu(x)$, $\gamma_\nu(\xi)$ durch $p^{\nu+1} c_\nu(x)$, $p^{-\nu-1}\gamma_\nu(\xi)$ und läßt den Parameter p gegen 0 streben, so geht (2) in einen von logarithmischen Bestandteilen freien Kern

$$L^*(x, \xi) = \frac{1}{x - \xi} + c_0(x)\gamma_0(\xi) + \cdots + c_n(x)\gamma_n(\xi)$$

über. Hierbei strebt auch $\Lambda(\xi, t)$ einer Grenzfunktion $\Lambda^*(\xi, t)$ zu, welche gleich dem zu L^* gehörigen lösenden Kern ist[1]). Obwohl man die Tatsache, daß Λ^* der lösende Kern von L^* ist, sehr leicht direkt verifizieren könnte, dürfte es doch interessant sein, die Entstehung von Λ^* aus Λ im einzelnen zu verfolgen. Diese Entartungsfälle von (2) sind wohl im allgemeinen von größerem Interesse als die nicht entarteten Fälle. Denn man kann jeden Kern

$$\widetilde{L}(x, \xi) = \frac{1}{x - \xi} + \widetilde{L}_1(x, \xi)$$

[1]) Man wird so auf ein Lösungsverfahren geführt für Integralgleichungen 1. Art mit einem Kern L^*, das mit dem Abspaltungsverfahren von E. SCHMIDT bei Integralgleichungen 2. Art (je nach der Auffassung) analog oder identisch ist.

mit stetigem und stückweise glattem $\widetilde{L}_1$ durch Kerne L^* gleichmäßig approximieren und nach unserem Ergebnis auch mit wenig Mühe eine Integralgleichung 1. Art mit diesem Kern angenähert lösen, falls es zutrifft, daß die Lösung der Integralgleichung mit dem Kern L^* bei wachsendem n gegen diejenige mit dem Kern $\widetilde{L}$ konvergiert. Diese Frage wird hier jedoch nicht behandelt. Außerdem führt die Betrachtung entarteter Kerne auf ein Iterationsverfahren zur Lösung von (1) (vgl. Abschnitt 16).

Alle im folgenden auftretenden Funktionen sollen, soweit etwas anderes nicht ausdrücklich bemerkt wird, im Intervall von -1 bis $+1$ stetig differenzierbar sein. An vielen Stellen könnte man zwar mit schwächeren Voraussetzungen auskommen, jedoch soll uns hier in erster Linie die Aufstellung eines zur Lösung von (1) führenden Formelapparates, nicht die Absteckung seiner Gültigkeitsgrenzen interessieren. Treten auch Ableitungen von Funktionen auf, so sollen sie wieder als stetig differenzierbar vorausgesetzt werden.

Beschreibung des Konstruktionsverfahrens.

2. Es werde

$$(7)\qquad g(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{1}{n!}x^n\gamma_0(\xi) + \cdots + \gamma_n(\xi) + \mathfrak{I}_n(x-\xi)\right)\varphi(\xi)\,d\xi$$

gesetzt. Es ist dann

$$(8)\qquad \frac{d^\mu}{dx^\mu}g(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\Big(\frac{1}{(n-\mu)!}x^{n-\mu}\gamma_0(\xi) + \cdots + \gamma_{n-\mu}(\xi) + \mathfrak{I}_{n-\mu}(x-\xi)\Big)\varphi(\xi)\,d\xi$$

für $\mu = 0, 1, \ldots, n$ und

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}g(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\ln|\varepsilon|\left(\varphi(x-\varepsilon) - \varphi(x+\varepsilon)\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{+1}\frac{\varphi(\xi)}{x-\xi}\,d\xi,$$

bei differenzierbarem φ also

$$(9)\qquad \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}g(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(\xi)}{x-\xi}\,d\xi.$$

Nach (7), (8), (9) einerseits, nach (1), (2) andererseits genügt $g(x)$ der linearen Differentialgleichung

$$(10)\qquad \mathfrak{L}[g(x)] = g^{(n+1)}(x) + c_0(x)g^{(n)}(x) + \cdots + c_n(x)g(x) = f(x).$$

Bekanntlich genügt dann $g(x)$ auch einer Integralgleichung

$$g(x) = \int_{-1}^{+1} G(x,t)\, f(t)\, dt \tag{11}$$

mit einer GREENschen Funktion $G(x,t)$.

Man kennt nun die Lösungen der Integralgleichung (9)[2]), es sind dies die Funktionen

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\, \frac{g^{(n+1)}(x)}{x-\xi}\, dx + \frac{\varphi_0}{\pi \sqrt{1-\xi^2}} \tag{12}$$

mit einer beliebigen Konstanten φ_0. Differenziert man (11) $(n+1)$-mal nach x und trägt das Ergebnis in (12) ein, so erhält man einen Ausdruck der Form (5). Dieser Grundgedanke ist nun im einzelnen durchzuführen.

Grundeigenschaften der Greenschen Funktion.

3. $G(x,t)$ genügt als Funktion von x der homogenen Differentialgleichung (10); sie ist samt ihren partiellen Ableitungen nach x bis zur $(n-1)$-ten Ordnung stetig, die n-te Ableitung macht an der Stelle $x = t$ einen Sprung von der Höhe -1, und von dieser Stelle abgesehen sind auch die n-te und $(n+1)$-te Ableitung stetig. Es ist demnach, wenn $h_0(x), \ldots, h_n(x)$ ein Lösungsfundamentalsystem der homogenen Gleichung (10) bezeichnet,

$$G(x,t) = \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu(x) r_\nu(t) + \begin{cases} 0 & \text{für } x < t \\ \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu(x)\, s_\nu(t) & \text{für } x > t \end{cases} \tag{13}$$

mit

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{(\mu)}(t)\, s_\nu(t) = 0 \quad \text{für } n > 0 \text{ und } \mu = 0, \ldots, n-1 \\ &\sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{(n)}(t)\, s_\nu(t) = 1. \end{aligned} \tag{14}$$

Aus diesen linearen Gleichungen lassen sich die $s_\nu(t)$ in eindeutiger Weise bestimmen, da die Determinante des Gleichungssystems die WRONSKIsche Determinante der $h_\nu(t)$ ist und demnach nicht verschwindet. Die Bestimmung der $r_\nu(t)$ ist weniger einfach und enthält den wesentlichen Teil der zu leistenden Konstruktionsarbeit.

---

[2]) Vgl. etwa FUCHS-HOPF-SEEWALD, Aerodynamik. Berlin 1935. Bd. 2, Kap. III, § 7. Ferner K. SCHRÖDER, Über eine Integralgleichung erster Art der Tragflügeltheorie. Sitz.-Ber. Preuß. Akad. Wiss., Math.-Phys. Kl. 1938, XXX. H. SÖHNGEN, Die Lösungen der Integralgleichung ... Math. Zeitschr. **45** (1939), S. 245.

Wie jedoch die $r_\nu(t)$ auch ausfallen, ist (11) eine Lösung der Differentialgleichung (10), man erhält nämlich durch Ableitung von (11) nach x

$$\frac{d^\mu}{dx^\mu} g(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} G(x,t)\, f(t)\, dt, \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, n) \tag{15}$$

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} g(x) = f(x) + \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} G(x,t)\, f(t)\, dt. \tag{16}$$

Multipliziert man die einzelnen Ableitungen von $g(x)$ mit den $c_\mu(x)$ und summiert, so entsteht (10).

Ansatz für den lösenden Kern der Integralgleichung.

4. Es wird nun in Verfolgung des in 2. geschilderten Programms der lösende Kern

$$\Lambda(\xi, t) + \varphi_0(t)\, \mathbf{N}(\xi) = \varphi(\xi, t)$$

in der Form

$$\varphi(\xi,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} G(x,t) \frac{dx}{x-\xi} + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-t^2}{1-\xi^2}} \frac{1}{t-\xi} + \frac{\varphi_0(t)}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} \tag{17}$$

angesetzt, wobei $\varphi_0(\xi)$ eine willkürliche Funktion ist. Dies ist wirklich ein lösender Kern von (1), falls die Gleichungen

$$\frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} G(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \Big(\frac{x^{n-\mu}}{(n-\mu)!}\, \gamma_0(\xi) + \cdots + \gamma_{n-\mu}(\xi) + \mathfrak{I}_{n-\mu}(x-\xi) \Big)\, \varphi(\xi,t)\, d\xi \tag{18}$$

für $\mu = 0, 1, \ldots, n$ bestehen. Zum Beweise multiplizieren wir (17) mit $f(t)$ und integrieren über t; es entsteht nach (16) bei Vertauschung der Integrationsreihenfolge, die noch zu rechtfertigen ist,

$$\varphi(\xi) = \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi,t)\, f(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} \frac{g^{(n+1)}(x)}{x-\xi}\, dx + \frac{\varphi_0}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}$$

mit

$$\varphi_0 = \int_{-1}^{+1} \varphi_0(t)\, f(t)\, dt,$$

und hieraus die Formel (9).

Aus (15) und (18) ergibt sich in gleicher Weise, bei ebenfalls noch zu rechtfertigender Vertauschung der Integrationsreihenfolge, die Formel (8). Aus (8) und (9) folgt aber (1) auf Grund von (10).

Beweis für die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge bei gewissen Integralen.

5. Es bleibt zunächst die Aufgabe, die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge in den Integralen

$$\mathfrak{J}_1 = \int_{-1}^{+1} f(t)\,dt \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} G(x,t)\,\frac{dx}{x-\xi} \tag{19}$$

und

$$\mathfrak{J}_2 = \int_{-1}^{+1} f(t)\,dt \int_{-1}^{+1} \Big(\frac{x^{n-\mu}}{(n-\mu)!}\,\gamma_0(\xi) + \cdots + \gamma_{n-\mu}(\xi) + \mathfrak{J}_{n-\mu}(x-\xi)\Big)\,\varphi(\xi,t)\,d\xi \quad (\mu = 0, 1, \ldots, n) \tag{20}$$

zu beweisen. Es ist

$$\mathfrak{J}_1 = \lim_{\eta \to 0} \mathfrak{J}_{1\eta}$$

mit

$$\mathfrak{J}_{1\eta} = \int_{-1}^{\xi-\eta} + \int_{\xi+\eta}^{+1} f(t)\,dt \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} G(x,t)\,\frac{dx}{x-\xi}.$$

Hier schreiben wir

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} G(x,t) = \Big(\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} G(x,t) - \frac{\partial^{n+1}}{\partial \xi^{n+1}} G(\xi,t)\Big) + \frac{\partial^{n+1}}{\partial \xi^{n+1}} G(\xi,t),$$

entsprechend spaltet sich das Integral $\mathfrak{J}_{1\eta}$ in eine Summe zweier Integrale auf, deren erstes einen überall endlichen Integranden hat, während das zweite sich als Produkt eines Integrals über t und eines Integrals über x schreiben läßt. In beiden Integralen ist die Integrationsreihenfolge also vertauschbar, und es wird

$$\mathfrak{J}_{1\eta} = \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,F(x,\eta,\xi)\,\frac{dx}{x-\xi} \tag{21}$$

mit

$$F(x,\eta,\xi) = \int_{-1}^{\xi-\eta} + \int_{\xi+\eta}^{+1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} G(x,t)\,f(t)\,dt.$$

Wegen der Beschränktheit des Integranden gilt nun erstens gleichmäßig in x und ξ

$$\lim_{\eta \to 0} F(x,\eta,\xi) = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} G(x,t)\,f(t)\,dt; \tag{22}$$

zweitens besitzt $F(x, \eta, \xi)$ eine partielle Ableitung nach x, nämlich

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, \eta, \xi) = \int_{-1}^{\xi-\eta} + \int_{\xi+\eta}^{+1} \frac{\partial^{n+2}}{\partial x^{n+2}} G(x, t) f(t)\, dt + \begin{cases} 0 & \text{für } |x-\xi| < \eta \\ f(x) \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} G(x, t) \Big|_{t=x-0}^{t=x+0} & \text{für } |x-\xi| > \eta \end{cases}.$$

Hiernach existiert eine von x, ξ und η unabhängige Konstante C so, daß

$$\left| \frac{F(x, \eta, \xi) - F(\xi, \eta, \xi)}{x - \xi} \right| < C \tag{23}$$

ist. Schließlich existiert wegen (22) für jedes $\varepsilon > 0$ gleichmäßig in x und ξ für $|x - \xi| > \varepsilon$ der Grenzwert

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{F(x, \eta, \xi) - F(\xi, \eta, \xi)}{x - \xi} = E(x, \xi) \tag{24}$$

und stellt eine über das ganze Intervall integrierbare Funktion von x dar.

Nach diesen Vorbereitungen kann endlich die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge in (19) gezeigt werden.

Es ist nach (21)

$$\mathfrak{J}_{1\eta} = \int_{-1}^{\xi-\varepsilon} + \int_{\xi+\varepsilon}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} \frac{F(x, \eta, \xi) - F(\xi, \eta, \xi)}{x - \xi}\, dx + F(\xi, \eta, \xi) \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} \frac{dx}{x-\xi} + C_\eta(\varepsilon),$$

wobei $C_\eta(\varepsilon)$ nach (23) gleichmäßig in ξ und η mit ε gegen 0 strebt:

$$|C_\eta(\varepsilon)| < \varepsilon \cdot 2 \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\, C.$$

Wegen der gleichmäßigen Existenz der Grenzwerte (22) und (24) gilt somit

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1 = \lim_{\eta \to 0} \mathfrak{J}_{1\eta} &= \int_{-1}^{\xi-\varepsilon} + \int_{\xi+\varepsilon}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} E(x, \xi)\, dx \\ &+ \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial \xi^{n+1}} G(\xi, t) f(t)\, dt \cdot \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} \frac{dx}{x-\xi} \\ &+ \lim_{\eta \to 0} C_\eta(\varepsilon) \\ &= \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} E(x, \xi)\, dx \\ &+ \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial \xi^{n+1}} G(\xi, t) f(t)\, dt \cdot \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} \frac{dx}{x-\xi} + D(\varepsilon), \end{aligned}$$

wobei $D(\varepsilon)$ ebenso wie $C_\eta(\varepsilon)$ gleichmäßig in ξ gegen 0 strebt. $D(\varepsilon)$ muß aber nunmehr verschwinden, da alle übrigen Terme dieser Gleichung von ε nicht abhängen. Führt man hierin den Wert (24) von $E(x, \xi)$ unter Beachtung von (22) ein, so erhält man die Behauptung.

6. Einfacher läßt sich das Integral (20) behandeln. $\varphi(\xi, t)$ wird nach (17) durch seine 3 Summanden ersetzt. Für den letzten ist nichts zu beweisen. Der erste Summand besitzt logarithmische Singularitäten für $\xi = t$, die von der Sprungstelle von $\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} G(x, t)$ herrühren, sowie an den Intervallenden schwache algebraische Singularitäten, die eine absolute Integrierbarkeit nicht verhindern. Für den ersten Summanden von $\varphi(\xi, t)$ ist also nichts mehr zu beweisen.

Es bleibt damit übrig, die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge für

$$\mathfrak{J}_3 = \int_{-1}^{+1} f(t)\,dt \int_{-1}^{+1} \left(\frac{x^{n-\mu}}{(n-\mu)!}\gamma_0(\xi) + \cdots + \gamma_{n-\mu}(\xi) + \mathfrak{J}_{n-\mu}(x-\xi) \right) \sqrt{\frac{1-t^2}{1-\xi^2}} \frac{d\xi}{t-\xi}$$

zu beweisen. Wir ersetzen dazu $f(t) \cdot \sqrt{1-t^2}$ durch $f(t)$ und schreiben

$$\overline{f}(\xi) = \left(\frac{x^{n-\mu}}{(n-\mu)!}\gamma_0(\xi) + \cdots + \gamma_{n-\mu}(\xi) + \mathfrak{J}_{n-\mu}(x-\xi) \right) \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}},$$

haben also die Identität von

$$\mathfrak{J}_3 = \int_{-1}^{+1} f(t)\,dt \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{t-\varepsilon} + \int_{t+\varepsilon}^{+1} \overline{f}(\xi) \frac{d\xi}{t-\xi}$$

mit

$$\mathfrak{J}_3^* = \int_{-1}^{+1} \overline{f}(\xi)\,d\xi \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{\xi-\varepsilon} + \int_{\xi+\varepsilon}^{+1} f(t) \frac{dt}{t-\xi}$$

nachzuweisen. Vor dem Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ ist die Differenz beider Integrale von der Größenordnung $\varepsilon \ln \varepsilon \cdot f(t)\,\overline{f}(\xi)$. Für verschwindendes ε strebt diese Differenz mithin gegen 0, was zu beweisen war.

Festlegung der Nebenbedingungen für die Greensche Funktion.

7. Nach 4. besteht die Aufgabe, der Funktion $G(x, t)$ solche Nebenbedingungen aufzuerlegen, daß die Gleichungen (18) bestehen. Diese Nebenbedingungen entsprechen den Randbedingungen bei Differentialgleichungsproblemen. (18) wird $n + 1$ Bedingungsgleichungen ergeben, aus denen sich die Funktionen $r_\tau(t)$ in (13) in eindeutiger Weise bestimmen lassen.

Wir beginnen bei der Herstellung der Gleichungen (18) mit $\mu = n$ und gehen dazu von dem Ansatz (13) aus. Es werde

$$\psi_\nu(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} \frac{h_\nu^{(n+1)}(x)}{x-\xi} \, dx \tag{25}$$

gesetzt. Dann ist auf Grund des erwähnten Zusammenhanges zwischen den Integralgleichungen (9) und (12)

$$h_\nu^{(n+1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\psi_\nu(\xi)}{x-\xi} \, d\xi.$$

Man darf unter dem Integralzeichen nach x integrieren und erhält

$$h_\nu^{(n)}(x) + k_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \ln|x-\xi| \, \psi_\nu(\xi) \, d\xi \tag{26}$$

mit einer Konstanten k_ν. Weiterhin werde

$$h_\nu(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < t \\ h_\nu(x) & \text{für } x > t \end{cases} \tag{27}$$

und

$$\psi_\nu(\xi,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} \frac{\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} h_\nu(x,t)}{x-\xi} \, dx \tag{28}$$

gesetzt. Dann gilt in analoger Weise mit einer von x nicht abhängigen Funktion

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} h_\nu(x,t) + k_\nu(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \ln|x-\xi| \, \psi_\nu(\xi,t) \, d\xi. \tag{29}$$

Eine explizite Berechnung der k_ν und $k_\nu(t)$ folgt an späterer Stelle (Abschnitt 10), damit hier der Gedankengang nicht unterbrochen wird.

Wir brauchen schließlich die Formeln

$$a(x,t) = \int_{-1}^{+1} \frac{\ln|x-\xi|}{\sqrt{1-\xi^2}\,(t-\xi)} \, d\xi = 0 \tag{30}$$

und

$$-\pi \ln 2 = \int_{-1}^{+1} \frac{\ln|x-\xi|}{\sqrt{1-\xi^2}} \, d\xi. \tag{31}$$

Zur Herleitung des Wertes des Integrals (31) beachte man, daß es durch Integration der aus (9) und (12) folgenden Identität

$$0 = \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,(x-\xi)}$$

nach x entsteht und demnach eine Konstante darstellt. Setzt man $x = 0$, $\xi = \cos\zeta$, so läßt sich (31) sehr leicht beweisen.

Zum Beweise von (30) wird zunächst

$$A(x,t) = \int_0^x a(x,t)\,dx = \int_{-1}^{+1} \frac{(x-\xi)\,(\ln|x-\xi|-1)}{\sqrt{1-\xi^2}\,(t-\xi)}\,d\xi$$

gebildet und hierin die Identität

$$\frac{x-\xi}{t-\xi} = 1 + \frac{x-t}{t-\xi}$$

angewendet. Man erhält dann

$$A(x,t) = -\pi(1+\ln 2) + (x-t)\int_{-1}^{+1} \frac{\ln|x-\xi|}{\sqrt{1-\xi^2}\,(t-\xi)}\,d\xi + (x-t)\int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,(t-\xi)};$$

das letzte Integral ist 0, also

$$A(x,t) = -\pi(1+\ln 2) + (x-t)\frac{\partial}{\partial x}A(x,t).$$

Es hängt demnach $a(x,t)$ von x nicht ab.

Es ist nun andererseits

$$a(x,t) = \ln x \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,(1-\xi)} + \int_{-1}^{+1} \frac{\ln\left|1-\frac{\xi}{x}\right|}{\sqrt{1-\xi^2}\,(t-\xi)}\,d\xi = \int_{-1}^{+1} \frac{\ln\left|1-\frac{\xi}{x}\right|}{\sqrt{1-\xi^2}\,(t-\xi)}\,d\xi;$$

dieser Ausdruck wird mit wachsendem x immer kleiner. Da er aber von x nicht abhängt, verschwindet er identisch, wie zu beweisen war.

Nach (13), (17) und (25) bis (31) ergibt sich nun

$$(32)\quad \varphi(\xi,t) = \sum_{\nu=0}^{n} \left(\psi_\nu(\xi) r_\nu(t) + \psi_\nu(\xi,t) s_\nu(t)\right) + \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\xi^2}}\,\frac{1}{t-\xi} + \frac{\varphi_0(t)}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}$$

und

$$(33)\quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \ln|x-\xi|\,\varphi(\xi,t)d\xi = \frac{\partial^n}{\partial x^n}G(x,t) + \sum_{\nu=0}^{n}\left(k_\nu r_\nu(t) + k_\nu(t)s_\nu(t)\right) - \varphi_0(t)\frac{\ln 2}{\pi}.$$

Die letzte der Gleichungen (18) ($\mu = n$) verlangt nach (33) also

$$(34)\quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \gamma_0(\xi)\varphi(\xi,t)d\xi = -\sum_{\nu=0}^{n}\left(k_\nu r_\nu(t) + k_\nu(t)s_\nu(t)\right) + \varphi_0(t)\frac{\ln 2}{\pi}.$$

Gilt (34), so integriere man die nunmehr gültige letzte Gleichung (18) nach x von 0 bis x und erhält die vorletzte

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\left(x\,\gamma_0(\xi) + \gamma_1(\xi) + \mathfrak{I}_1(x-\xi)\right)\varphi(\xi,t)d\xi = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(x,t),$$

wofern

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\left(\gamma_1(\xi) + \mathfrak{I}_1(\xi)\right)\varphi(\xi,t)dt = \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(x,t)\right]_{x=0}$$

ist. Dieses Verfahren wird nacheinander n-mal fortgesetzt, und man hat neben (34) die n Gleichungen

$$(35)\quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\left(\gamma_\mu(\xi) + \mathfrak{I}_\mu(\xi)\right)\varphi(\xi,t)dt = \left[\frac{\partial^{n-\mu}}{\partial x^{n-\mu}}G(x,t)\right]_{x=0} \quad (\mu = 1,\ldots,n)$$

zu erfüllen. Das sind zusammen $n+1$ lineare inhomogene Gleichungen für die $n+1$ noch unbekannten Funktionen $r_\nu(t)$.

Bestimmung der Funktionen $r_\nu(t)$. Existenzfragen.

8. Eine explizite Bestimmung der $r_\nu(t)$ kann natürlich nur in Spezialfällen durchgeführt werden, wo die Funktionen $c_\mu(x)$, $\gamma_\mu(\xi)$ bekannt sind. Jedoch können noch die Gleichungen (34), (35) in eine übersichtlichere Form gebracht und ihre Lösbarkeit im allgemeinen Falle erörtert werden.

Die Integrale auf der linken Seite von (34) und (35) haben die Form

$$(36)\quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\left(\gamma_\mu(\xi) + \mathfrak{I}_\mu(\xi)\right)\varphi(\xi,t)d\xi = \sum_{\nu=0}^{n}\left(\varrho_{\mu\nu}\cdot r_\nu(t) + \varrho_{\mu\nu}(t)s_\nu(t)\right) + \sigma_\mu(t) + \sigma_\mu\cdot\varphi_0(t) \quad (\mu = 0,\ldots,n)$$

mit

$$\varrho_{\mu\nu} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}(\gamma_\mu(\xi)+\Im_\mu(\xi))\,d\xi\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{h_\nu^{(n+1)}(x)}{x-\xi}\,dx,$$

$$\varrho_{\mu\nu}(t) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}(\gamma_\mu(\xi)+\Im_\mu(\xi))\,d\xi\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}h_\nu(x,t)\,\frac{dx}{x-\xi},$$

(37)

$$\sigma_\mu(t) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\xi^2}}\,\frac{\gamma_\mu(\xi)+\Im_\mu(\xi)}{t-\xi}\,d\xi.$$

$$\sigma_\mu = \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}\frac{\gamma_\mu(\xi)+\Im_\mu(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\,d\xi,$$

wobei für $\mu = 0$ das $\Im_0(\xi)$ auszulassen ist.

Die rechten Seiten von (35) haben die Form

$$(38)\qquad -\sum_{\nu=0}^{n}\left[h_\nu^{(n-\mu)}(0)r_\nu(t)+\begin{cases}0 & \text{für } t>0\\ h_\nu^{(n-\mu)}(0)s_\nu(t) & \text{für } t<0\end{cases}\right]$$

$$(\mu = 1,\ldots,n).$$

Die Funktionen (37) und die von $r_\nu(t)$ freien Glieder in (38) sind sämtlich stetige, allerdings teilweise nur stückweise stetig differenzierbare Funktionen, wie man leicht unter Benutzung von (14) und (27) nachweist.

Mit dem System der $r_\nu(t)$ als Zeilenvektor kann man (34) und (35) in der symbolischen Form

$$(39)\qquad \mathfrak{r}(t)\mathfrak{R} = \mathfrak{u}(t) + \varphi_0(t)\cdot\mathfrak{v}$$

anschreiben, wobei $\mathfrak{R}$ eine konstante Matrix, $\mathfrak{v}$ ein konstanter Vektor und $\mathfrak{u}(t)$ ein Vektor aus stetigen Funktionen von t ist.

Besitzt $\mathfrak{R}$ eine Inverse, so ist (39) eindeutig auflösbar, und die Lösung hat die Form

$$\mathfrak{r}(t) = \mathfrak{l}(t) + \varphi_0(t)\mathfrak{n}.$$

Nunmehr ist $G(x,t)$ vollständig definiert und damit auch

$$\varphi(\xi,t) = \mathbf{\Lambda}(\xi,t) + \varphi_0(t)\,\mathbf{N}(\xi).$$

Wie man sieht, ist neben $\mathbf{\Lambda}(\xi,t)$ auch $\mathbf{N}(\xi)$ eindeutig bestimmt. In diesem Falle besitzt (1) für jedes stetig differenzierbare $f(t)$ die Lösung (5), es gibt im wesentlichen eine einzige Lösung der zu (1) gehörigen homogenen Gleichung (6) und jede Lösung von (1) entsteht aus einer festen durch Addition von Vielfachen der Lösung von (6).

9. Die einzige wesentliche Schwierigkeit bei der numerischen Berechnung des lösenden Kerns (17) von (1) liegt in der Bestimmung der $r_\nu(t)$. Da man aber nicht den lösenden Kern, sondern für ein jeweils gegebenes $f(x)$ nur die Funktion $\varphi(\xi)$ sucht, genügt es, wenn man die Konstanten

$$r_\nu[f] = \int_{-1}^{+1} r_\nu(t)\, f(t)\, dt \tag{40}$$

berechnet. Setzt man nämlich diese an Stelle der $r_\nu(t)$ in (17) ein, so bekommt man die Lösung $\varphi(\xi)$ von (1). Führt man noch die Abkürzungen

$$\varrho_\mu[f] = \sum_{\nu=0}^{n} \int_{-1}^{+1} \varrho_{\mu\nu}(t) s_\nu(t) f(t) dt, \tag{41}$$

$$k[f] = \sum_{\nu=0}^{n} k_\nu(t) s_\nu(t) f(t) dt, \tag{42}$$

$$\sigma_\mu[f] = \int_{-1}^{+1} \sigma_\mu(t) f(t) dt \tag{43}$$

ein, so ist es das Gleichungssystem

$$\begin{gathered}\sum_{\nu=0}^{n} (\varrho_{0\nu} + k_\nu)\, r_\nu[f] = -\sigma_0[f] - k[f] + \varphi_0 \cdot \left(\frac{\ln 2}{\pi} - \sigma_0\right) \\ \sum_{\nu=0}^{n} (\varrho_{\mu\nu} + h_\nu^{(n-\mu)}(0)) r_\nu[f] = -\sigma_\mu[f] - \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{(n-\mu)}(0) \int_{-1}^{0} s_\nu(t) f(t) dt - \varphi_0 \cdot \sigma_\mu\end{gathered} \tag{44}$$

mit derselben Koeffizientenmatrix $\mathfrak{R}$ wie (39), das man aufzulösen hat, was im Einzelfall keine Schwierigkeiten mehr bereitet.

Berechnung der k_ν und $k_\nu(t)$.

10. Es wird gesetzt

$$\Psi_\nu(\xi) = \int_{-1}^{\xi} \psi_\nu(\xi)\, d\xi; \tag{45}$$

dann ist $\Psi_\nu(-1) = 0$ und

$$\Psi_\nu(1) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}\, h_\nu^{(n+1)}(x)}{x-\xi}\, dx.$$

Hier darf auf Grund einer zu 6. völlig analogen Überlegung die Integrationsreihenfolge vertauscht werden, und man erhält

$$\Psi_\nu(1) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}\, h_\nu^{(n+1)}(x)\, dx \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,(x-\xi)} = 0.$$

Durch partielle Integration wird nun

$$\int_{-1}^{+1} \ln|x-\xi|\,\psi_\nu(\xi)\,d\xi = \ln|x-\xi|\,\Psi_\nu(\xi)\Big|_{\xi=-1}^{\xi=+1} + \int_{-1}^{+1} \frac{\Psi_\nu(\xi)}{x-\xi}\,d\xi$$

$$= \int_{-1}^{+1} \frac{\Psi_\nu(\xi)}{x-\xi}\,d\xi,$$

also nach (26)

$$h_\nu^{(n)}(x) + k_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\Psi_\nu(\xi)}{x-\xi}\,d\xi.$$

Auf Grund des Zusammenhanges zwischen den Integralgleichungen (9) und (12) ist jetzt

$$\Psi_\nu(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{h_\nu^{(n)}(x)+k_\nu}{x-\xi}\,dx + \frac{k_\nu'}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} \tag{46}$$

mit einer weiteren Konstanten k_ν'. Diese Formel wird nun nach ξ differenziert und das Ergebnis mit (25) unter Benutzung von (45) verglichen. Zur Bildung der Ableitung von (46) ist zu benutzen:

$$\frac{d}{d\xi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}\,(h_\nu^{(n)}(x)+k_\nu)}{x-\xi}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}\,(h_\nu^{(n)}(x)+k_\nu)}{x-\xi}\Big|_{x=\xi+\varepsilon}^{x=\xi-\varepsilon}$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{\xi-\varepsilon} + \int_{\xi+\varepsilon}^{+1} \sqrt{1-x^2}\,(h_\nu^{(n)}(x)+k_\nu)\frac{dx}{(x-\xi)^2};$$

das wird nach partieller Integration

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}\,(h_\nu^{(n)}(x)+k_\nu)}{x-\xi}\Big|_{x=-1}^{x=+1} + \int_{-1}^{+1}\frac{\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}\,(h_\nu^{(n)}(x)+k_\nu)}{x-\xi}\,dx,$$

wobei der erste Summand verschwindet. Man erhält somit

$$\Psi_\nu'(\xi) = \frac{\xi}{\pi\sqrt{(1-\xi^2)^3}}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-x^2}\,(h_\nu^{(n)}(x)+k_\nu)}{x-\xi}\,dx + \frac{k_\nu'\xi}{\pi\sqrt{(1-\xi^2)^3}} +$$

$$+ \frac{1}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-x^2}\,h_\nu^{(n+1)}(x)}{x-\xi}\,dx - \frac{1}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\int_{-1}^{+1}\frac{x\,(h_\nu^{(n)}(x)+k_\nu)}{\sqrt{1-x^2}\,(x-\xi)}\,dx$$

$$= \psi_\nu(\xi) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-x^2}\,h_\nu^{(n+1)}(x)}{x-\xi}\,dx.$$

Es folgt hieraus

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(\xi(1-x^2)-x(1-\xi^2))(h_\nu^{(n)}(x)+k_\nu)}{\sqrt{1-x^2}(x-\xi)}\,dx + \frac{k_\nu'}{\pi}\xi = 0,$$

also

$$k_\nu = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{h_\nu^{(n)}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx; \tag{47}$$

der Wert von k_ν' interessiert nicht.

Die gleichen Rechnungen lassen sich mit der unstetigen Funktion (27) an Stelle von $h_\nu(x)$ durchführen, und man erhält

$$k_\nu(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{t}^{1} \frac{h_\nu^{(n)}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx. \tag{48}$$

Entartete Kerne.

11. In (2) wird

$$c_\nu(x) = p^{\nu+1}c_\nu^*(x), \quad \gamma_\nu(\xi) = p^{-\nu-1}\gamma_\nu^*(\xi) \tag{49}$$

gesetzt, mit der Absicht, später zur Grenze $p = 0$ überzugehen. Der Kern L geht bei diesem Grenzprozeß in einen Kern L^* über, der von logarithmischen Bestandteilen frei ist. Wir wollen zeigen, daß auch $\mathsf{\Lambda}$ und N Grenzwerte $\mathsf{\Lambda}^*$ und N^* besitzen, die mit L^* in derselben Beziehung stehen wie $\mathsf{\Lambda}$ und N mit L.

Wir bedienen uns dabei der folgenden Schreibweise: Eine Formel, die aus einer Formel (m) durch den beschriebenen Grenzübergang entsteht, wird mit (m^*) beziffert. Eine Größe $P(x, \xi)$, die hierbei gleichmäßig in x, ξ und p beschränkt bleibt, wird

$$P(x, \xi) = O(p)$$

geschrieben. Die Formel

$$L(x,\xi) = \frac{1}{x-\xi} + \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu^*(x)\,\gamma_\nu^*(\xi) + pO(p) \tag{2*}$$

$$= L^*(x,\xi) + pO(p)$$

fällt zwar nicht unter diese Abmachung, sie darf jedoch mit Rücksicht auf die schwache, die Integrierbarkeit nicht störende Unendlichkeitsstelle des Logarithmus ausnahmsweise zugelassen werden.

Das Lösungsfundamentalsystem $h_\nu(x)$ der zu (10) gehörigen homogenen linearen Differentialgleichung werde durch die Zusatzbedingungen

$$h_\nu^{(\mu)}(0) = \begin{cases} p^{n-\mu} & \text{für } \mu = n - \nu \\ 0 & \text{für } \mu \neq n - \nu \end{cases}$$

präzisiert. Setzt man

$$h_\nu(x) = l_\nu(y), \quad y = px, \tag{50}$$

so gilt

$$l_\nu^{(n+1)}(y) + c_0^*(x)\, l_\nu^{(n)}(y) + \cdots + c_n^*(x)\, l_\nu(y) = 0, \tag{51}$$

$$l_\nu^{(\mu)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = n - \nu \\ 0 & \text{für } \mu \neq n - \nu \end{cases}. \tag{52}$$

Es gilt das Verhalten der $l_\nu^{(\mu)}(y)$ für kleine p zu untersuchen. Dazu seien zunächst $\bar{l}_\nu(y)$ Funktionen, die den Differentialgleichungen

$$\bar{l}_\nu^{(n+1)}(y) = \bar{c}_0 \bar{l}_\nu^{(n)}(y) + \cdots + \bar{c}_n \bar{l}_\nu(y)$$

und denselben Anfangsbedingungen (52) wie die $l_\nu(y)$ genügen; dabei soll

$$\bar{c}_\nu = \mathrm{Max}\,|c_\nu^*(x)|$$

für $-1 \leqq x \leqq 1$ sein. Dann ist für x in diesem Intervall

$$|l_\nu^{(\mu)}(y)| \leqq \bar{l}_\nu^{(\mu)}(y) = O(p) \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, n+1). \tag{53}$$

Jetzt gilt

$$l_\nu^{(\mu)}(y) = l_\nu^{(\mu)}(0) + px\, l_\nu^{(\mu+1)}(\vartheta_{\nu\mu} y) \qquad (\mu = 0, \ldots, n)$$

mit Zahlen $0 \leqq \vartheta_{\nu\mu} \leqq 1$. Das ergibt nach (52) und (53)

$$l_\nu^{(\mu)}(y) = \left.\begin{cases} 1 & \text{für } \mu = n - \nu \\ 0 & \text{für } \mu \neq n - \nu \end{cases}\right\} + pO(p) \quad (\mu = 0, \ldots, n). \tag{54}$$

(54) in (51) eingesetzt, liefert sodann

$$l_\nu^{(n+1)}(y) = -c_\nu^*(x) + p\lambda_\nu(x) \tag{55}$$

mit

$$\lambda_\nu(x) = O(p), \quad \frac{d}{dx}\lambda_\nu(x) = O(p), \tag{56}$$

wovon die zweite Behauptung noch zu beweisen ist.

Wir beachten dazu, daß die $h_\nu^{(\mu)}(x)$ analytische ganze Funktionen von p sind. Die $l_\nu^{(\mu)}(y)$ entstehen aus ihnen durch Division durch p^μ; da diese letzteren wegen (53) für $p = 0$ endlich bleiben, sind sie auch analytische ganze Funktionen von p. Es ist speziell also

$$l_\nu^{(n+1)}(y) = -c_\nu^*(x) + p\alpha_1(x) + p^2\alpha_2(x) + \cdots,$$

woraus sich durch Integration über den Einheitskreis

$$\alpha_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{l_\nu^{(n+1)}(y)}{p^{\nu+1}}\,dp$$

ergibt. Da die $c_\nu(x)$ voraussetzungsgemäß nach x stetig differenzierbar sind, folgt aus dieser Gleichung auch die stetige Differenzierbarkeit der $\alpha_\nu(x)$. Nunmehr ergibt sich die zweite Behauptung (56) auch.

Jetzt ist der lösende Kern für (2*) verhältnismäßig leicht berechnet. Zunächst folgt aus (14), (50) und (54)

$$(14^*) \qquad s_\nu(t) = p^{-n}O(p).$$

Sodann aus (47), (48), (50) und (54)

$$(47^*) \qquad k_\nu = \left\{\begin{matrix} -p^n & \text{für } \nu = 0 \\ 0 & \text{für } \nu > 0 \end{matrix}\right\} + p^{n+1}O(p),$$

$$(48^*) \qquad k_\nu(t) = p^n O(p).$$

Ferner aus (37), (49), (50), (55) und (56), unter eventueller Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$(37^*)_1 \qquad \varrho_{\mu\nu} = -p^{n-\mu}\cdot\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}\int \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{\gamma_\mu^*(\xi)\,c_\nu^*(x)}{x-\xi}\,dx\,d\xi + p^{n-\mu+1}O(p)$$

$$= p^{n-\mu}\cdot\varrho_{\mu\nu}^* + p^{n-\mu+1}O(p),$$

$$(37^*)_2 \qquad \varrho_{\mu\nu}(t) = -p^{n-\mu}\cdot\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}\gamma_\mu^*(\xi)\,d\xi\int_t^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{c_\nu^*(x)}{x-\xi}\,dx + p^{n-\mu+1}O(p)$$

$$= p^{n-\mu}\varrho_{\mu\nu}^*(t) + p^{n-\mu+1}O(p),$$

$$(37^*)_3 \qquad \sigma_\mu(t) = p^{-\mu-1}\cdot\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\xi^2}}\,\frac{\gamma_\mu^*(\xi)}{t-\xi}\,d\xi + p^{-\mu}O(p)$$

$$= p^{-\mu-1}\cdot\sigma_\mu^*(t) + p^{-\mu}O(p),$$

$$(37^*)_4 \qquad \sigma_\mu = p^{-\mu-1}\cdot\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}\frac{\gamma_\mu^*(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\,d\xi + p^{-\mu}O(p)$$

$$= p^{-\mu-1}\cdot\sigma_\mu^* + p^{-\mu}O(p).$$

Nun aus (34), (35), (14*), (47*), (48*), (37*)

$$(57) \qquad r_\nu(t) = p^{-n-1}\cdot r_\nu^*(t) + p^{-n}O(p),$$

wobei die $r_\nu^*(t)$ den linearen Gleichungen

$$\sum_{\nu=0}^{n} \varrho_{0\nu}^* r_\nu^*(t) + \sigma_0^*(t) + \varphi_0(t) \cdot \sigma_0^* = r_0^*(t) \tag{34*}$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} \varrho_{\mu\nu}^* r_\nu^*(t) + \sigma_\mu^*(t) + \varphi_0(t) \cdot \sigma_\mu^* = r_\mu^*(t) \tag{35*}$$

genügen. (34*) ist als Spezialfall in (35*) enthalten, aber nicht (34) in (35).

Der lösende Kern wird jetzt endlich nach (13), (17), (50), (55), (56), (14*), (57)

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, t) = &- \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{n} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\, c_\nu^*(x)\, r_\nu^*(t)\, \frac{dx}{x-\xi} \\ &+ \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-t^2}{1-\xi^2}}\, \frac{1}{t-\xi} + \frac{\varphi_0(t)}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} + pO(p) \\ &= \varphi^*(\xi, t) + pO(p). \end{aligned} \tag{17*}$$

Wie die Formeln (2*) und (17*) zeigen, ist der Grenzübergang $p \to 0$ durchführbar, ohne daß dadurch die Beziehung gestört würde, daß (17*) der allgemeinste lösende Kern von (2*) ist. Ist nämlich $f(x)$ irgendeine stetig differenzierbare Funktion, so gilt für

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi, t)\, f(t)\, dt &= \int_{-1}^{+1} \varphi^*(\xi, t)\, f(t)\, dt + pO(p) \\ &= \varphi^*(\xi) + pO(p) \end{aligned}$$

die Integralgleichung

$$\int_{-1}^{+1} L^*(x, \xi)\, \varphi^*(\xi)\, d\xi = f(x) + pO(p).$$

Daß (17*) ein lösender Kern von (2*) ist (bei $p = 0$), kann man selbstverständlich viel einfacher nachweisen, indem man nur (37*), (34*), (35*) und den Zusammenhang zwischen den Integralgleichungen (9) und (12) ausnutzt. Jedoch würde man dann keine Aussage über die Größe des Fehlergliedes bei dem Grenzübergang erhalten.

Die Bemerkungen des 9. Abschnitts zur numerischen Auflösung einer Integralgleichung (1) gelten für Kerne (2*) in gleicher Weise.

Hilfsformeln für die praktische Rechnung bei speziellen Differenzkernen.

12. Es soll jetzt einmal zunächst untersucht werden, was für Differenzkerne $L(x, \xi) = L(x - \xi)$ überhaupt in eine Reihe (2) mit eventuell unendlicher Gliederzahl entwickelt werden können. Wir setzen dazu

$$x - \xi = w.$$

Es werde ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, daß

$$\lim_{\xi \to x} (x - \xi) L(x - \xi) = 1$$

ist. Nun werden die Konstanten c_0, α_0 so bestimmt, daß

$$L(w) - \frac{1}{w} - c_0 \ln |w| - \alpha_0 = L_1(w)$$

für $w = 0$ verschwindet. Dann c_1, α_1 so, daß

$$L_1'(w) - c_1 \ln |w| - \alpha_1 = L_2(w)$$

für $w = 0$ verschwindet, und so fort.

Es ist dann nach (3)

$$(58) \qquad L(w) = \frac{1}{w} + c_0 \mathfrak{I}_0(w) + \alpha_0 + c_1 \mathfrak{I}_1(w) + \alpha_1 w + \cdots + c_n \mathfrak{I}_n(w) + \frac{1}{n!} \alpha_n w^n + \int_0^w \cdots \int_0^w L_n(w)\, dw^n.$$

Mindestens einmal sei $c_n \neq 0$; dann ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha_n &= c_n \beta_0, \\ \alpha_{n-1} &= c_n \beta_1 + c_{n-1} \beta_0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_0 &= c_n \beta_n + c_{n-1} \beta_{n-1} + \cdots + c_0 \beta_0 \end{aligned}$$

nach den β_ν auflösbar, und (58) läßt sich in der Form

$$\begin{aligned} L(w) = \frac{1}{w} &+ c_0(\beta_0 + \mathfrak{I}_0(w)) + c_1(\beta_0 w + \beta_1 + \mathfrak{I}_1(w)) + \cdots \\ &+ c_n\left(\frac{1}{n!} \beta_0 w^n + \frac{1}{(n-1)!} \beta_1 w^{n-1} + \cdots + \beta_n + \mathfrak{I}_n(w)\right) \\ &+ \int_0^w \cdots \int_0^w L_n(w)\, dw^n \end{aligned}$$

schreiben. Das Restglied in dieser Formel ist

$$\left| \int_0^w \cdots \int_0^w L_n(w)\, dw^n \right| \leqq \frac{w^n}{n!} \, | L_n(w)|,$$

es strebt mit wachsendem n für alle w gegen 0, wenn nicht gleichzeitig $f_n(w)$ allzu stark anwächst.

In dieser Form lassen sich also alle Funktionen

$$L(w) = \frac{1}{w} + L_1(w) + \ln |w| \cdot L_2(w)$$

entwickeln, wobei entweder L_1 und L_2 Polynome sind, von denen L_1 nicht den größeren Grad hat, oder L_1 und L_2 in einem Kreise $|w| < \varrho < 2$ reguläre analytische nicht ganze rationale Funktionen. Speziell die Hankelsche Funktion $H_1^{(2)}(w)$ hat diese Eigenschaft.

Führt man wieder $x - \xi$ an Stelle von w ein, so geht (59) bei Vernachlässigung des Restes in (2) über, wenn man noch setzt:

$$c_\mu(x) = c_\mu, \quad \gamma_\mu(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\mu} \frac{(-\xi)^{\mu-\nu}}{(\mu-\nu)!}\beta_\nu. \tag{60}$$

13. Bei solchermaßen spezialisierten Kernen läßt sich die Aufstellung des Gleichungssystems (44) zum großen Teil explizit leisten, wozu wir nunmehr übergehen. Formeln, die aus einer allgemeinen Formel (m) entstehen, schreiben wir zur leichteren Rückorientierung (m_1), (m_2) usw.

Zunächst stellen wir fest, daß

$$h_\nu(x) = e^{\lambda_\nu x} \tag{61}$$

ein Lösungsfundamentalsystem der zu (10) gehörigen homogenen Differentialgleichung ist. Dabei sind die λ_ν die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$p(\lambda_\nu) = \lambda_\nu^{n+1} + c_0\lambda_\nu^n + \cdots + c_n = 0;$$

wir wollen den einfacheren Fall voraussetzen, daß sie alle untereinander verschieden sind. Man rechnet leicht nach:

$$s_\nu(t) = e^{-\lambda_\nu t} \prod_{\mu \neq \nu} \frac{1}{\lambda_\mu - \lambda_\nu} = \frac{(-1)^{n-1}}{p'(\lambda_\nu)} e^{-\lambda_\nu t}. \tag{14_1}$$

Ferner

$$k_\nu = -\lambda_\nu^n J_0(i\lambda_\nu), \tag{47_1}$$

wobei J_0 die nullte Besselsche Funktion bezeichnet.

Die Größen $\varrho_{\mu\nu}$ in (37) sind lineare homogene Integralformen, was durch die Schreibweise

$$\varrho_{\mu\nu} = \mathsf{P}[\gamma_\mu(\xi) + \mathfrak{I}_\mu(\xi),\ h_\nu^{(n+1)}(x)]$$

zum Ausdruck kommen soll.

Sie lassen sich mittels der speziellen Integralformen

$$\mathsf{P}[\cos\varrho\zeta,\ e^{\lambda x}], \quad \mathsf{P}[\xi^\varrho \ln|\xi|,\ e^{\lambda x}] \quad (\cos\zeta = \xi,\ \varrho = 0, 1, 2, \ldots)$$

linear zusammensetzen. Diese letzteren sind jetzt zu berechnen.

Verwendet man die bekannte Identität[2])

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\cos\varrho\zeta}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{d\xi}{x-\xi} = -\frac{\sin\varrho z}{\sin z} \qquad (\cos z = x), \tag{62}$$

so ergibt sich nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$\mathsf{P}[1, e^{\lambda x}] = 0 \tag{37_1}$$

und für $\varrho > 0$

$$\mathsf{P}[\cos \varrho\zeta,\ e^{\lambda x}] = -\frac{\lambda^{n+1}}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\lambda\cos z}\sin\varrho z\sin z\,dz$$

$$= \frac{\lambda^{n+1}}{2}\left(i^{\varrho+1}J_{\varrho+1}(-i\lambda) - i^{\varrho-1}J_{\varrho-1}(-i\lambda)\right),$$

wenn J_ϱ die ϱ-te Besselsche Funktion bezeichnet, infolge ihrer bekannten Rekursionsformel also

$$(37_2)\qquad \mathsf{P}[\cos\varrho\zeta,\ e^{\lambda x}] = i^{2-\varrho}\lambda^n J_\varrho(i\lambda) \qquad (\varrho > 0).$$

Weniger einfach sind die $\mathsf{P}[\xi^\varrho \ln|\xi|,\ e^{\lambda x}]$ zu berechnen. Ich muß mich leider damit begnügen, ein endliches Berechnungs*verfahren* anzugeben. Es ist nach (30)

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\ln|\xi|}{\sqrt{1-\xi^2}\,(x-\xi)}\,d\xi = 0,$$

hiernach und nach (31)

$$(63)\qquad \begin{aligned}&\int_{-1}^{+1}\frac{\xi\ln|\xi|}{\sqrt{1-\xi^2}\,(x-\xi)}\,d\xi = -\int_{-1}^{+1}\frac{\ln|\xi|}{\sqrt{1-\xi^2}} = \pi\ln 2,\\ &\int_{-1}^{+1}\frac{\xi^2\ln|\xi|}{\sqrt{1-\xi^2}\,(x-\xi)}\,d\xi = x\cdot\pi\ln 2,\ \text{usw.}\end{aligned}$$

Also

$$(37_3)\qquad \begin{aligned}&\mathsf{P}[\xi^0\ln|\xi|,\ e^{\lambda x}] = 0,\\ &\mathsf{P}[\xi^1\ln|\xi|,\ e^{\lambda x}] = -i\lambda^n\ln 2\cdot J_1(i\lambda),\\ &\mathsf{P}[\xi^2\ln|\xi|,\ e^{\lambda x}] = \frac{i}{4}\lambda^{n+1}\ln 2\cdot\left(J_3(i\lambda) - 3J_1(i\lambda)\right),\ \text{usw.}\end{aligned}$$

Es sind also alle $\varrho_{\mu\nu}$ als Linearkombinationen von Besselschen Funktionen darstellbar.

Schließlich lassen sich noch die $\sigma_\mu(t)$ und σ_μ unter Anwendung von (62) und (63) explizit bestimmen, und damit auch die Integrale (43).

14. Die noch übrige Berechnung der Integrale (41) und (42) enthält die einzige Schwierigkeit, die bei der Lösung der Integralgleichung auftritt, und diese ist auch nicht erheblich. Neben $f(x)$ werden zunächst die Funktionen

$$(64)\qquad \mathfrak{f}_\nu(t) = \int_{-1}^{t} e^{-\lambda_\nu x} f(x)\,dx$$

eingeführt. Es ergibt sich dann nach partieller Integration unter Benutzung von (14_1), (37) und (47)

$$(41_1)\quad \varrho_\mu[f] = -\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-\lambda_\nu)^n}{p'(\lambda_\nu)}\int_{-1}^{+1}(\gamma_\mu(\xi)+\Im_\mu(\xi))\,d\xi\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\xi^2}}\,\frac{e^{\lambda_\nu t}\mathfrak{f}_\nu(t)}{t-\xi}\,dt,$$

$$(42_1)\quad k[f] = \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-\lambda_\nu)^n}{p'(\lambda_\nu)}\int_{-1}^{+1}\frac{e^{\lambda_\nu t}\mathfrak{f}_\nu(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-\lambda_\nu)^n}{p'(\lambda_\nu)}\int_{0}^{\pi}e^{\lambda_\nu\cos\tau}\mathfrak{f}_\nu(\cos\tau)\,d\tau,$$

wobei man noch in (41_1) die Integration über ξ mit Hilfe der Formeln (62) und (63) explizit ausführen kann, so daß in beiden Fällen nur noch einfache Integrale übrigbleiben.

Hiermit ist jetzt alles zur Auflösung des Gleichungssystems (44) vorbereitet; hat man die $r_\nu[f]$ aus (44) bestimmt, so ist

$$(17_1)\quad \varphi(\xi) = \sum_{\nu=0}^{n}\lambda_\nu^{n+1}r_\nu[f]\,\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{e^{\lambda_\nu x}}{x-\xi}\,dx$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\xi^2}}\,\frac{f(t)}{t-\xi}\,dt+\frac{\varphi_0}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}$$

die gesuchte Lösung der Integralgleichung. Das zweite und dritte Glied hier stellt die Grundlösung für den Kern $L(x,\xi) = (x-\xi)^{-1}$ dar; das erste gibt die Korrektur an, mit der diese Grundlösung bei allgemeinen Kernen (2) zu versehen ist. Es enthält die höheren transzendenten Funktionen

$$(25_1)\quad \chi(\xi,\lambda_\nu) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{e^{\lambda_\nu x}}{x-\xi}\,dx = \lambda_\nu^{-n-1}\psi_\nu(\xi),$$

von denen ich zum Schluß einige einfache Eigenschaften angeben will.

15. Es ist

$$\chi(\xi,\lambda) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-x^2}\,e^{\lambda x}-\sqrt{1-\xi^2}\,e^{\lambda\xi}}{x-\xi}\,dx+\frac{e^{\lambda\xi}}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\ln\left|\frac{1-\xi}{1+\xi}\right|,$$

wobei der erste Bestandteil in der Riemannschen Fläche von $\sqrt{1-\xi^2}$ eindeutig und im Endlichen bis auf Pole erster Ordnung in den beiden Verzweigungspunkten regulär ist. χ hat demnach für $\xi = \pm 1$ je eine algebraisch und logarithmisch singuläre Stelle.

Es soll für χ eine Reihenentwicklung hergeleitet werden. Man verifiziert dazu leicht

$$e^{\lambda x} = J_0(i\lambda) + 2\sum_{\varrho=1}^{\infty} i^{-\varrho} J_\varrho(i\lambda)\cos\varrho z \qquad (\cos z = x);$$

setzt man diese Reihe in (25_1) unter Benutzung von

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \sin\varrho z \frac{dz}{x-\xi} = -\cos\varrho\zeta^{2})$$

ein, so entsteht die gesuchte Entwicklung

$$\chi(\xi,\lambda) = 2\sum_{\varrho=1}^{\infty} i^{-\varrho} J_\varrho(i\lambda)\frac{\cos\varrho\zeta}{\sin\zeta}; \tag{65}$$

sie konvergiert für $|\xi| < 1$.

Für $\xi = \pm 1$ ist ferner

$$\left[\sqrt{1-\xi^2}\,\chi(\xi,\lambda)\right]_{\xi=\pm1} = J_0(i\lambda) \mp J_1(i\lambda). \tag{66}$$

Schlußbemerkung. Das Iterationsverfahren.

16. In manchen Fällen dürfte sich die Berechnung der Lösungsfunktion $\varphi(\xi)$ in Form von Reihen empfehlen, die nach den Funktionen $\frac{\cos\varrho\zeta}{\sin\zeta}$ fortschreiten. Wenn man $f(x)$ nach $\frac{\sin\varrho z}{\sin z}$ entwickelt, bekommt man das Hauptglied von (17_1) in dieser Gestalt, und das gleiche gilt nach (65) für das Korrekturglied. Auf diese Weise nutzt man am besten die Identität (65) aus.

In anderen Fällen wird ein Iterationsansatz für die Lösung von (1) anzuraten sein. Man löst zunächst (1) für den entarteten Kern L^*, bildet mit der so gefundenen Lösung $\varphi^*(\xi)$ die Funktion

$$f_1(x) = f(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} L(x,\xi)\,\varphi^*(\xi)\,d\xi, \tag{67}$$

die man als neue linke Seite für die Integralgleichung mit dem Kern L^* nimmt, und fährt so fort. Das Verfahren kann unter Umständen schnell konvergieren. Mit dem Ansatz (49) ist die Matrix $\mathfrak{R}$ des Gleichungssystems (39) bzw. (40) eine ganze rationale Funktion von p, und das gleiche gilt für die rechten Seiten. Vermöge dieser Gleichungen hängt der lösende Kern (17) analytisch von p ab, und in (11. wurde gezeigt, daß er für $p = 0$ regulär analytisch von p abhängt. Nun ist das Iterationsverfahren aber nichts anderes als eine Entwicklung von (17) in eine Potenzreihe von p um den Punkt $p = 0$.

Es konvergiert demnach bis zur absolut kleinsten singulären Stelle. Solche muß es aber gewiß geben, und zwar gerade dort, wo die Determinante $|\mathfrak{R}|$, die von p ganz rational abhängt, verschwindet, den Punkt $p = 0$ ausgenommen. An genau diesen Stellen nämlich existiert der lösende Kern (17) nicht.

Die Handhabung des Iterationsverfahrens ist in dem zuletzt betrachteten Spezialfalle eines Differenzkerns überaus einfach. Der entartete Kern reduziert sich nach (49) und (60) auf

$$L^*(x-\xi) = \frac{1}{x-\xi} + \text{const},$$

und entsprechend einfach sind die Lösung $\varphi^*(\xi)$ sowie die Integrale von (67) zu gewinnen.

Jetzt hat auch die Entartung des Kerns eine auf der Hand liegende Bedeutung, es ist nämlich

$$L^*(x-\xi) - c_0^* \gamma_0^* = \lim_{p \to 0} pL(p(x-\xi)).$$

(Eingegangen am 27. Juni 1942.)

Elementarer Beweis der Dreiecksungleichung in der Poincaréschen Halbebene.

Herrn Geh. Rat Prof. Dr. SEBASTIAN FINSTERWALDER
zum 80. Geburtstag gewidmet.

Von

Othmar Baier in Stuttgart.

In einer Ebene seien die drei Punkte A, B, C auf derselben Seite einer Geraden g. Einer oder mehrere der Punkte dürfen auch auf g liegen. Bezeichnen A_1, B_1, C_1 die Spiegelpunkte von A, B, C bezüglich g und werden die positiv gerechneten Strecken durch ihre Endpunkte bezeichnet, dann gilt die Ungleichung

$$\frac{\frac{AC}{AC_1} + \frac{BC}{BC_1}}{1 + \frac{AC}{AC_1} \cdot \frac{BC}{BC_1}} \geqq \frac{AB}{A_1B} \quad (1)$$ [1].

Wenn wenigstens einer der Punkte A, C auf g liegt, ist $AC/AC_1 = 1$, andernfalls < 1. Für den fortan ausgeschlossenen Fall, daß wenigstens einer der Punkte A, B, C auf g liegt, besteht die Ungleichung (1) offenbar zu Recht, mit „$>$“, falls nur C auf g, sonst mit „$=$“.

Wird A festgehalten und bewegt sich C (Fig. 1), dann sind die Niveaulinien $AC/AC_1 = AC/A_1C = \text{const}$ die Kreise des hyperbolischen Kreisbüschels $[A]$ mit den Grundpunkten A und A_1. Entsprechend ergeben sich für $BC/BC_1 = BC/B_1C = \text{const}$ die Kreise des hyperbolischen Kreisbüschels $[B]$ mit den Grundpunkten B und B_1.

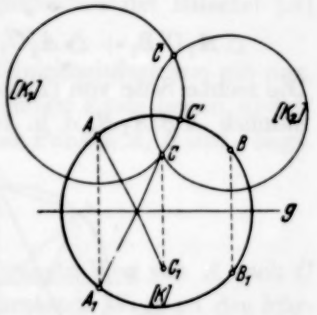

Fig. 1.

---

[1]) Das Problem, die Ungleichung (1) elementar zu beweisen, wurde von C. CARATHÉODORY gestellt. Durch

$$\operatorname{tgh} s = AB/A_1B, \quad \operatorname{tgh} s_1 = AC/AC_1, \quad \operatorname{tgh} s_2 = BC/BC_1$$

sind s, s_1, s_2 reell eindeutig bestimmt und (1) erhält die Form

$$\operatorname{tgh}(s_1 + s_2) \geqq \operatorname{tgh} s, \quad \text{woraus folgt} \quad s_1 + s_2 \geqq s.$$

Dabei ist

$$2\,ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

das Nichteuklidische Bogenelement. — K. PISOT hat ebenfalls einen hübschen, elementaren Beweis der Ungleichung (1) gefunden.

B liege zunächst nicht auf der Geraden AA_1. Die beiden Kreisbüschel $[A]$ und $[B]$ haben dann den gemeinsamen Orthogonalkreis (K), dessen Mittelpunkt auf g liegt. (K_1) und (K_2) seien die beiden Kreise der Büschel $[A]$ bzw. $[B]$ durch C. Für diejenigen Punkte von (K_1), die innerhalb von (K_2) liegen, ist die linke Seite von (1) kleiner geworden, da AC/A_1C auf (K_1) konstant ist und BC/B_1C innerhalb von (K_2) kleinere Werte annimmt[2]). Solche Punkte gibt es höchstens dann nicht, wenn C schon auf (K) liegt, da (K_1) und (K_2) als Orthogonalkreise von (K) durch den Spiegelpunkt $\bar{C}$ von C in bezug auf (K) gehen müssen. Bewegt sich also C auf (K_1), dann wird das Minimum der linken Seite von (1) für den Schnittpunkt C' von (K_1) mit (K) angenommen, der innerhalb von (K_2) liegt.

Für $C' = A$ oder $C' = B$ gilt in (1) offenbar das Gleichheitszeichen.

C' liege zwischen A und B (Fig. 2). Dann ergibt die linke Seite von (1) für C'

$$(2)\qquad \frac{AC'\cdot BC_1' + BC'\cdot AC_1'}{AC_1'\cdot BC_1' + AC'\cdot BC'} = \frac{AC'\cdot B_1C' + B_1C_1'\cdot AC_1'}{A_1C'\cdot B_1C' + A_1C_1'\cdot B_1C_1'} \quad \text{(Spiegelung an } g\text{)}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sin\mu}(\sphericalangle AC'B_1 + \sphericalangle AC_1'B_1)}{\frac{2}{\sin\lambda}(\sphericalangle A_1C'B_1 + \sphericalangle A_1C_1'B_1)}.$$

λ und μ sind die zu A_1B_1 bzw. $AB_1 = A_1B$ gehörigen Peripheriewinkel; wegen sin kann man jeweils irgendeinen nehmen. Nun ist

$$\triangle AC'B_1 + \triangle AC_1'B_1 = \text{Viereck } AC'B_1C_1' = \text{Viereck } A_1C'B_1C_1' \quad (AA_1 /\!/ C'C_1')$$

$$\triangle A_1C'B_1 + \triangle A_1C_1'B_1 = \text{Viereck } A_1C'B_1C_1'.$$

Die rechte Seite von (2) ist also gleich ihrem Wert für $C' = A$ oder $C' = B$, nämlich AB/A_1B, d. h. für C' gilt in (1) das Gleichheitszeichen.

Fig. 2.

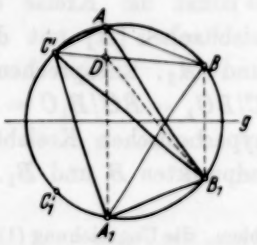

Fig. 3.

C' liege außerhalb von AB (Fig. 3). A liege zwischen C' und B, andernfalls tauschen A und B im folgenden ihre Rollen. (K_1) und (K_2) seien die Kreise von $[A]$ bzw. $[B]$ durch C'. (K_2) berührt dann (K_1) in C' von außen. Bewegt

[2]) $AC/AC_1 = a < 1$, $BC/BC_1 = x$, $y = \frac{a+x}{1+ax}$ nimmt für $x > 0$ mit x ab.

sich nun C' auf (K_1), dann wird das Minimum der linken Seite von (1) für den Schnittpunkt C'' von (K_1) mit (K) erreicht. Falls C'' innerhalb AB liegt, gilt (1). Andernfalls sei (K_3) der Kreis des Büschels $[B]$, der (K_1) von innen in C'' berührt. Sein zweiter Schnittpunkt mit (K) sei C'''. Die linke Seite von (1) wird für C', C'', C''' stets verkleinert und es läßt sich unschwer zeigen, daß schließlich einer der Punkte $C^{(n)}$ zwischen A und B zu liegen kommt, da die Kreisradien jeweils mindestens um den festen Betrag d (= Abstand AA_1 von BB_1) abnehmen. — (1) läßt sich in diesem Fall auch leicht direkt bestätigen:

Die linke Seite von (1) ergibt

$$\frac{AC' \cdot B_1C' + BC' \cdot A_1C'}{A_1C' \cdot B_1C' + AC' \cdot BC'} = \frac{\frac{2}{\sin\mu}(\triangle AC'B_1 + \triangle A_1C'B)}{\frac{2}{\sin\lambda}(\triangle A_1C'B_1 + \triangle AC'B)}. \tag{3}$$

D ist der Schnittpunkt von $C'B$ mit AA_1. Wegen $BB_1 // AA_1$ ist

$$\begin{aligned} \triangle A_1BC' &= \text{Viereck } A_1B_1DC' \\ \triangle AB_1C' + \triangle A_1BC' &= \text{Viereck } AB_1A_1C' + \triangle C'DB_1 \\ \triangle A_1B_1C' + \triangle ABC' &= \text{Viereck } AB_1A_1C' - \triangle C'DB_1. \end{aligned}$$

Die rechte Seite von (3) ist somit stets größer als ihr Wert für $C' = A$ oder $C' = B$. Für C' gilt in (1) „$>$“.

Schließlich ist noch der Fall nachzuholen, daß B auf der Geraden AA_1 liegt. A und C werden festgehalten und B bewege sich auf dem Kreis des Büschels $[A]$. AB/A_1B und AC/AC_1 bleiben fest, BC/BC_1 kann wie oben verkleinert werden, bis B wieder auf dem Orthogonalkreis der Büschel $[A]$ und $[C]$ liegt.

Die Ungleichung (1) ist damit bewiesen. Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn 1. A, B, C auf einem g senkrecht schneidenden Kreis liegen und C zwischen A und B liegt oder 2. mindestens einer der Punkte A, B auf g liegt.

Aus (1) folgt

$$\frac{AC}{AC_1} + \frac{BC}{BC_1} > \frac{AB}{A_1B}. \tag{4}$$

Wegen der Spiegelung (Fig. 1) ist AC auch der kürzeste Weg von A nach C über g, so daß für die Verhältnisse der direkten kürzesten Wege zu den kürzesten Wegen über g die Dreiecksungleichung (4) gilt.

(Eingegangen am 25. Juli 1942.)

Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche.

Eine Bemerkung zu den Beiträgen VI und VII [1].

Von

Wolfgang Krull in Bonn.

In Anmerkung [21]) von Beitrag VI habe ich unter Berufung auf den Beweis von Satz 10 die Gültigkeit des folgenden *Primäridealsatzes* behauptet: Es sei $\mathfrak{R}$ ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich, $\mathfrak{S}$ ein ganz abhängiger Oberring von $\mathfrak{R}$ [2]), der über $\mathfrak{R}$ eine Modulbasis von endlich vielen, linear unabhängigen Elementen $\omega_1, \ldots, \omega_n$ besitzt. *Ist dann* $\mathfrak{x}$ *ein beliebiges Primärideal aus* $\mathfrak{R}$, *so besitzt* $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S}$ *eine Durchschnittsdarstellung* $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{y}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{y}_m$, *bei der die* $\mathfrak{y}_i$ *Primärideale sind, die alle mit* $\mathfrak{R}$ *den Durchschnitt* $\mathfrak{x}$ *haben.*

Indessen zeigt eine genauere Untersuchung, daß der Beweis von Satz 10 nur dann stichhaltig ist, wenn $\mathfrak{S}$ nicht bloß die gewünschte Modulbasis besitzt, sondern darüber hinaus noch der folgenden *Normenbedingung* genügt:

Gleichzeitig mit β *gehört stets auch* $\beta^{-1} \cdot N(\beta)$ *zu* $\mathfrak{S}$, *falls* $N(\beta)$ *die Norm von* β *über dem Quotientenkörper* $\mathfrak{K}$ *von* $\mathfrak{R}$ *bedeutet.*

Ob der Primäridealsatz auch unabhängig von der Normenbedingung gilt oder nicht, kann ich bis jetzt nicht entscheiden. Wichtig für die Beiträge VI und VII sind die folgenden beiden Bemerkungen:

a) *Die Normenbedingung ist sicher erfüllt, wenn nicht nur* $\mathfrak{R}$, *sondern auch* $\mathfrak{S}$ *ganz abgeschlossen ist.* (Trivial, da gleichzeitig mit β stets auch $\beta^{-1} \cdot N(\beta)$ von $\mathfrak{R}$ ganz abhängt.)

b) *Der Primäridealsatz gilt für* $\mathfrak{S}$ (ohne Rücksicht auf das Erfülltsein oder Nichterfülltsein der Normenbedingung) *immer, wenn zu* $\mathfrak{S}$ *ein ganz abhängiger Oberring* $\mathfrak{T}$ *existiert, der sowohl über* $\mathfrak{R}$ *als auch über* $\mathfrak{S}$ *eine Modulbasis von endlich vielen linear unabhängigen Elementen besitzt und seinerseits der Normenbedingung über* $\mathfrak{R}$ *genügt.*

In der Tat, unter unseren Voraussetzungen ist jedenfalls $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{T} = \mathfrak{z}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{z}_m$, wobei die $\mathfrak{z}_i$ Primärideale sind, für die die Gleichungen $\mathfrak{z}_i \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{x}$ $(i = 1, \ldots, m)$ gelten. Setzen wir $\mathfrak{y}_i = \mathfrak{z}_i \cap \mathfrak{S}$, so sind auch die $\mathfrak{y}_i$ Primärideale, und es wird $\mathfrak{y}_i \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{z}_i \cap \mathfrak{S} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{z}_i \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{x}$ $(i = 1, \ldots, m)$. Außerdem folgt aus der Existenz der Modulbasis von $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{S}$ nach einer elementaren, in

[1]) Math. Zeitschr. **45** (1939), S. 1–19 bzw. 319–334.

[2]) Also ein Oberring, dessen sämtliche Elemente von $\mathfrak{R}$ ganz abhängen.

Beitrag VI beim Beweise von Satz 8 ausführlich durchgeführten Überlegung sofort $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{S} = ((\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S}) \cdot \mathfrak{T}) \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{T} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{z}_1 \cap \mathfrak{z}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{z}_m \cap \mathfrak{S} = (\mathfrak{z}_1 \cap \mathfrak{S}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{z}_m \cap \mathfrak{S}) = \mathfrak{y}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{y}_m$. Fertig!

Bemerkung a) zeigt, daß der Beweis von Satz 10 in Beitrag VI einwandfrei ist. Denn jeder „unverzweigte" Oberring von $\mathfrak{R}$ ist ganz abgeschlossen.

Bemerkung b) zeigt die Richtigkeit der Behauptung γ) des Satzes 2 von Beitrag VII, für die wegen der Berufung auf die zu weitgehende Behauptung der Anmerkung [21]) von Beitrag VI in Beitrag VII selbst kein stichhaltiger Beweis gegeben worden war. — Es handelt sich an der genannten Stelle darum, zu zeigen, daß der Primäridealsatz gilt, wenn der ganz abgeschlossene Integritätsbereich $\mathfrak{R}$ einen Unterkörper K enthält, über dem der Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{R}$ „streng transzendent" ist, und wenn gleichzeitig der Oberring $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$ die Gestalt $\Lambda \cdot \mathfrak{R}$ besitzt, wobei Λ einen endlich-algebraischen Oberkörper von K bedeutet. Verstehen wir nun unter N den kleinsten Λ umfassenden Normalkörper über K, und setzen wir $\mathfrak{T} = \mathsf{N} \cdot \mathfrak{R}$, so hat $\mathfrak{T}$ aus den beim Beweise von Satz 2 in Beitrag VII ausführlich dargelegten Gründen sowohl über $\mathfrak{R}$ als auch über $\mathfrak{S}$ eine Modulbasis von endlich vielen linear unabhängigen Elementen; außerdem genügt $\mathfrak{T}$ der Normenbedingung über $\mathfrak{R}$, weil $\mathfrak{T}$ gleichzeitig mit β stets auch sämtliche Konjugierten von β über $\mathfrak{R}$ enthält. Man kann also unmittelbar das unter b) abgeleitete Kriterium anwenden.

Außer an den soeben behandelten Stellen wurde weder in Beitrag VI noch in Beitrag VII irgendwo auf Anmerkung [21]) von Beitrag VI zurückgegriffen. Das in dieser Anmerkung begangene Versehen ist also bedeutungslos.

(Eingegangen am 25. April 1942.)

Preisaufgabe der Technischen Hochschule Karlsruhe.

Die Technische Hochschule Fridericiana in Karlsruhe erläßt zum Gedächtnis des durch lange Jahre in ihrem Lehrkörper wirkenden Bahnbrechers der mathematischen Logik Ernst Schröder aus Anlaß der 100. Wiederkehr seines Geburtstages die folgende *Preisaufgabe*:

Die Untersuchungen Ernst Schröders zum Eliminations- und Auflösungsproblem in der Logik der Relative (Vorlesungen über die Algebra der Logik III, 1, Leipzig 1895; vgl. J. C. C. Mc Kinsey, Postulates for the calculus of binary relations, J. Symbolic Logic **3** (1940), S. 85–97, und A. Tarski, On the calculus of relations, ebenda **6** (1941), 73–89) sollen mit den heute verfügbaren Hilfsmitteln (vgl. H. Behmann, Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem, Math. Annalen **86** (1922), S. 163–229 und vor allem W. Ackermann, Untersuchungen über das Eliminationsproblem der mathematischen Logik, ebenda **110** (1934), S. 390–413 und Zum Eliminationsproblem der mathematischen Logik, ebenda **111** (1935), S. 61–63, sowie Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, 2. Aufl., Berlin 1938, S. 106f.) weitergeführt werden.

Als Preis wird der Betrag von 500 RM für die beste Lösung der Aufgabe ausgesetzt. Als Zeitpunkt für die Einlieferung der Lösungen wird mit Rücksicht auf die Kriegsverhältnisse vorläufig der 1. Oktober 1944 angesetzt. Dem Preisrichterkollegium gehören außer dem Rektor der Technischen Hochschule Karlsruhe als Vorsitzendem, Prof. Dr.-Ing. R. G. Weigel, und dem Dekan der math.-naturw. Fakultät Prof. Dr. A. Bühl an: Studienrat Dr. Wilh. Ackermann (Burgsteinfurt), Prof. Dr. C. Boehm (Karlsruhe), der Herausgeber der Frege-Studien Jürgen v. Kempski (Berlin), Prof. Dr. Heinr. Scholz (Münster i. W.) sowie Prof. Dr. E. Ungerer in Karlsruhe als Geschäftsführer. Etwaige Anfragen sind an den Geschäftsführer zu richten.

Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche.

VIII. Multiplikativ abgeschlossene Systeme von endlichen Idealen[1]).

Von

Wolfgang Krull in Bonn.

Im ersten Teil (§ 1 bis § 3) der Note wird das Verhalten der Ideale eines beliebigen Integritätsbereichs $\mathfrak{R}$ beim Übergang zu gewissen „transzendenten" Oberringen näher untersucht[2]). Für den einfachsten Spezialfall der transzendenten Erweiterung des Grundkörpers eines Polynomrings wurde ein Teil der einschlägigen Sätze bereits von K. Hentzelt bzw. E. Noether bewiesen, und zwar mit der gleichen Methode, wie sie auch in § 1 des Textes benutzt wird[3]). Eine Wiederaufnahme der Untersuchung unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen schien mir vor allem deshalb wünschenswert, weil sie zwanglos auf eine bemerkenswerte, bisher anscheinend noch nicht systematisch studierte Idealoperation führt: Ist in $\mathfrak{R}$ ein festes „*multiplikativ abgeschlossenes*" (in Zukunft kurz „*m. a.*") System Λ von *endlichen* Idealen[4]) gegeben, das gleichzeitig mit $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ stets auch $\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2$ enthält, so verstehen wir bei beliebigem $\mathfrak{a}$ unter $\mathfrak{a}_\Lambda$ die Summe aller der Ideale $\mathfrak{c}$, für die bei geeigneter Wahl von $\mathfrak{e}$ aus Λ das Produkt $\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{c}$ in $\mathfrak{a}$ liegt, und bezeichnen den Übergang von $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{a}_\Lambda$ als *Λ-Operation*. Erst mit Hilfe der Λ-Operation, die eine Verallgemeinerung der üblichen „Bildung von isolierten Komponentenidealen" darstellt, können die Untersuchungen von § 1 bis § 3 zu einem wirklich be-

[1]) Vgl. die früheren Beiträge, Math. Zeitschr. **41**, **42**, **44**, **45**. — Der vorliegende Beitrag knüpft vor allem an Beitrag I [Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 545—577] an.

[2]) Anders als in den früheren Beiträgen, deren Bezeichnungsweise wir im übrigen übernehmen, braucht $\mathfrak{R}$ nicht ganz abgeschlossen zu sein. Unter „Ideal" schlechtweg verstehen wir stets ein *ganzes* Ideal.

[3]) K. Hentzelt, Zur Theorie der Polynomideale und Resultanten. Herausgegeben von E. Noether, Math. Annalen **88** (1922), S. 53—73. Es handelt sich in der Hentzelt-Noetherschen Terminologie um den Satz, daß „die Grundideale eines transformierten Ideals stets selbst transformiert sind", nebst seinen Folgerungen. — § 1 nimmt in unserer Note eine gewisse Sonderstellung ein; er enthält alle die elementaren Sätze, die ohne Heranziehung des Begriffs des multiplikativ abgeschlossenen Idealsystems formuliert und bewiesen werden können, und die z. B. in der Theorie der Polynomringe dauernd benutzt werden.

[4]) Wir nennen ein Ideal endlich, wenn es eine endliche Basis besitzt.

friedigenden Abschluß gebracht werden. Das Endergebnis läßt sich kurz etwa so formulieren:

Es sei $\mathfrak{P}$ der Polynomring in einer Variablenmenge $u_1, u_2, \ldots, u_\tau, \ldots$ von beliebiger Mächtigkeit über $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}_u$ sei ein m. a. Polynomsystem aus $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ der durch $\mathfrak{S}_u$ erzeugte Quotientenring von $\mathfrak{P}$. Schließlich bedeute Λ das m. a. System aller der endlichen Ideale $\mathfrak{e}$ aus $\mathfrak{R}$, bei denen $\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{P}$ mindestens ein Polynom aus $\mathfrak{S}_u$ enthält. Dann gilt für jedes $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ die Gleichung $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{Q}) \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{a}_\Lambda$, und es hat $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{Q}$ im wesentlichen die gleiche Struktur wie $\mathfrak{a}_\Lambda$ in $\mathfrak{R}$.

In § 4, der innerhalb der Note für sich allein steht, wird die für die Λ-Operation nicht unwichtige Frage untersucht, ob bei beliebigem $\mathfrak{a}$ und endlichem $\mathfrak{e}$ aus der Gleichung $\mathfrak{a} : \mathfrak{e} = \mathfrak{a}$ stets auf die Existenz eines $c \subset \mathfrak{e}$ mit $\mathfrak{a} : (c) = \mathfrak{a}$ geschlossen werden kann. Bemerkenswert ist vor allem ein bei dieser Gelegenheit benutztes „Lemma", das für m. a. Elementsysteme schon lange bekannt war [5]), aber ohne wesentliche Änderung des Wortlautes auf beliebige m. a. Systeme von *endlichen* Idealen ausgedehnt werden kann.

In § 5 und § 6, die zusammengenommen den eigentlichen Hauptteil der Note bilden, wird die Λ-Operation mit der in Beitrag I entwickelten Theorie der arithmetisch brauchbaren '-Operationen und der Kroneckerschen Funktionalringe in Zusammenhang gebracht. Die Hauptergebnisse lauten: Eine Λ-Operation ist dann und nur dann gleichzeitig eine '-Operation, wenn für jedes Hauptideal $(a)_\Lambda = (a)$ wird. Verknüpft man eine der Bedingung $(a)_\Lambda = (a)$ genügende Λ-Operation mit einer arithmetisch brauchbaren, im Sinne von P. Lorenzen [6]) endlichartigen, etwa durch den Index w gekennzeichneten '-Operation, indem man allgemein $\mathfrak{a}_{w_\Lambda} = (\mathfrak{a}_w)_\Lambda$ setzt, so entsteht wieder eine arithmetisch brauchbare, endlichartige '-Operation („w_Λ-Operation").

Der zur w Operation gehörige Kroneckersche Funktionalring $\tilde{\mathfrak{M}}_{w_\Lambda}$ ist ein leicht angebbarer Quotientenring des zur ursprünglichen w-Operation gehörigen Kroneckerschen Funktionalrings $\tilde{\mathfrak{M}}_w$. Darüber hinaus können *alle* Quotientenringe von $\tilde{\mathfrak{M}}_w$, die einer aus der (festgehaltenen) w-Operation abgeleiteten w_Λ-Operation als Funktionalring zugeordnet sind, in einfacher Weise charakterisiert werden.

Erst durch diese Sätze werden die in den letzten drei Paragraphen von Beitrag I begonnenen Untersuchungen zu einem wirklich befriedigenden Abschluß gebracht. Damals war die Λ-Operation in — (wie sich nachträglich

---

[5]) Vgl. W. Krull, Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung. Math. Annalen **101** (1929), S. 729—744.

[6]) Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie. Math. Zeitschr. **45** (1939), S. 533—553; § 2.

zeigt) — wenig zweckmäßiger Weise mit Hilfe gewisser Primidealmengen definiert worden, und es konnten infolgedessen nur bei den ganz abgeschlossenen Ringen mit Maximalbedingung endgültige Sätze aufgestellt werden, während bei den Integritätsbereichen ohne Endlichkeitsbedingung nur Teilresultate gewonnen wurden. Jetzt dagegen führt die „richtige" Definition der Λ-Operationen mit Hilfe der m. a. Idealsysteme nicht nur zu einer vollständigen Erledigung des allgemeinen Falls, sondern auch gleichzeitig zu einer der Sachlage angemessenen Vereinfachung der Beweise, die u. a. zur Folge hat, daß der Hauptteil der Sätze von § 5 und § 6 unmittelbar auf beliebige kommutative Halbgruppen im Sinne von P. Lorenzen [6]) übertragen werden kann.

§ 1.

Es sei $\mathfrak{R}$ ein beliebiger Integritätsbereich, $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}[u_1, u_2, \ldots]$ sei der Ring aller Polynome in einer Variablenmenge $u_1, u_2, \ldots$ von beliebiger Mächtigkeit mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$. Unter dem *Inhalt* des $\mathfrak{P}$-Polynoms $p(u)$ verstehen wir das aus den Koeffizienten von $p(u)$ abgeleitete $\mathfrak{R}$-Ideal. Dann gilt nach Dedekind und Mertens der folgende

Hilfssatz 1. *Ist* $\mathfrak{a}$ *bzw.* $\mathfrak{b}$ *bzw.* $\mathfrak{c}$ *der Inhalt von* $p(u)$ *bzw.* $q(u)$ *bzw.* $r(u) = p(u) \cdot q(u)$, *so wird für hinreichend großes* m *stets* $\mathfrak{a}^{m+1} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a}^m \cdot \mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}^{m+1} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{b}^m \cdot \mathfrak{c}$ [7]).

Aus dem Hilfssatz folgt insbesondere: Die Menge aller Polynome vom Inhalt $\mathfrak{R}$ bildet in $\mathfrak{P}$ ein *multiplikativ abgeschlossenes* (in Zukunft kurz „*m. a.*") System $\mathbf{M}^*$, sie enthält also gleichzeitig mit zwei Polynomen stets auch deren Produkt. — Es sei nun $\mathbf{M}$ irgendein multiplikativ abgeschlossenes Untersystem von $\mathbf{M}^*$, und es bedeute $\mathfrak{S}$ den durch $\mathbf{M}$ erzeugten Quotientenring von $\mathfrak{P}$, also den Ring aller Quotienten $\frac{p(u)}{q(u)}$ $(p(u) \subset \mathfrak{P},\ q(u) \subset \mathbf{M})$. Wir stellen uns die Aufgabe, das Verhalten der Ideale von $\mathfrak{R}$ beim Übergang zu $\mathfrak{S}$ näher zu untersuchen.

Alle Polynome aus $\mathbf{M}$ sind in $\mathfrak{S}$ Einheiten, und jedes $\mathfrak{S}$-Element kann durch Multiplikation mit einem Polynom aus $\mathbf{M}$ in ein $\mathfrak{P}$-Element verwandelt werden. Wir brauchen also bei den Idealen aus $\mathfrak{S}$ im wesentlichen nur auf die in ihnen auftretenden Polynome, d. h. auf ihren Durchschnitt mit $\mathfrak{P}$ zu achten. Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{R}$, $q(u)$ irgendein Polynom aus $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$, so gilt eine Gleichung $\mu(u) \cdot q(u) = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot p_i(u)$ $(\mu(u) \subset \mathbf{M};\ a_i \subset \mathfrak{a},\ p_i(u) \subset \mathfrak{P}\ (i = 1, \ldots, m))$. Der Inhalt von $\mu(u) \cdot q(u)$ ist ein Unterideal

[7]) Ein knapper Beweis von Hilfssatz 1 findet sich bei H. Prüfer, Untersuchungen über Teilbarkeitseigenschaften in Körpern. J. f. Matb. **168** (1932), S. 1—36, § 9. — Zu der Art, wie im folgenden mit dem Hilfssatz gearbeitet wird, vgl. auch: W. Krull, Hauptidealzerlegung in Polynomringen. Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 213—217.

von $\mathfrak{a}$, und aus dem Hilfssatz folgt, daß $\mu(u) \cdot q(u)$ und $q(u)$ denselben Inhalt besitzen müssen. Damit ist gezeigt:

Satz 1. *Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{R}$, so enthält $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ stets alle und nur die Polynome, deren Inhalt ein Unterideal von $\mathfrak{a}$ ist. — Anders ausgedrückt: Es ist stets $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}) \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{P}$, $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}) \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{a}$.*

Die Ideale aus $\mathfrak{R}$ lassen sich also *umkehrbar eindeutig* ihren Erweiterungsidealen auf $\mathfrak{S}$ zuordnen.

Satz 2. *Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \cdots$ eine unverkürzbare Durchschnittsdarstellung von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{R}$, so ist $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} = (\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{S}) \cap \cdots$ eine solche von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}$.*

Zum Beweis von Satz 2 braucht man wegen Satz 1 nur zu zeigen, daß $\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{S}) \cap \cdots$ kein *echtes* Oberideal von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ sein kann. Ist aber $p(u)$ irgendein Polynom aus $\mathfrak{b}$, so muß der Inhalt von $p(u)$ nach Satz 1 in $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \cdots = \mathfrak{a}$ enthalten sein, es ist also sicher $p(u) \subset \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$. — Unter dem *Inhalt* eines beliebigen Ideals $\mathfrak{a}_s$ aus $\mathfrak{S}$ wollen wir die Summe der Inhalte aller zu $\mathfrak{a}_s$ gehörigen $\mathfrak{P}$-Polynome verstehen. Dann gilt:

Satz 3. *Ist $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}_s$ ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{S}$ und bedeutet $\mathfrak{b}$ den Inhalt von $\mathfrak{b}_s$, so ist stets $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}) : \mathfrak{b}_s = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{S}$.*

Ist zunächst $\mathfrak{b}_s = (p(u))$ mit $p(u) \subset \mathfrak{P}$, so ist nach Satz 1 der Inhalt $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{b}_s$ gleich dem Inhalt von $p(u)$, und aus dem Hilfssatz und Satz 1 folgt sofort, daß $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} : (p(u))$ alle und nur die Polynome $q(u)$ enthält, deren Inhalt ein Unterideal von $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ ist, es wird also in diesem Falle tatsächlich $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} : (p(u)) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} : \mathfrak{b}_s = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{S}$. — Es sei jetzt allgemein $\mathfrak{b}_s = (p_1(u), p_2(u), \ldots)$, $\mathfrak{b}^{(\tau)}$ sei der Inhalt von $p_\tau(u)$. Dann wird, wie leicht aus dem Hilfssatz zu erschließen, $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{(1)} + \mathfrak{b}^{(2)} + \cdots$, und man erhält nach bekannten Quotientenformeln: $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} : \mathfrak{b}_s = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} : (p_1(u), p_2(u), \ldots) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} : (p_1(u)) \cap \cap (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} : (p_2(u))) \cap \cdots = ((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}^{(1)}) \cdot \mathfrak{S}) \cap ((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}^{(2)}) \cdot \mathfrak{S}) \cap \cdots = ((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}^{(1)}) \cap \cap (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}^{(2)}) \cap \cdots) \cdot \mathfrak{S} = (\mathfrak{a} : (\mathfrak{b}^{(1)} + \mathfrak{b}^{(2)} + \cdots)) \cdot \mathfrak{S} = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{S}$. — Aus Satz 3 folgt insbesondere:

Das Polynom $p(u)$ ist zu dem Erweiterungsideal $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ des Ideals $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ dann und nur dann prim, $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} : (p(u)) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$, wenn der Inhalt $\mathfrak{b}$ von $p(u)$ zu $\mathfrak{a}$ prim ist, $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$. Aus dieser Bemerkung schließt man mühelos weiter:

Satz 4. *Ist $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{R}$ ein zum Primideal $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, so ist $\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}$ ein zum Primideal $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ gehöriges Primärideal*[8]).

---

[8]) Im Spezialfall der Grundkörpererweiterung eines Polynomringes vgl. zu Satz 4 auch: B. L. VAN DER WAERDEN, Zur algebraischen Geometrie. Berichtigungen und Ergänzungen. Math. Annalen **113** (1936), S. 213—217.

Die Sätze 1 bis 3 gestatten es, die Ideale $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ geradezu mit ihren Erweiterungsidealen $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ zu identifizieren. Satz 4 besagt dann einfach, daß beim Übergang von $\mathfrak{R}$ zu $\mathfrak{S}$ Primideale Primideale und Primärideale Primärideale bleiben. Eine besonders wichtige Anwendung unserer Sätze betrifft den Fall, daß $\mathfrak{R} = \mathsf{K}[x_1, x_2, \ldots]$ ein *Polynomring* in einer Variablenmenge $x_1, x_2, \ldots$ von beliebiger Mächtigkeit über einem beliebigen Grundkörper K ist, während $\mathfrak{S} = \Lambda \cdot \mathfrak{R}$ den Polynomring in $x_1, x_2, \ldots$ über einem rein transzendenten Oberkörper $\Lambda = \mathsf{K}(u_1, u_2, \ldots)$ von K darstellt. (Man wähle in $\mathfrak{P} = \mathsf{K}[x_1, x_2, \ldots; u_1, u_2, \ldots]$ für M den Polynomring $\mathsf{K}[u_1, u_2, \ldots]$!). — Ist in $\mathfrak{R}$ jedes Ideal als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen darstellbar, eine Voraussetzung, die bekanntlich z. B. bei einem Integrität bereich mit Maximalbedingung immer erfüllt ist, so können die Sätze 1 bis 4 leicht ergänzt werden durch

Satz 5. *Die zugehörigen Primideale bzw. die isolierten Komponentenideale von* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ *in* $\mathfrak{S}$ *sind stets gleich den Erweiterungsidealen der zugehörigen Primideale bzw. isolierten Komponentenideale von* $\mathfrak{a}$ *in* $\mathfrak{R}$ [9]).

Zum Beweise hat man nur zu beachten: Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ eine unverkürzbare Primärkomponentenzerlegung von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{R}$, so ist $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} = (\mathfrak{q}_1 \cdot \mathfrak{S}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_n \cdot \mathfrak{S})$ eine solche von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}$, und es sind die zu den Primäridealen $\mathfrak{q}_i$ bzw. $\mathfrak{q}_i \cdot \mathfrak{S}$ gehörigen Primideale nach Definition gerade die sämtlichen „zu $\mathfrak{a}$" bzw. „zu $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$" gehörigen Primideale. — Sämtliche isolierten Komponentenideale von $\mathfrak{a}$ entstehen dadurch, daß man im Durchschnitt $\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ geeignete Komponenten $\mathfrak{q}_i$ wegläßt; läßt man im Durchschnitt $(\mathfrak{q}_1 \cdot \mathfrak{S}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_n \cdot \mathfrak{S})$ jeweils die entsprechenden Komponenten $\mathfrak{q}_i \cdot \mathfrak{S}$ weg, so erhält man gerade die sämtlichen isolierten Komponentenideale von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$. — Etwas mühsamer gestaltet sich die Verschärfung der Sätze 1 bis 4 bei allgemeinen Integritätsbereichen ohne jede Endlichkeitsbedingung. Zunächst erhält man:

Satz 6. *Die minimalen Primoberideale bzw. die isolierten Primärkomponenten von* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ *sind gleich den Erweiterungsidealen der minimalen Primoberideale bzw. isolierten Primärkomponenten von* $\mathfrak{a}$ [9]).

Daß $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{S}$ ein minimales Primoberideal bzw. eine isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ darstellt, falls $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{q}$ ein minimales Primoberideal bzw. eine isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ ist, ergibt sich fast unmittelbar aus Satz 1 und Satz 4. Es sei nun $\mathfrak{p}_s$ ein beliebiges minimales

[9]) Zur Definition der zugehörigen Primideale und isolierten Komponentenideale in Ringen mit Maximalbedingung bzw. zur Definition der minimalen Primoberideale und isolierten Primärkomponenten in beliebigen Ringen vgl. z. B.: W. KRULL, Idealtheorie. Ergebnisse d. Mathematik u. ihrer Grenzgebiete, Bd. 4, Heft 3 (1935); Nr. 6 bzw. Nr. 3.

Primoberideal von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$, $\mathfrak{q}_s$ sei die zugehörige isolierte Primärkomponente; dann ist jedenfalls $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_s \cap \mathfrak{R}$ ein zum Primideal $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_s \cap \mathfrak{R}$ gehöriges Primärideal. Ist ferner $\mathfrak{q}(u)$ irgendein Polynom aus $\mathfrak{q}_s$ mit dem Inhalt $\mathfrak{b}$, so gibt es nach Definition der isolierten Primärkomponenten ein nicht zu $\mathfrak{p}_s$ gehöriges Polynom $r(u)$, derart, daß $\mathfrak{q}(u) \cdot r(u) \subset \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ wird. Der Inhalt $\mathfrak{c}$ von $r(u)$ ist nicht in $\mathfrak{p}_s$ und damit auch nicht in $\mathfrak{p}$ enthalten; andererseits wird nach Satz 1 und dem Hilfssatz $\mathfrak{c}^m \cdot \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}^m \cdot (q(u)) \subseteq \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ für hinreichend großes m. Daraus folgt: $\mathfrak{q}_s$, bzw. $\mathfrak{q}$ besteht aus allen und nur den Elementen von $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{R}$, die durch Multiplikation mit geeigneten, nicht zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Faktoren *aus* $\mathfrak{R}$ in Elemente von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ verwandelt werden können. Es wird also jedenfalls $\mathfrak{q}_s = \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{S}$. Da ferner $\mathfrak{q}$ bzw. $\mathfrak{q}_s$ ein zum Primideal $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{p}_s$ gehöriges Primärideal ist, wird $\mathfrak{p}_s = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ nach Satz 4. Schließlich muß $\mathfrak{p}$ ein minimales Primoberideal und $\mathfrak{q}$ die zugehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ sein, weil andernfalls nicht alle $\mathfrak{q}$-Elemente durch Multiplikation mit zu $\mathfrak{p}$ primen Faktoren in Elemente von $\mathfrak{a}$ übergeführt werden könnten.

§ 2.

Multiplikativ abgeschlossene Systeme von endlichen Idealen.

Beim weiteren Ausbau der in § 1 begonnenen Untersuchungen benutzen wir die folgenden Definitionen:

Ein System Λ von endlichen Idealen (Elementsystem S) aus dem beliebigen Integritätsbereich $\mathfrak{R}$ soll *m. a.* (multiplikativ abgeschlossen) bzw. *f. m. a.* (fast multiplikativ abgeschlossen) heißen, wenn es gleichzeitig mit zwei Idealen $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ (Elementen a_1, a_2) stets auch $\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2$ ($a_1 \cdot a_2$) bzw. ein Unterideal von $\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2$ (Vielfaches von $a_1 \cdot a_2$) enthält. Andrerseits soll $\Lambda(S)$ *vollständig* genannt werden, wenn in $\Lambda(S)$ gleichzeitig mit $\mathfrak{e}(a)$ stets auch jedes endliche Oberideal von $\mathfrak{e}$ (jeder Teiler von a) auftritt.

Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{R}$ und bedeutet S bzw. Λ irgendein m. a. oder f. m. a. System von Elementen bzw. endlichen Idealen, so verstehen wir unter dem *i. K. I.* (isolierten Komponentenideal) *im engeren Sinne* $\mathfrak{a}_S$ bzw. unter dem *i. K. I. im weiteren Sinne* $\mathfrak{a}_\Lambda$ das Ideal aller der Ringelemente a, zu denen ein Element c aus S bzw. ein Ideal $\mathfrak{e}$ aus Λ so bestimmt werden kann, daß $a \cdot c \subset \mathfrak{a}$ bzw. $(a) \cdot \mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{a}$ wird[10]). Den Übergang von $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{a}_S$ bzw. $\mathfrak{a}_\Lambda$ (für beliebiges $\mathfrak{a}$ bei festem S bzw. Λ) bezeichnen wir als die durch das System S bzw. Λ definierte S- bzw. Λ-*Operation*.

Zwei Systeme S_1, S_2 bzw. Λ_1, Λ_2 sollen *gleichwertig* genannt werden, wenn sie dieselbe S- bzw. Λ-Operation definieren, wenn also $\mathfrak{a}_{S_1} = \mathfrak{a}_{S_2}$ bzw. $\mathfrak{a}_{\Lambda_1} = \mathfrak{a}_{\Lambda_2}$ wird für jedes $\mathfrak{a}$.

[10]) Die „i. K. I. im engeren Sinne" des Textes sind nichts anderes als die „i. K. I." schlechtweg im üblichen Sinne. Vgl. z. B. KRULL[8]), Nr. 6.

Zu jedem m. a. oder f. m. a. System S bzw. Λ gibt es ein *zugehöriges* (kleinstes umfassendes) *vollständiges System* S^* *bzw.* Λ^*, nämlich das System aller der Elemente bzw. endlichen Ideale, die irgendein Element aus S teilen bzw. irgendein Ideal aus Λ enthalten. S^* bzw. Λ^* ist stets m. a., auch wenn S bzw. Λ nur f. m. a. war. — Offenbar sind S und S^* bzw. Λ und Λ^* stets gleichwertig. Darüber hinaus gilt.

Hilfssatz 2. *Zwei Systeme* S_1 *und* S_2 *bzw.* Λ_1 *und* Λ_2 *sind dann und nur dann gleichwertig, wenn die zugehörigen vollständigen Systeme identisch sind* ($S_1^* = S_2^*$ *bzw.* $\Lambda_1^* = \Lambda_2^*$), d. h. wenn es zu jedem Element a_1 aus S_1 bzw. zu jedem Ideal $\mathfrak{e}_1$ aus Λ_1 in S_2 ein Vielfaches a_2 bzw. in Λ_2 ein Unterideal $\mathfrak{e}_2$ gibt, und umgekehrt.

Das „dann" ist bei Hilfssatz 2 so gut wie selbstverständlich. Aber auch der Beweis des „nur dann" macht keine Schwierigkeit. Angenommen etwa, es gäbe zu dem Ideal $\mathfrak{e}_1$ aus Λ_1 in Λ_2 kein (echtes oder unechtes) Unterideal $\mathfrak{e}_2$. Dann ist offenbar $(\mathfrak{e}_1)_{\Lambda_1} = \mathfrak{R}$, $(\mathfrak{e}_1)_{\Lambda_2} \neq \mathfrak{R}$, die Systeme Λ_1 und Λ_2 sind also sicher nicht gleichwertig.

Da, wie soeben gezeigt, jedes f. m. a. System S bzw. Λ mit einem m. a. System gleichwertig ist, hätten wir uns bei der Definition der i. K. I. im engeren und weiteren Sinne ausschließlich auf die Betrachtung von m. a. Systemen beschränken können. Die Zulassung von f. m. a. Systemen dient nur zur Vereinfachung einiger späterer Beweise. — Dagegen kann die Einführung der m. a. Idealsysteme Λ [11]) neben den m. a. Elementsystemen S keinesfalls umgangen werden. Denn es gibt, wie mühelos durch Beispiele zu belegen, schon in ganz einfachen Integritätsbereichen *m. a. Idealsysteme, zu denen kein gleichwertiges m. a. Elementsystem* (d. h. kein gleichwertiges m. a. Hauptidealsystem) *existiert* [12]).

Außerdem ist zwar unmittelbar klar, daß jedes i. K. I. im engeren Sinne stets auch ein i. K. I. im weiteren Sinne darstellt; denn man kann ja statt mit m. a. Elementsystemen ebensogut mit m. a. Hauptidealsystemen arbeiten. Aber die Richtigkeit der Umkehrung konnte ich bis jetzt nur unter speziellen Voraussetzungen über den zugrunde liegenden Integritätsbereich $\mathfrak{R}$ beweisen. (Vgl. die Untersuchungen von § 4, insbesondere die Schlußbemerkung) [13]).

[11]) Wenn im folgenden von einem m. a. (Ideal-) System Λ geredet wird, ist stets ein m. a. System von *endlichen* Idealen gemeint.

[12]) Es sei z. B. $\mathfrak{R}$ ein ganz abgeschlossener Ring mit Maximalbedingung, in dem mindestens ein nichtminimales Primideal $\mathfrak{p}$ existiert; Λ sei das m. a. System aller der Ideale aus $\mathfrak{R}$, die in keinem einzigen minimalen Ringprimideal enthalten sind. Dann ist kein einziges Ideal aus Λ Unterideal eines Hauptideals, und es gibt daher nach Hilfssatz 2 zu Λ kein äquivalentes Element- (d. h. Hauptideal-) System S.

[13]) Das Beispiel von Anm. [12]) hat mit unserem Problem nichts zu tun, denn es handelt sich ja um die Frage: Gibt es zu gegebenem Λ für jedes $\mathfrak{a}$ ein *i. a. von* $\mathfrak{a}$ *abhängiges* m. a. System $S(\mathfrak{a})$ derart, daß $\mathfrak{a}_\Lambda = \mathfrak{a}_{S(\mathfrak{a})}$ wird?

Haben nun wieder $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ dieselbe Bedeutung wie in § 1, so erhalten wir leicht:

Satz 7. *Für beliebiges* $\mathfrak{a}$ *aus* $\mathfrak{R}$ *sind die i. K. I. im weiteren Sinne von* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ *stets gleich den Erweiterungsidealen der i. K. I. im weiteren Sinne von* $\mathfrak{a}$. — *Bei* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ *sind alle i. K. I. im weiteren Sinne gleichzeitig auch i. K. I. im engeren Sinne.*

Zum Beweis beachte man: Ist $\mathfrak{b}_s$ ein beliebiges i. K. I. im weiteren Sinne von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ mit dem erzeugenden m. a. System Λ_s — $(\mathfrak{b}_s = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S})_{\Lambda_s})$ —, so bilden die Inhalte der zu Λ_s gehörigen endlichen Ideale in $\mathfrak{R}$ jedenfalls ein f. m. a. System Λ von endlichen Idealen, und aus Satz 1 und Satz 3 folgt leicht $\mathfrak{b}_s = (\mathfrak{a}_\Lambda) \cdot \mathfrak{S}$. — Ist andrerseits $\mathfrak{b}$ ein beliebiges i. K. I. im weiteren Sinne von $\mathfrak{a}$, und ist Λ^* ein erzeugendes, vollständiges m. a. System von endlichen Idealen, so bildet, wie mühelos aus Hilfssatz 1 zu entnehmen, die Menge aller Polynome $p(u)$ mit zu Λ^* gehörigem Inhalt in $\mathfrak{S}$ ein m. a. Elementsystem S_s, und man überzeugt sich ohne Schwierigkeit von der Gültigkeit der Gleichung $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{S} = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S})_{S_s}$. — Satz 7 bedeutet den vorläufigen Abschluß der in § 1 begonnenen Untersuchungen.

§ 3.

Verallgemeinerung der Ergebnisse von § 1.

Mit Hilfe des in § 2 eingeführten Begriffs des m. a. Idealsystems Λ kann der Geltungsbereich der Sätze 1 bis 7 wesentlich erweitert werden. $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{P}$ sollen die gleiche Bedeutung haben wie bisher, mit $\mathfrak{Q}$ bezeichnen wir einen beliebigen Quotientenring von $\mathfrak{P}$, mit S_q ein erzeugendes m. a. Elementsystem von $\mathfrak{Q}$ über $\mathfrak{P}$ (also ein Elementsystem aus $\mathfrak{P}$ derart, daß $\mathfrak{Q}$ aus der Menge aller Quotienten $\frac{p}{q}$ $(p \subset \mathfrak{P},\ q \subset S_q)$ besteht). Dann bilden die Inhalte aller zu S_q gehörigen Polynome in $\mathfrak{R}$ ein f. m. a. System Λ'; bedeutet Λ^* das zu Λ' gehörige vollständige m. a. System, so gilt zunächst:

Satz 8. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein beliebiges Ideal aus* $\mathfrak{R}$, *so enthält* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{Q}$ *alle und nur die Polynome* $q(u)$, *deren Inhalt ein Unterideal von* $\mathfrak{a}_{\Lambda^*}$ *ist. — Insbesondere wird stets* $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{Q}) \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{a}_{\Lambda^*}$.

In der Tat, ein beliebiges Polynom $q(u)$ aus $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{Q}$ besitzt eine Darstellung:

$$q(u) = \nu(u)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot p_i(u) \quad (\nu(u) \subset S_q,\ a_i \subset \mathfrak{a},\ p_i(u) \subset \mathfrak{P}).$$

Ist $\mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{d}$ der Inhalt von $\nu(u)$ bzw. $q(u)$ bzw. $\nu(u) \cdot q(u)$, so ergibt sich: $\mathfrak{d} \subseteqq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}^{m+1} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{b}^m \cdot \mathfrak{d} \subseteqq \mathfrak{d} \subseteqq \mathfrak{a}$; $\mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{a}_{\Lambda^*}$ wegen $\mathfrak{b} \subset \Lambda^*$. — Ist andrerseits $c \subset \mathfrak{a}_{\Lambda^*}$, so gibt es ein $\mathfrak{b} \subset \Lambda^*$, für das $(c) \cdot \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a}$ wird, und nach Definition

von Δ^* muß in S_q ein Polynom $\nu(u)$ vorkommen, dessen Inhalt $\mathfrak{c}$ ein Unterideal von $\mathfrak{b}$ ist. Man hat dann:

$$c \cdot \nu(u) = p(u) \subset \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{P}, \quad c = \nu(u)^{-1} \cdot p(u) \subset \mathfrak{a} \cdot \Omega.$$

Aus Satz 8 folgt wegen der für jedes $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ gültigen Gleichung $(\mathfrak{a}_{\Delta^*})_{\Delta^*} = \mathfrak{a}_{\Delta^*}$ [14]): Das System R_{Δ^*} aller Ideale $\mathfrak{a}_{\Delta^*}$ aus $\mathfrak{R}$ wird durch die Zuordnung von Erweiterungs- und Verengungsideal umkehrbar eindeutig auf das System Q_{Δ^*} aller Erweiterungsideale $\mathfrak{a} \cdot \Omega$ ($\mathfrak{a}$ beliebig aus $\mathfrak{R}$) abgebildet. Darüber hinaus erhält man leicht:

Satz 9. *Für das System R_{Δ^*} aller Ideale $\mathfrak{a}_{\Delta^*}$ aus $\mathfrak{R}$ und das System Q_{Δ^*} aller Erweiterungsideale $\mathfrak{a} \cdot \Omega$ gelten genau dieselben Sätze* 2 bis 7, *wie sie oben für das System aller $\mathfrak{R}$-Ideale und das System aller Erweiterungsideale $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ abgeleitet wurden.*

Der Beweis von Satz 3 erfordert so geringe Abänderungen der früheren Beweise, daß wir uns mit einigen Andeutungen begnügen dürfen. Man beachte: a) Es ist stets $\mathfrak{a}_{\Delta^*} \cap \mathfrak{b}_{\Delta^*} = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})_{\Delta^*}$. (Wichtig für die Übertragung von Satz 2). — b) Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\Delta^*}$, und bedeutet $\mathfrak{b}$ ein beliebiges Ideal, $\mathfrak{N}$ ein beliebiges m. a. System von endlichen Idealen aus $\mathfrak{R}$, so ist stets $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})_{\Delta^*} = \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$, $(\mathfrak{a}_{\mathfrak{N}})_{\Delta^*} = (\mathfrak{a}_{\Delta^*})_{\mathfrak{N}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{N}}$. (Wichtig für die Übertragung der Sätze 3 und 7.) [15]) — c) Für das Primärideal $\mathfrak{q}$ aus $\mathfrak{R}$ wird dann und nur dann $\mathfrak{q}_{\Delta^*} = \mathfrak{q}$, wenn das zu $\mathfrak{q}$ gehörige Primideal $\mathfrak{p}$ kein Ideal aus Δ^* enthält. Ist $\mathfrak{a}_{\Delta^*} = \mathfrak{a}$, so wird auch $\mathfrak{q}_{\Delta^*} = \mathfrak{q}$ für jede isolierte Primärkomponente $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{a}$. (Für die Übertragung von Satz 4 und Satz 5.)

Bis jetzt waren wir vom Ringe Ω ausgegangen und hatten mit seiner Hilfe das Idealsystem Δ^* definiert. Man kann aber auch umgekehrt ein ganz beliebiges vollständiges m. a. System Δ^* von endlichen Idealen in $\mathfrak{R}$ auszeichnen und zu Δ^* das vollständige m. a. Elementsystem S_q^* aller Polynome $\nu(u)$ mit zu Δ^* gehörigem Inhalt, sowie den durch S_q^* erzeugten Quotientenring Ω^* von $\mathfrak{P}$ bilden. *Dann gelten jedenfalls für Δ^* und $\Omega = \Omega^*$ die Sätze* 8 *und* 9. — Diese Bemerkung scheint aus dem folgenden Grunde nicht unwichtig:

Ist S^* ein vollständiges m. a. Elementsystem aus $\mathfrak{R}$, und verstehen wir unter $\mathfrak{R}_{S^*}$ den Ring aller Quotienten $\frac{a}{s}$ ($a \subset \mathfrak{R}$, $s \subset S^*$), so entsprechen die sämtlichen Ideale aus $\mathfrak{R}_{S^*}$ umkehrbar eindeutig den Idealen $\mathfrak{a}_{S^*}$ aus $\mathfrak{R}$, und man kann, statt zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ das i. K. I. $\mathfrak{a}_{S^*}$ zu bilden, ebensogut von $\mathfrak{R}$ zum Quotientenring $\mathfrak{R}_{S^*}$ übergehen.

Einem beliebigen vollständigen m. a. Idealsystem Δ^* dagegen läßt sich i. a. nicht in gleicher Weise ein aus Quotienten von $\mathfrak{R}$-Elementen gebildeter

---

[14]) Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß Δ nur endliche Ideale enthält, leicht zu verifizieren. Vgl. § 5, Beweis von Satz 14, Abschnitt b).

[15]) Einfache Verifikationen. Vgl. § 6, Beweis von Satz 16, Abschnitt b).

Ring $\mathfrak{R}_A$. zuordnen. Hier liefert nun auf Grund von Satz 8 und Satz 9 der Polynomquotientenring $\mathfrak{Q}^*$ einen gewissen Ersatz für den fehlenden Ring $\mathfrak{R}_A$.. — Man könnte mit einigem Recht sagen, es handle sich bei der Konstruktion von $\mathfrak{Q}^*$ um die Bildung eines zum Λ^*-Idealsystem gehörigen *„Funktionalrings"* im Sinne von Kronecker. Doch werden wir diese Ausdrucksweise lieber vermeiden, da sie sich nicht genau mit der Terminologie der früheren Beiträge deckt. Die Bedeutung der m. a. Idealsysteme für die Theorie der Kroneckerschen Funktionalringe im Sinne von Beitrag I wird in § 6 genauer untersucht werden.

§ 4.

Eine Zwischenuntersuchung.

Das Ideal $\mathfrak{c}$ möge *zu* $\mathfrak{a}$ *idealprim* genannt werden, wenn $\mathfrak{a} : \mathfrak{c} = \mathfrak{a}$ ist. Dagegen soll, wie üblich, $\mathfrak{c}$ nur dann *zu* $\mathfrak{a}$ *prim* heißen, wenn $\mathfrak{c}$ ein zu $\mathfrak{a}$ primes Element enthält, wenn also $\mathfrak{a} : (c) = \mathfrak{a}$ wird für geeignetes $c \subset \mathfrak{c}$. Bei der Entwicklung der Idealtheorie beliebiger Integritätsbereiche ist es häufig lästig, daß die Begriffe „idealprim" und „prim" schlechtweg verschiedenen Umfang besitzen; bei den Ringen mit Maximalbedingung dagegen, in denen alle Ideale endlich sind, tritt eine solche Schwierigkeit nicht auf, und diese Beobachtung führt auf den Gedanken, ob nicht möglicherweise in jedem Integritätsbereich $\mathfrak{R}$ für jedes *endliche* Ideal $\mathfrak{e}$ aus $\mathfrak{a} : \mathfrak{e} = \mathfrak{a}$ die Existenz eines $c \subset \mathfrak{e}$ mit $\mathfrak{a} : (c) = \mathfrak{a}$ folgt. Daß diese Vermutung mit gewissen Überlegungen aus § 2 eng zusammenhängt, zeigt

Satz 10. *Ist in* $\mathfrak{R}$ *für beliebiges* $\mathfrak{a}$ *jedes zu* $\mathfrak{a}$ *idealprime endliche Ideal stets auch zu* $\mathfrak{a}$ *prim, so sind in* $\mathfrak{R}$ *alle i. K. I. im weiteren Sinne auch i. K. I. im engeren Sinne.*

In der Tat, es sei in $\mathfrak{R}$ irgendein Ideal $\mathfrak{a}$ und irgendein m. a. System Λ gegeben, und es bedeute S das m. a. System aller zu $\mathfrak{a}_\Lambda$ primen Elemente. Dann ist jedenfalls $\mathfrak{a}_S \subseteq \mathfrak{a}_\Lambda$, denn wir haben $(\mathfrak{a}_\Lambda)_S = \mathfrak{a}_\Lambda$ und aus $a \cdot s \subset \mathfrak{a}$ folgt $a \cdot s \subset \mathfrak{a}_\Lambda$, $a \subset \mathfrak{a}_\Lambda$. Andrerseits ist aber auch $\mathfrak{a}_S \supseteq \mathfrak{a}_\Lambda$. Ist nämlich $a \subset \mathfrak{a}_\Lambda$, gilt also eine Beziehung $(a) \cdot \mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{a}$ ($\mathfrak{e} \subset \Lambda$), so ist $\mathfrak{a}_\Lambda : \mathfrak{e} = \mathfrak{a}_\Lambda$ wegen $(\mathfrak{a}_\Lambda)_\Lambda = \mathfrak{a}_\Lambda$; es enthält also $\mathfrak{e}$ nach Voraussetzung ein zu $\mathfrak{a}_\Lambda$ primes Element $s \subset S$, für das selbstverständlich $a \cdot s \subset \mathfrak{a}$ sein muß, d. h. es ist $a \subset \mathfrak{a}_S$. — Mit Rücksicht auf Satz 10 sollen jetzt über die Ringe mit Maximalbedingung hinaus weitere Ringklassen aufgesucht werden, in denen bei endlichen Idealen die Begriffe „idealprim" und „prim" inhaltlich gleichwertig sind. Als Ausgangspunkt für unsere Betrachtungen wählen wir das folgende

Lemma. *Es sei* $\mathfrak{a}$ *ein beliebiges Ideal, das kein Ideal* $\mathfrak{e}$ *(kein Element* a*) aus dem m. a. System* $\Lambda(S)$ *enthält. Dann gibt es stets mindestens ein „maxi-*

males Primoberideal" $\mathfrak{p}$ *von* $\mathfrak{a}$ *„hinsichtlich* Λ *(*S*)", das seinerseits gleichfalls kein* $\mathfrak{e}$ *aus* Λ *(*a *aus* S*) enthält, während in jedem echten Oberideal von* $\mathfrak{p}$ *mindestens ein zu* Λ *gehöriges Unterideal (zu* S *gehöriges Element) auftritt.*

Der Beweis des Lemmas kann im Falle eines Idealsystems Λ genau so geführt werden wie im wohlbekannten Falle eines Elementsystems S[5]). Wesentlich für die entscheidende transfinite Konstruktion ist die folgende Bemerkung: Ist $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_\sigma \subset \cdots$ eine wohlgeordnete Oberidealkette, bei der kein einziges Glied das *endliche* Ideal $\mathfrak{e}$ enthält, so enthält auch die Summe aller $\mathfrak{a}_\sigma$ das Ideal $\mathfrak{e}$ nicht[16]). — Wir definieren jetzt:

Unter einem *element-maximalen* bzw. *ideal-maximalen Primoberideal von* $\mathfrak{a}$ soll ein maximales Primoberideal von $\mathfrak{a}$ hinsichtlich des Systems $\overline{S}$ $(\mathfrak{a})$ bzw. $\overline{\Lambda}$ $(\mathfrak{a})$ aller zu $\mathfrak{a}$ primen Elemente bzw. aller zu $\mathfrak{a}$ idealprimen endlichen Ideale verstanden werden[17]). — Aus dem Lemma folgt sofort:

Jedes Ideal $\mathfrak{c}$, das kein zu $\mathfrak{a}$ primes Element bzw. kein zu $\mathfrak{a}$ idealprimes endliches Ideal enthält, ist seinerseits in mindestens einem element-maximalen bzw. ideal-maximalen Primoberideal von $\mathfrak{a}$ enthalten. — Weiter ergibt sich leicht:

Hilfssatz 3. a) *Zwei verschiedene element-maximale (ideal-maximale) Primoberideale von* $\mathfrak{a}$ *sind stets gegenseitig prim.* b) *Jedes ideal-maximale Primoberideal von* $\mathfrak{a}$ *ist (echtes oder unechtes) Unterideal mindestens eines element-maximalen Primoberideals.* c) *Jedes Element eines element-maximalen Primoberideals von* $\mathfrak{a}$ *liegt in mindestens einem ideal-maximalen Primoberideal.* d) *Ist jedes element-maximale Primoberideal von* $\mathfrak{a}$ *gleichzeitig ideal-maximal, so ist auch umgekehrt jedes ideal-maximale Primoberideal gleichzeitig element-maximal*[18]).

In der Tat, a) ist trivial. Bei b) bzw. c) beachte man, daß ein ideal-maximales Primoberideal von $\mathfrak{a}$ kein zu $\mathfrak{a}$ primes Hauptideal, d. h. kein zu $\mathfrak{a}$ primes Element enthält, bzw. daß jedes Element aus einem element-maximalen Primoberideal von $\mathfrak{a}$ die Basis eines zu $\mathfrak{a}$ nichtprimen Hauptideals darstellt. Behauptung d) ist eine einfache Folgerung aus den Behauptungen a) und b). —

---

[16]) Daß das Lemma nicht dadurch verallgemeinert werden kann, daß man an Stelle eines m. a. Systems Λ von *endlichen* Idealen ein beliebiges m. a. Idealsystem M setzt, zeigt folgendes Beispiel: Es sei $\mathfrak{p}$ ein (sicher nicht endliches) Primideal, das der Gleichung $\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{p}$ genügt, $\mathfrak{q}$ sei ein echtes zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal. Dann bildet $\mathfrak{p}$ für sich allein ein m. a.-System M, und es gibt kein maximales Primoberideal von $\mathfrak{q}$ hinsichtlich M.

[17]) Die element-maximalen Primoberideale von $\mathfrak{a}$ sind identisch mit den maximalen nichtprimen Oberidealen von $\mathfrak{a}$ im Sinne von KRULL[9]) Nr. 7, S. 16. Die ideal-maximalen Primoberideale wurden m. W. bisher noch nirgends eingeführt.

[18]) Der umgekehrte Satz, daß jedes element-maximale Primoberideal von $\mathfrak{a}$ gleichzeitig ideal-maximal sein muß, falls jedes ideal-maximale Primoberideal gleichzeitig element-maximal ist, scheint mir zum mindesten nicht selbstverständlich.

Die Bedeutung der maximalen Primoberideale von $\mathfrak{a}$ für die Ausgangsfragestellung von § 4 zeigt

Satz 11. *Dann und nur dann, wenn in $\mathfrak{R}$ für jedes $\mathfrak{a}$ alle element-maximalen* Primoberideale *gleichzeitig ideal-maximal sind, enthält jedes zu einem beliebigen Ideal $\mathfrak{a}$ idealprime endliche Ideal $\mathfrak{e}$ stets ein zu $\mathfrak{a}$ primes Element.*

Ist nämlich einerseits $\mathfrak{a}:\mathfrak{e} = \mathfrak{a}$, ohne daß $\mathfrak{e}$ ein zu $\mathfrak{a}$ primes Element enthält, so liegt $\mathfrak{e}$ in mindestens einem element-maximalen Primoberideal von $\mathfrak{a}$, das eben wegen $\mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{p}$ nicht auch gleichzeitig ideal-maximal sein kann. Ist andrerseits das Primoberideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}$ element-, aber nicht ideal-maximal, so enthält $\mathfrak{p}$ ein zu $\mathfrak{a}$ idealprimes endliches Ideal $\mathfrak{e}$, das als Unterideal von $\mathfrak{p}$ ausschließlich aus zu $\mathfrak{a}$ nichtprimen Elementen besteht. — Mit Hilfe des Lemmas und des Satzes 11 beweisen wir jetzt:

Satz 12. *Im Ringe $\mathfrak{R}$ ist jedes zu einem beliebigen Ideal $\mathfrak{a}$ idealprime endliche Ideal $\mathfrak{e}$ gleichzeitig zu $\mathfrak{a}$ prim,* a) *wenn es in $\mathfrak{R}$ keine unendliche Folge $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ von gegenseitig primen Primidealen gibt, und* b) *wenn $\mathfrak{R}$ einartig ist, wenn also in $\mathfrak{R}$ kein Primideal ein (von $\mathfrak{R}$ selbst verschiedenes) echtes Oberideal besitzt.*

In der Tat, unter der Voraussetzung a) besitzt ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ nach Hilfssatz 3a) sicher nur endlich viele ideal-maximale Primoberideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$. Ist nun $\mathfrak{p}$ irgendein element-maximales Primoberideal von $\mathfrak{a}$, so muß $\mathfrak{p}$ in einem der Ideale $\mathfrak{p}_i$, etwa in $\mathfrak{p}_1$, enthalten sein, weil es andernfalls nach einem bekannten Schlusse im Widerspruch zu Hilfssatz 3 c) in $\mathfrak{p}$ mindestens ein Element p geben müßte, das in keinem der endlich vielen Primideale $\mathfrak{p}_i$ vorkäme. Aus $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_1$ folgt aber nach Hilfssatz 3 a), b) sofort $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$. D. h. es ist in $\mathfrak{R}$ bei jedem Ideal $\mathfrak{a}$ jedes element-maximale Primoberideal gleichzeitig ideal-maximal, man kann also Satz 11 anwenden.

Es sei andrerseits $\mathfrak{R}$ einartig, $\mathfrak{a}$ sei ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{e}$ ein endliches Ideal, das ausschließlich aus zu $\mathfrak{a}$ nichtprimen Elementen besteht; dann ist $\mathfrak{e}$ nach dem Lemma in mindestens einem element-maximalen Primoberideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}$ enthalten. Wegen der Einartigkeit von $\mathfrak{R}$ ist $\mathfrak{p}$ ein minimales Primoberideal von $\mathfrak{a}$, und wegen der Endlichkeit von $\mathfrak{e}$ muß für hinreichend großes ϱ das endliche Ideal $\mathfrak{e}^\varrho = (c_1, \ldots, c_m)$ in der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen isolierten Primärkomponente $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{a}$ enthalten sein. Nach einer Grundeigenschaft der isolierten Primärkomponenten[9]) gibt es dann zu jedem c_i ein nicht in $\mathfrak{p}$ liegendes r_i, derart, daß $c_i \cdot r_i \subset \mathfrak{a}$ wird, und für $r = r_1 \cdot \ldots \cdot r_m$ haben wir $r \circ \mathfrak{p}$, $r \subset \mathfrak{a}$, $(r) \cdot \mathfrak{e}^\varrho \subseteq \mathfrak{a}$. Es ist also $\mathfrak{a}:\mathfrak{e}^\varrho \neq \mathfrak{a}$ und damit auch $\mathfrak{a}:\mathfrak{e} \neq \mathfrak{a}$, d. h.: Das endliche Ideal $\mathfrak{e}$ ist sicher *nicht* zu $\mathfrak{a}$ idealprim, wenn es kein zu $\mathfrak{a}$ primes Element enthält.

Satz 12a) scheint mir vor allem deshalb bemerkenswert, weil in keinem Ringe, der sich als Durchschnitt von endlich vielen Bewertungsringen be-

liebigen Typs darstellen läßt, eine unendliche Folge $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ von gegenseitig primen Primidealen existiert[19]). Im übrigen sieht man sofort, daß das Ergebnis von Satz 12 a) folgendermaßen verallgemeinert werden kann:

Besitzt in einem beliebigen Ringe $\mathfrak{R}$ ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}$ nur endlich viele ideal-maximale Primobenderideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$, so stellen die $\mathfrak{p}_i$ gleichzeitig die sämtlichen element-maximalen Primobenderideale von $\mathfrak{a}$ dar, und es enthält jedes zu $\mathfrak{a}$ idealprime endliche Ideal $\mathfrak{e}$ ein zu $\mathfrak{a}$ primes Element.

Unsere Resultate zeigen, daß es ziemlich schwierig sein dürfte, ein Ideal $\mathfrak{a}$ zu finden, zu dem ein endliches Ideal $\mathfrak{e}$ existiert, das der Gleichung $\mathfrak{a} : \mathfrak{e} = \mathfrak{a}$ genügt, ohne zu $\mathfrak{a}$ prim zu sein; andrerseits aber reichen sie m. E. doch nicht aus, um die Wahrscheinlichkeit der Vermutung, daß die Begriffe „idealprim" und „prim" bei endlichen Idealen in *allen* Ringen inhaltlich identisch sind, wesentlich zu erhöhen. Auch die Frage, ob etwa *immer* jedes i. K. I. im weiteren Sinne stets auch ein i. K. I. im engeren Sinne darstellt, muß daher trotz Satz 10 völlig offen bleiben.

§ 5.

Δ-Operationen als $'$-Operationen.

In § 5 soll gezeigt werden, daß mit Hilfe des Begriffes des m. a. Systems Δ die in Beitrag I, § 10 gewonnenen Ergebnisse unter starker Vereinfachung der Beweise beträchtlich verallgemeinert werden können[20]). Wie in Beitrag I definieren wir:

Ist jedem ganzen oder nichtganzen Ideal $\mathfrak{a}$ des Integritätsbereichs $\mathfrak{R}$ eindeutig ein Oberideal $\mathfrak{a}'$ zugeordnet, so soll von einer $'$-Operation gesprochen werden, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}$. (2) $\mathfrak{a}' \supseteq \mathfrak{a}$; aus $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$ folgt $\mathfrak{a}' \supseteq \mathfrak{b}'$. (3) $(\mathfrak{a}')' = \mathfrak{a}$.

(4) $(\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}')' = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})'$. (5) $(\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}')' = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})'$. (6) $(\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b}')' = \mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b}'$.

(7) $(a)' = (a)$; $((a) \cdot \mathfrak{a})' = (a) \cdot \mathfrak{a}'$.

Die Formeln (1) bis (7), die einschließlich der Anordnung unverändert aus Beitrag I übernommen wurden, stellen keine untereinander unabhängigen Bedingungen dar. Vielmehr gilt:

Formel (2) *ergibt sich als Spezialfall aus Formel* (4), *wenn man* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ *setzt. Formel* (6) *ist eine einfache Folgerung aus den Formeln* (2) *und* (3).

---

[19]) Der Beweis dieser Behauptung kann z. B. leicht mit Hilfe des „Hauptsatzes" von KRULL[9]) Nr. 41, S. 115 erbracht werden.

[20]) Auf die Einzelheiten der Untersuchungen von Beitrag I wird nicht zurückgegriffen, auch werden die wichtigsten Definitionen kurz wiederholt. Vorausgesetzt wird nur eine gewisse grundsätzliche Vertrautheit mit den Gedankengängen von Beitrag I.

In der Tat, die erste Behauptung ist wegen $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}' + \mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'$ trivial. Ist andrerseits $a \subset (\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b}')'$, so ist nach (3) erst recht $a \subset (\mathfrak{a}')' \cap (\mathfrak{b}')'$ und nach (2) wird $(\mathfrak{a}')' \cap (\mathfrak{b}')' = \mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b}'$. — *Man hat also für eine '-Operation nur die Gültigkeit der Formeln* (1), (3), (4), (5), (7) *zu beweisen.* Dabei sind in den von uns betrachteten Fällen (1) und (3) so gut wie selbstverständlich, (7) macht keine nennenswerten Schwierigkeiten, und die Beweise von (4) und (5) laufen streng parallel. So konzentriert sich im folgenden das Hauptinteresse auf Formel (4), wobei wegen (3) natürlich nur gezeigt werden muß, daß $(\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}')' \subseteq (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})'$ ist [21]). — Wichtiger noch als diese Bemerkungen ist für uns

Satz 13. *Ist im Bereich aller ganzen Ideale von $\mathfrak{R}$ eine den Bedingungen* (1) *bis* (7) *genügende '-Operation erklärt, so kann diese Operation stets in einer und nur einer Weise unter Erhaltung der Allgemeingültigkeit der Formeln* (1) *bis* (7) *auf die nichtganzen Ideale von $\mathfrak{R}$ ausgedehnt werden, und zwar hat man durchweg*

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{g}' \cdot (a^{-1})$$

zu setzen, falls das Ideal $\mathfrak{a}$ in der Form $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} \cdot (a^{-1})$ mit ganzem $\mathfrak{g}$ und ganzem $\mathfrak{a}$ dargestellt werden kann.

Zum Beweis hat man nur zu zeigen, daß die in Satz 13 angegebene Definition der '-Operation für nichtganze Ideale eindeutig ist; die Verifikation der Allgemeingültigkeit der Formeln (1) bis (7) ist dann trivial. Es sei nun $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_1 \cdot (a_1^{-1}) = \mathfrak{g}_2 \cdot (a_2^{-1})$. Dann ist $(a_2) \cdot \mathfrak{g}_1 = (a_1) \cdot \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{h}$ ganz und damit nach der voraussetzungsgemäß für ganze Ideale geltenden Formel (7): $(a_2) \cdot \mathfrak{g}_1' = (a_1) \cdot \mathfrak{g}_2'$, $(a_1^{-1}) \cdot \mathfrak{g}_1' = (a_2^{-1}) \cdot \mathfrak{g}_2'$. — Angesichts von Satz 13 dürfen und wollen wir uns im folgenden, ebenso wie in § 1 bis 4, ausschließlich auf ganze Ideale beschränken.

Satz 14. *Ist in $\mathfrak{R}$ ein festes m. a. Idealsystem Λ gegeben, und ordnen wir jedem Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ das Oberideal $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}_\Lambda$ zu, so entsteht auf diese Weise dann (und selbstverständlich auch nur dann) eine '-Operation, wenn für ein beliebiges Hauptideal (a) aus $\mathfrak{R}$ stets $(a) = (a)$ wird.*

Zum Beweis beachte man: a) Die Gültigkeit der Formeln (1) und (3) ist selbstverständlich. — b) Es sei $a \subset (\mathfrak{a}_\Lambda + \mathfrak{b}_\Lambda)_\Lambda$. Dann gibt es in Λ ein $\mathfrak{e}'$, für das $(a) \cdot \mathfrak{e}' \subseteq \mathfrak{a}_\Lambda + \mathfrak{b}_\Lambda$ wird, und wegen der Endlichkeit von $\mathfrak{e}'$ gilt sogar eine Beziehung $(a) \cdot \mathfrak{e}' \subseteq \bar{\mathfrak{e}}_1 + \bar{\mathfrak{e}}_2$, wobei $\bar{\mathfrak{e}}_1$ bzw. $\bar{\mathfrak{e}}_2$ ein geeignetes endliches Unterideal von $\mathfrak{a}_\Lambda$ bzw. $\mathfrak{b}_\Lambda$ bedeutet. Weiter existieren in Λ zwei Ideale $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ derart, daß $\bar{\mathfrak{e}}_1 \cdot \mathfrak{e}_1 \subseteq \mathfrak{a}$, $\bar{\mathfrak{e}}_2 \cdot \mathfrak{e}_2 \subseteq \mathfrak{b}$ wird. Setzt man nun $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}' \cdot \mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2$,

[21]) Hier zeigt sich ein wichtiger Unterschied gegenüber LORENZEN [6]). Denn dort wird von einer '-Operation weder die Gültigkeit der Formel (3) noch der Formel (4) noch auch nur der Formel (2) gefordert. (Daß bei LORENZEN von Idealsystemen statt von '-Operationen die Rede ist, bedeutet nur einen unwesentlichen formalen Unterschied.)

so gehört $\mathfrak{e}$ zu Λ und es ist $(a)\cdot\mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$. D. h. aber, es ist $(\mathfrak{a}_\Lambda+\mathfrak{b}_\Lambda)_\Lambda \subseteq (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})_\Lambda$ — Formel (4)! Der Beweis von Formel (5) wird nach genau dem gleichen Schema erbracht. — c) Die Gültigkeit der ersten Formel (7) wurde ausdrücklich vorausgesetzt, man hat also nur noch die zweite Formel (7) zu beweisen. Zunächst ist jedenfalls $(a)\cdot\mathfrak{a}_\Lambda \subseteq ((a)\cdot\mathfrak{a})_\Lambda$. Ist andrerseits $b \subset ((a)\cdot\mathfrak{a})_\Lambda$, so gibt es in Λ ein $\mathfrak{e}$ derart, daß $(b)\cdot\mathfrak{e} \subseteq (a)\cdot\mathfrak{a}$ wird, und daraus folgt wegen $(a)_\Lambda = (a)$ sofort $b = a\cdot c$, $c \subset \mathfrak{a}_\Lambda$, $b \subset (a)\cdot\mathfrak{a}_\Lambda$.

Aus Satz 14 ergibt sich insbesondere:

Satz 15. *Ist $\mathfrak{R}$ eine endliche diskrete Hauptordnung, so stellt die Λ-Idealbildung dann und nur dann eine '-Operation dar, wenn Λ kein Unterideal eines minimalen Ringprimideals enthält.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Grundeigenschaften der endlichen diskreten Hauptordnungen [22]). — Das Hauptresultat von Beitrag I, § 10, wo „Λ-Operationen" in ganz abgeschlossenen Ringen mit Maximalbedingung betrachtet wurden, läßt sich leicht als Spezialfall von Satz 15 auffassen. Man hat dabei nur zu beachten, daß jeder ganz abgeschlossene Integritätsbereich mit Maximalbedingung eine spezielle endliche diskrete Hauptordnung ist, und sich zu überzeugen, daß jede „Λ-Operation" im Sinne von Beitrag I, § 10 auch eine Λ-Operation im Sinne des Textes ist. — Die Richtigkeit dieser letzteren Tatsache aber ergibt sich unmittelbar aus der folgenden Bemerkung:

Es sei $\mathfrak{R}$ ein beliebiger Ring mit Maximalbedingung, $\overline{\Lambda}$ sei eine Menge von Primidealen aus $\mathfrak{R}$, zu der gleichzeitig mit $\mathfrak{p}$ stets auch jedes echte Primoberideal von $\mathfrak{p}$ gehört. Dann bildet die Menge aller der Ideale, die in keinem nicht in $\overline{\Lambda}$ vorkommenden Primideal enthalten sind, ein (vollständiges) m. a. System Λ, und man erhält bei beliebig vorgegebenem $\mathfrak{a}$ das Ideal $\mathfrak{a}_\Lambda$ einfach dadurch, daß man in einer Primärkomponentenzerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ alle die Primärideale $\mathfrak{q}_i$ wegläßt, deren zugehörige Primideale in $\overline{\Lambda}$ vorkommen.

Die zu Beginn des Paragraphen angekündigte Einordnung der Ergebnisse von Beitrag I, § 10 in unsere allgemeiner Untersuchungen ist also tatsächlich ohne nennenswerte Schwierigkeit durchführbar.

§ 6.

w_Λ-Operationen.

Auch bei den folgenden Untersuchungen knüpfen wir an Beitrag I an. Es sollen die Ergebnisse des damaligen § 11 in geeigneter Fassung auf beliebige Integritätsbereiche ausgedehnt werden. Im Anschluß an P. Lorenzen [6]) be-

[22]) Zur Theorie der endlichen diskreten Hauptordnungen vgl. z. B. Krull [9]) Nr. 37.

zeichnen wir eine '-Operation als *endlichartig*, wenn bei jedem Ideal $\mathfrak{a}$ ausnahmslos $\mathfrak{a}'$ gleich der Summe aller $\mathfrak{e}'$ ($\mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{a}$) ist. Eine durch ein m. a. System Λ definierte '-Operation ist offenbar stets endlichartig. Unser nächstes Ziel ist der Beweis von

Satz 16. *Es sei im Ringe $\mathfrak{R}$ eine feste endlichartige '-Operation gegeben, die etwa durch den Buchstaben w charakterisiert werden möge*[23]*, $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}_w$. Ist dann Λ irgendein m. a. Idealsystem aus $\mathfrak{R}$, das der Gleichung $(a)_\Lambda = (a)$ für jedes a genügt, so stellt auch die Bildung von $\mathfrak{a}_{w_\Lambda} = (\mathfrak{a}_w)_\Lambda$ in $\mathfrak{R}$ eine endlichartige '-Operation dar.*

Beim Beweis von Satz 16 stützen wir uns vor allem auf den folgenden, bereits in Beitrag I gelegentlich benutzten

Hilfssatz 4. *Bei jeder '-Operation ist für beliebiges $\mathfrak{a}$ und endliches $\mathfrak{e}$ stets $(\mathfrak{a}' : \mathfrak{e})' = \mathfrak{a}' : \mathfrak{e}$.*

In der Tat, ist etwa $\mathfrak{e} = (e_1, \ldots, e_n)$, und lassen wir für den Augenblick auch nichtganze Ideale zur Betrachtung zu, so haben wir:

$$\mathfrak{a}' : \mathfrak{e} = (\mathfrak{a}' \cdot e_1^{-1}) \cap (\mathfrak{a}' \cdot e_2^{-1}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{a}' \cdot e_n^{-1}) \cap \mathfrak{R},$$

und aus den Grundformeln der '-Operationen ergibt sich sofort:

$$(\mathfrak{a}' \cdot e_i^{-1})' = \mathfrak{a}' \cdot e_i^{-1}; \quad \mathfrak{R}' = \mathfrak{R};$$

$$(\mathfrak{a}' : \mathfrak{e})' = ((\mathfrak{a}' \cdot e_1^{-1}) \cap (\mathfrak{a}' \cdot e_2^{-1}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{a}' \cdot e_n^{-1}) \cap \mathfrak{R})'$$
$$= (\mathfrak{a}' \cdot e_1^{-1}) \cap (\mathfrak{a}' \cdot e_2^{-1}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{a}' \cdot e_n^{-1}) \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{a} : \mathfrak{e}.$$

Wir wenden uns jetzt zum Beweise von Satz 16 selbst.

a) Daß $\mathfrak{R}_{w_\Lambda} = \mathfrak{R}$ wird, und daß aus $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$ stets $\mathfrak{a}_{w_\Lambda} \supseteq \mathfrak{b}_{w_\Lambda}$ folgt, (Formel (1) bzw. (3)), ist trivial. Ferner ergibt sich sofort:

$$(\mathfrak{a} \cdot (a))_{w_\Lambda} = ((\mathfrak{a} \cdot (a))_w)_\Lambda = (\mathfrak{a}_w \cdot (a))_\Lambda = (\mathfrak{a}_w)_\Lambda \cdot (a) = \mathfrak{a}_{w_\Lambda} \cdot (a), \text{ — Formel (7)!}$$

b) Von den Formeln (4) und (5) braucht wegen der Gleichartigkeit der nötigen Überlegungen nur die eine, etwa die Beziehung $(\mathfrak{a}_{w_\Lambda} + \mathfrak{b}_{w_\Lambda})_{w_\Lambda} \subseteq (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})_{w_\Lambda}$, bewiesen zu werden. — Zunächst hat man jedenfalls: $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})_{w_\Lambda} = ((\mathfrak{a} + \mathfrak{b})_w)_\Lambda = ((\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_w)_\Lambda = (\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_{w_\Lambda}$. Ist ferner $(\mathfrak{a}_{w_\Lambda} + \mathfrak{b}_{w_\Lambda})_w \subseteq (\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_{w_\Lambda}$, so ist auch

$$(\mathfrak{a}_{w_\Lambda} + \mathfrak{b}_{w_\Lambda})_{w_\Lambda} = ((\mathfrak{a}_{w_\Lambda} + \mathfrak{b}_{w_\Lambda})_w)_\Lambda \subseteq ((\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_{w_\Lambda})_\Lambda = (\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_{w_\Lambda}.$$

Man braucht also nur $(\mathfrak{a}_{w_\Lambda} + \mathfrak{b}_{w_\Lambda})_w \subseteq (\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_{w_\Lambda}$ zu beweisen. Sei etwa $c \subset (\mathfrak{a}_{w_\Lambda} + \mathfrak{b}_{w_\Lambda})_w$. Dann ist wegen der Endlichartigkeit der w-Operation

[23]) Der Buchstabe w wird zunächst nur benutzt, um mit der Bezeichnungsweise von Beitrag I in Übereinstimmung zu bleiben. Daß die zugrunde gelegte '-Operation eine *Wertidealoperation* ist, wird [implizite, vgl. Anm. [25])] erst von Satz 17 ab vorausgesetzt.

jedenfalls $c \subset \bar{e}_w$ für ein geeignetes endliches Unterideal $\bar{e}$ von $\mathfrak{a}_{w_\Lambda} + \mathfrak{b}_{w_\Lambda}$. Zu $\bar{e}$ aber gibt es in dem m. a. System Λ ein $\mathfrak{e}$, derart, daß $\bar{e} \cdot \mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w$ wird. Wir haben somit: $c \subset ((\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w) : \mathfrak{e})_w \subseteq ((\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_w : \mathfrak{e})_w = (\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_w : \mathfrak{e} \subseteq ((\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_w)_\Lambda = (\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_{w_\Lambda}$. Fertig!

c) Nach a) und b) ist die w_Λ-Operation eine $'$-Operation, weil für sie die Formeln (1) bis (7) von § 5 gelten. Die w_Λ-Operation ist aber auch endlichartig. Ist nämlich $c \subset \mathfrak{a}_{w_\Lambda} = (\mathfrak{a}_w)_\Lambda$, so gibt es wegen der Endlichartigkeit der Λ-Operation jedenfalls ein $\bar{e} = (e_1, \ldots, e_n) \subseteq \mathfrak{a}_w$, derart, daß bereits $c \subset \bar{e}_\Lambda$, und zu jedem e_i existiert wegen der Endlichartigkeit der w-Operation ein $\bar{e}_i \subseteq \mathfrak{a}$ für das $e_i \subset (\bar{e}_i)_w$. Setzen wir nun $\bar{e}^* = \bar{e}_1 + \cdots + \bar{e}_n$, so wird offenbar $\bar{e}^* \subseteq \mathfrak{a}$, $c \subset (\bar{e}^*)_{w_\Lambda}$.

Im Falle eines ganz abgeschlossenen Integritätsbereiches $\mathfrak{R}$ bezeichneten wir in Beitrag I eine $'$-Operation als „*arithmetisch brauchbar*", wenn für beliebiges endliches $\bar{e}$ aus $\bar{e} \cdot \mathfrak{a} \subseteq (\bar{e} \cdot \mathfrak{b})'$ stets $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}'$ folgt [24]). Wir beweisen nun unter Benutzung der in Satz 16 eingeführten Bezeichnungen:

Satz 17. *Ist bei ganz abgeschlossenem $\mathfrak{R}$ die w-Operation arithmetisch brauchbar, so ist es auch die w_Λ-Operation.*

In der Tat, ist $\bar{e} \cdot \mathfrak{a} \subseteq (\bar{e} \cdot \mathfrak{b})_{w_\Lambda}$, so ist erst recht $\bar{e} \cdot (a) \subseteq (\bar{e} \cdot \mathfrak{b})_{w_\Lambda}$ für jedes $a \subset \mathfrak{a}$, und damit $\bar{e} \cdot (a) \cdot \mathfrak{e} \subseteq (\bar{e} \cdot \mathfrak{b})_w$ für geeignetes $\mathfrak{e}$ aus Λ. Wegen der arithmetischen Brauchbarkeit der w-Operation folgt daraus weiter: $(a) \cdot \mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{b}_w$, $a \subset \mathfrak{b}_{w_\Lambda}$. —

Von jetzt ab setzen wir durchweg voraus, daß $\mathfrak{R}$ ganz abgeschlossen und die w-Operation arithmetisch brauchbar ist. Bedeutet $\mathfrak{K}$ den Quotientenkörper von $\mathfrak{R}$, $\widetilde{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}(u)$ einen einfach transzendenten Oberkörper von $\mathfrak{K}$, so entspricht sowohl der w- als auch der w_Λ-Operation in $\widetilde{\mathfrak{K}}$ ein bestimmter „KRONECKERscher *Funktionalring*" $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$ bzw. $\widetilde{\mathfrak{M}}_{w_\Lambda}$; dabei besteht $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$ bzw. $\widetilde{\mathfrak{M}}_{w_\Lambda}$ aus allen und nur den Polynomquotienten $\dfrac{a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n}{b_0 + b_1 u + \cdots + b_m u^m}$, bei denen $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \subseteq (b_0, b_1, \ldots, b_m)_w$ bzw. $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \subseteq (b_0, b_1, \ldots, b_m)_{w_\Lambda}$ ist, und es wird $\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_w \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{a}_w$, $\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_{w_\Lambda} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{a}_{w_\Lambda}$ für jedes $\mathfrak{R}$-Ideal $\mathfrak{a}$ [25]).

---

[24]) In der Ausdrucksweise von LORENZEN [6]) wäre $\mathfrak{R}$ als *$'$-abgeschlossen* zu bezeichnen.

[25]) Daß auch für die nichtendlichen Ideale von $\mathfrak{R}$ stets $\mathfrak{a}_w = \mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_w \cap \mathfrak{K}$ ($\mathfrak{a}_{w_\Lambda} = \mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_{w_\Lambda} \cap \mathfrak{K}$) sein muß, folgt aus der Endlichartigkeit der w- (w_Λ-) Operation. — Aus der Allgemeingültigkeit der Formel $\mathfrak{a}_w = \mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_w \cap \mathfrak{K}$ ergibt sich leicht, *daß jede arithmetisch brauchbare, endlichartige w-Operation eine Wertidealoperation sein muß.* Sind nämlich $\widetilde{\mathfrak{B}}_1, \widetilde{\mathfrak{B}}_2, \ldots, \widetilde{\mathfrak{B}}_\tau, \ldots$ die sämtlichen Bewertungsoberringe von $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$ im zugehörigen Quotientenkörper $\widetilde{\mathfrak{K}}$ und setzt man durchweg $\mathfrak{B}_\tau = \widetilde{\mathfrak{B}}_\tau \cap \mathfrak{K}$, so wird all-

Satz 18. *$\widetilde{\mathfrak{M}}_{w_\Lambda}$ ist gerade derjenige Quotientenring von $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$, der durch das f. m. a. System aller Polynome $p(u) = e_0 + e_1 u + \cdots + e_m u^m$ mit zu Λ gehörigem Inhalt erzeugt wird.*

Zum Beweis hat man nur zu beachten: a) Wegen $\mathfrak{a}_{w_\Lambda} \supseteq \mathfrak{a}_w$ ist jedenfalls $\widetilde{\mathfrak{M}}_{w_\Lambda} \supseteq \widetilde{\mathfrak{M}}_w$. — b) Ist $(e_0, e_1, \ldots, e_m)$ ein Ideal aus Λ, so ist $(e_0, e_1, \ldots, e_m)_\Lambda = \mathfrak{R}$ und damit $\dfrac{1}{e_0 + e_1 u + \cdots + e_m u^m} \subset \mathfrak{M}_{w_\Lambda}$ nach Definition von $\widetilde{\mathfrak{M}}_{w_\Lambda}$. — c) Ist $\dfrac{a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n}{b_0 + b_1 u + \cdots + b_m u^m} \subset \widetilde{\mathfrak{M}}_{w_\Lambda}$ und somit $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \subseteq (b_0, b_1, \ldots, b_m)_{w_\Lambda}$, so gibt es in Λ ein Ideal $(e_0, e_1, \ldots, e_r)$, derart, daß $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \cdot (e_0, e_1, \ldots, e_r) \subseteq (b_0, b_1, \ldots, b_m)_w$ wird. D. h. aber, es ist $\dfrac{a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n}{b_0 + b_1 u + \cdots + b_m u^m} \cdot (e_0 + e_1 u + \cdots + e_r u^r) \subset \widetilde{\mathfrak{M}}_w$, und es gehört somit wegen $e_0 + e_1 u + \cdots + e_r u^r \subset S_\Lambda$ sicher $\dfrac{a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n}{b_0 + b_1 u + \cdots + b_m u^m}$ zu dem durch S_Λ erzeugten Quotientenring von $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$.

Satz 18 läßt sich in gewissem Sinne umkehren:

Satz 19. *Es sei S_u ein beliebiges m. a. System von Polynomen $p(u) = e_0 + e_1 u + \cdots + e_r u^r$ aus $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$, Λ^* sei das vollständige m. a. System aller der endlichen Ideale aus $\mathfrak{R}$, die den Inhalt mindestens eines zu S_u gehörigen Polynoms enthalten, $\widetilde{\mathfrak{R}}$ bedeute den durch S_u erzeugten Quotientenring von $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$. Genügt dann $\widetilde{\mathfrak{R}}$ der Gleichung $\widetilde{\mathfrak{R}} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{R}$, so definiert Λ^* in $\mathfrak{R}$ eine arithmetisch brauchbare w_{Λ^*}-Operation, deren zugeordneter* Kronecker*scher Funktionalring $\widetilde{\mathfrak{R}} = \widetilde{\mathfrak{M}}_{w_{\Lambda^*}}$ ist.*

a) Um zu beweisen, daß zu Λ^* in $\mathfrak{R}$ eine arithmetisch brauchbare w_{Λ^*}-Operation gehört, braucht man nach Satz 16 und 17 nur zu zeigen, daß durchweg $(a)_{\Lambda^*} = (a)$ ist. Sei nun $c \subset (a)_{\Lambda^*}$, also $(c) \cdot \mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{a}$ für geeignetes $\mathfrak{e}$ aus Λ^*; dann gibt es in S_u ein Polynom $p(u)$, dessen Inhalt in $\mathfrak{e}$ enthalten ist, so daß $\dfrac{c}{a} \cdot p(u) = q(u)$ lauter zu $\mathfrak{R}$ gehörige Koeffizienten besitzt und somit

---

gemein $\mathfrak{a}_w = \mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_w \cap \mathfrak{R} = \underset{\tau}{\Delta}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_\tau)$. Denn aus den Grundeigenschaften der Bewertungsringe folgt sofort $\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{B}}_\tau \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_\tau$, und nach Beitrag I, S. 555, wird $\mathfrak{a} = \underset{\tau}{\Delta} \mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{B}}_\tau$ für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\widetilde{\mathfrak{M}}$. Man hat also: $\mathfrak{a}_w = \mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_w \cap \mathfrak{R} = (\underset{\tau}{\Delta}(\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_w \cdot \widetilde{\mathfrak{B}}_\tau)) \cap \mathfrak{R} = (\underset{\tau}{\Delta}(\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{B}}_\tau)) \cap \mathfrak{R} = \underset{\tau}{\Delta}(\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{B}}_\tau \cap \mathfrak{R}) = \underset{\tau}{\Delta}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_\tau)$. — [Beweis zwar für die Textuntersuchungen unwesentlich, aber kurz rekapituliert, da der erst in Lorenzen[6]) (S. 547 f.) bewiesene Satz in Beitrag I noch fehlte.]

sicher in $\tilde{\mathfrak{M}}_w$ vorkommt. Daraus folgt aber sofort: $\frac{c}{a} = \frac{q(u)}{p(u)} \subset \tilde{\mathfrak{R}} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{R}$, $c \subset (a)$. Die Bedingung $(a)_{\Lambda^*} = (a)$ ist also erfüllt.

b) Nach Satz 18 ist jedenfalls $\tilde{\mathfrak{M}}_{w_{\Lambda^*}} \supseteq \tilde{\mathfrak{R}}$; es muß aber auch $\tilde{\mathfrak{R}} \supseteq \tilde{\mathfrak{M}}_{w_{\Lambda^*}}$ sein. Ist nämlich $q(u)$ irgendein u-Polynom mit zu Λ^* gehörigem Inhalt $\mathfrak{e}$, so gibt es in S_u ein Polynom $p(u)$, dessen Inhalt ein Unterideal von $\mathfrak{e}$ darstellt, und aus der Definition von $\tilde{\mathfrak{M}}_w$ folgt sofort, daß $p(u)$ in $\tilde{\mathfrak{M}}_w$ durch $q(u)$ teilbar ist. — Satz 18 und Satz 19 lassen sich zusammenfassen zu

Satz 20. *Die sämtlichen w_Λ-Operationen, die aus einer festen, arithmetisch brauchbaren, endlichartigen w-Operation abgeleitet werden können, entsprechen umkehrbar eindeutig denjenigen Quotientenringen von $\tilde{\mathfrak{M}}_\Lambda$, die durch m. a. Systeme von u-Polynomen erzeugt werden können und mit $\mathfrak{R}$ den genauen Durchschnitt $\mathfrak{R}$ haben.*

Satz 16 bis 20 stellen zusammengenommen eine wichtige und in gewissem Sinne abschließende Verallgemeinerung der Ergebnisse von Beitrag I, § 11 dar, wo mit der damaligen, weniger günstigen Definition der Λ-Operationen nur der Fall der ganz abgeschlossenen Integritätsbereiche mit Maximalbedingung erledigt werden konnte. Auch die Sätze von Beitrag I, § 12 lassen sich unter Satz 16 bis 20 unterordnen. Man hat nur als w-Operation speziell die — nach Lorenzen stets endlichartige [26]) — b-Operation zu wählen und sich zu überzeugen, daß jede b_Λ-Operation im Sinne von Beitrag I nicht nur mit Hilfe einer geeigneten Primidealmenge, sondern auch mit Hilfe eines geeigneten m. a. Systems Λ aus $\mathfrak{R}$ definiert werden kann. Im übrigen erscheinen die Ergebnisse von Beitrag I, § 12 von dem nunmehr erreichten Standpunkt aus insofern als unvollkommen, als damals die b_Λ-Operationen *nur* auf dem Umweg über den Funktionalring $\tilde{\mathfrak{M}}_b$ eingeführt werden konnten, während wir jetzt imstande sind, jede beliebige w_Λ-Operation unmittelbar in $\mathfrak{R}$ zu definieren. Auch die Bestimmung *aller* der Oberringe von $\tilde{\mathfrak{M}}_w$, die Funktionalringe von w_Λ-Operationen sind, bedeutet selbst im Spezialfall $\tilde{\mathfrak{M}}_w = \tilde{\mathfrak{M}}_b$ einen wesentlichen Fortschritt über Beitrag I hinaus.

Zum Schlusse sei noch darauf hingewiesen, daß die Sätze 13 und 14 von § 5 sowie Hilfssatz 4 und die Sätze 16 und 17 von § 6 einschließlich ihrer Beweise wörtlich auch dann noch gelten, wenn man als Ausgangsidealsystem nicht wie bisher die üblichen „Dedekindschen" Ideale, sondern die „*s-Ideale*" im Sinne von P. Lorenzen [6]) wählt. Man hat dann nur bei der Idealdefinition die Forderung, daß ein Ideal gleichzeitig mit α und β stets auch $\alpha + \beta$ enthalten soll, wegzulassen und die Summe $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ bzw. das Produkt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ gleich

[26]) Da nämlich die endlichartige Prüfersche a-Operation nach Lorenzen eine w-Operation ist [vgl. Anm. [25])], muß sie notwendig mit der b-Operation identisch sein.

der Vereinigungsmenge von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bzw. gleich der Menge aller Produkte $\alpha \cdot \beta$ ($\alpha \subset \mathfrak{a}$, $\beta \subset \mathfrak{b}$) zu setzen [27]). Im übrigen braucht auch an den zugrunde gelegten Definitionen gar nichts geändert zu werden. Der Fall der Dedekindschen Ideale ordnet sich in den erweiterten Rahmen von selbst ein, da, wie unmittelbar zu sehen, der Übergang von den s- zu den Dedekindschen Idealen eine $'$-Operation im Sinne von § 5 darstellt.

Das Hauptergebnis des verallgemeinerten Ansatzes ist die Feststellung, *daß die Sätze* 13, 14, 16, 17 *sowie Hilfssatz* 4 *nicht nur für Integritätsbereiche, sondern darüber hinaus auch für beliebige* (kommutative, multiplikativ geschriebene) *Halbgruppen gelten.*

Denn die Einführung der s-Ideale ist in jeder Halbgruppe möglich, und es wird bei den einschlägigen Sätzen einschließlich ihrer Beweise nirgends von der Addition der Ringelemente Gebrauch gemacht. — Was die nicht unmittelbar auf Halbgruppen übertragbaren Sätze 18 bis 20 angeht, so gibt es zwar ein Theorem, das im Sinne der Lorenzenschen Theorie der Idealbrüche ein genaues Gegenstück zu Satz 20 darstellt. Aber seine Formulierung und sein Beweis erfordern verhältnismäßig umfangreiche Vorbereitungen. Wir gehen daher auf diesen Punkt hier nicht weiter mehr ein, behalten uns aber vor, in einem späteren Beitrag in größerem Zusammenhang ausführlich auf ihn zurückzukommen.

---

[27]) Ein endliches s-Ideal $\mathfrak{e} = (e_1, \ldots e_n) = (e_1) + \cdots + (e_n)$ besteht nach dieser Definition aus der Menge aller Produkte $a \cdot e_i$ (a bel. aus $\mathfrak{R}$, $i = 1, \ldots, n$).

(Eingegangen am 25. April 1942.)

Zur Theorie der Randwertaufgaben der Differentialgleichung $\Delta\Delta U = 0$.

Von

Kurt Schröder in Berlin.

Von großer Bedeutung für die mathematische Physik ist die Frage nach der Existenz einer Funktion U, die in einem einfach zusammenhängenden Gebiet R oder in dem Äußeren R_a eines solchen Gebietes — nur derartige Gebiete sollen hier betrachtet werden — mit ihren partiellen Ableitungen bis zur vierten Ordnung stetig ist und dort der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta U = 0$$

genügt, deren partielle Ableitungen erster Ordnung ferner in dem durch seine Berandung S abgeschlossenen Gebiet R bzw. R_a stetig sind und auf S vorgeschriebene Werte annehmen.

Das innere Problem für den ebenen Fall wurde in der Literatur bereits von verschiedenen Autoren mehr oder weniger vollständig behandelt, und zwar von S. Zaremba[1]) und A. Korn[2]) mit sukzessiven Approximationen, von A. Haar[3]), J. Hadamard[4]) und G. Lauricella[5]) mit Integralgleichungen und von W. Ritz[6]) und K. Friedrichs[7]) mit den direkten Methoden der

[1]) S. Zaremba, L'équation biharmonique et une classe remarquable de fonctions fondamentales harmoniques. Bull. de l'ac. des sc. de Cracovie, 1907, S. 147–196.

[2]) A. Korn, Sur l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Ann. de l'éc. norm. 25 (1908), S. 529–583.

[3]) A. Haar, Die Randwertaufgabe der Differentialgleichung $\Delta\Delta U = 0$. Göttinger Nachr. 1907, S. 280–287.

[4]) J. Hadamard, Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Mém. sav. étrang. (2) 33 (1908), Nr. 4.

[5]) G. Lauricella, Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Acta math. 32 (1909), S. 201–256. (Diese Arbeit wurde 1906 bereits als Preisschrift der Pariser Akademie eingereicht.)

[6]) W. Ritz, Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Randwertaufgaben. Göttinger Nachr. 1908, S. 236–248; Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. Journ. f. Math. 135 (1908), S. 1–61.

[7]) K. Friedrichs, Die Randwert- und Eigenwertprobleme aus der Theorie der elastischen Platten (Anwendung der direkten Methoden der Variationsrechnung). Math. Annalen 98 (1928), S. 205–247.

Variationsrechnung. Das dazugehörige äußere Problem wurde von G. Lauricella[8]) unter Benutzung von Integralgleichungen untersucht. Die von ihm gegebene Lösung ist aber insofern unbefriedigend, worauf zuerst N. Muschelisvili[9]) hingewiesen hat, als es neben ihr andere von dem Lauricellaschen Verfahren nicht erfaßte Lösungen geben kann, die weniger stark als sie im Unendlichen anwachsen.

Im räumlichen Fall ist bisher lediglich das innere Problem von S. Zaremba[10]), A. Korn[11]) und schließlich von G. Lauricella[12]) im Anschluß an Untersuchungen von J. Fredholm[13]) über das Hauptproblem der Elastizitätstheorie behandelt worden.

In der vorliegenden Arbeit sollen die erwähnten eleganten Untersuchungen von Lauricella wieder aufgenommen werden, zunächst mit dem Ziel, eine Reihe von darin vorhandenen Lücken auszufüllen, die Lösung für das noch nicht behandelte äußere räumliche Problem zu gewinnen und Eindeutigkeitssätze aufzustellen. Sodann aber war unser Bestreben darauf gerichtet, mit möglichst geringen Voraussetzungen über die Berandung S und die vorgegebenen Randwerte auszukommen. Die vorgenommene Erweiterung der Voraussetzungen ist jedoch nicht Selbstzweck, sondern sie dient dazu, eine Reihe von neuen Sätzen aufzustellen, die die Grundlage für einen sowohl für die allgemeine Theorie der biharmonischen Randwertaufgaben als auch für die Anwendungen wichtigen, in einer folgenden Arbeit zu beweisenden Satz bilden, welcher hinreichende Bedingungen für die Existenz der partiellen Ableitungen n-ter Ordnung von U am Rande S angibt.

Bei den Beweisen unserer Sätze können wir Methoden verwenden, wie sie in neuerer Zeit in der Potentialtheorie von J. Schauder[14]) und O. D. Kellog[15]) entwickelt wurden.

---

[8]) G. Lauricella, l. c. Anm. [5]).

[9]) N. Muschelišvili, Sur l'intégration de l'équation biharmonique. Bull. de l'ac. des sc. de Russie (6) 13 (1919), S. 663–686; vgl. auch N. Muschelišvili, Applications des intégrales analogues à celles de Cauchy à quelques problèmes de la physique mathématique, Tiflis 1922, insbes. S. 98–101.

[10]) S. Zaremba, l. c. Anm. [1]).

[11]) A. Korn, Allgemeine Lösung des biharmonischen Problems im Raume. Bull. de l'ac. des sc. de Cracovie 1907, S. 837–896.

[12]) G. Lauricella, Sulla integrazione dell'equazione $\Delta^4 V = 0$. Rendiconti Roma 16, II (1907), S. 373–383.

[13]) J. Fredholm, Solution d'un problème fondamental de la theorie de l'elasticité. Arkiv för Mat. Astron. och Fys. 2, Nr. 28 (1906).

[14]) J. Schauder, Potentialtheoretische Untersuchungen. Erste Abhandlung. Math. Zeitschr. 33 (1931), S. 602–640.

[15]) O. D. Kellog, On the derivations of harmonic functions on the boundary. Transactions of the American math. soc. 33 (1931), S. 486–510.

§ 1.

Die Regularitätsvoraussetzungen über die Berandung.

1. Von der Berandung S des räumlichen Gebietes R setzen wir zunächst voraus, daß sie in jedem Punkt eine Tangentialebene hat und daß es zu jedem ihrer Punkte p eine solche Umgebung $\mathfrak{U}(p)$ gibt, daß die darin enthaltene Teilmenge S_p von S in einem rechtwinklig-kartesischen Bezugssystem x, y, z, bei dem die x, y-Ebene mit der Tangentialebene von S im Punkte p identisch ist, sich eindeutig in der Form

$$z = \varphi(x, y)$$

darstellen läßt. Dabei sollen die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ stetig sein und einer in p gleichmäßigen Hölderbedingung (im folgenden kurz H-Bedingung genannt) genügen, so daß für irgendeinen weiteren Punkt q aus S_p

$$|D\varphi(q) - D\varphi(p)| \leqq A t^{\lambda} \qquad (0 < \lambda < 1) \tag{1}$$

mit von p unabhängigen Konstanten A und λ gilt, wenn t die Projektion der Strecke $\overline{pq}$ auf die Tangentialebene im Punkte p ist und unter D ein Symbol für die Bildung einer partiellen Ableitung erster Ordnung verstanden wird.

Es existiert dann gleichmäßig für alle Punkte p von S eine solche positive Zahl ϱ_0, daß die lokale Flächendarstellung $z = \varphi(x, y)$ in p auf der ganzen Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leqq \varrho_0^2$ definiert ist. Als Umgebung $\mathfrak{U}(p)$ kann man daher für jeden Punkt p eine Kugel K_{ϱ_0} mit dem festen Radius ϱ_0 und dem Mittelpunkt p wählen.

Weiter sei für S eine Flächenfunktion $f(p)$ gegeben. In der Umgebung von p ist sie als Funktion von x, y darstellbar. Ihr werden in p die Tangentialableitungen

$$\frac{\partial f(p)}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(p)}{\partial y}$$

zugeschrieben, falls diese existieren. Für die Ableitungen in einer beliebigen Tangentialrichtung t in p setzen wir entsprechend

$$\frac{\partial f(p)}{\partial t} = \frac{\partial f(p)}{\partial x} \cos(t, x) + \frac{\partial f(p)}{\partial y} \cos(t, y).$$

Hat nun die Flächenfunktion $f(p)$ in allen Punkten der Fläche Tangentialableitungen, so sagen wir, daß diese gleichmäßig in p einer H-Bedingung genügen, falls für irgendeinen Punkt q aus S_p

$$\left|\frac{\partial f(q)}{\partial t_x} - \frac{\partial f(p)}{\partial x}\right| \leqq C t^{\nu}, \qquad \left|\frac{\partial f(q)}{\partial t_y} - \frac{\partial f(p)}{\partial y}\right| \leqq C t^{\nu} \qquad (0 < \nu < 1)$$

gilt, wobei C und ν von p unabhängig sind, und $\frac{\partial f(q)}{\partial t_x}$ bzw. $\frac{\partial f(q)}{\partial t_y}$ die Tangentialableitungen von f an der Stelle q in den Tangentialrichtungen darstellen, die sich durch Schnitt der Fläche S mit der x, z-Ebene bzw. der y, z-Ebene in q ergeben.

Besitzt die Flächenfunktion $f(p)$ in dem Sinne einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten ϱ $(0 < \varrho < 1)$ genügende partielle Ableitungen erster Ordnung, daß für alle Flächenpunkte

$$q = (x_q, y_q, \varphi(x_q, y_q))$$

mit

$$x_q^2 + y_q^2 \leqq \varrho_0^2$$

die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f(q)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(q)}{\partial y}$ existieren und einer Bedingung

$$\left|\frac{\partial f(q)}{\partial x} - \frac{\partial f(p)}{\partial x}\right| \leqq D t^{\varrho}, \quad \left|\frac{\partial f(q)}{\partial y} - \frac{\partial f(p)}{\partial y}\right| \leqq D t^{\varrho}$$

mit von p unabhängigen Zahlen D und ϱ genügen, so kann man zeigen, daß f Tangentialableitungen besitzt, die einer gleichmäßigen H-Bedingung mit einem Exponenten σ genügen, der gleich der kleineren der beiden Zahlen ϱ und λ ist, wenn λ wie bisher den „Flächenexponenten", d. h. die in (1) auftretende Konstante bedeutet. Bezeichnet man nämlich das lokale Koordinatensystem im Punkte q mit x', y', z', und wählt man es derart, daß die x', z'-Ebene mit der x, z-Ebene zusammenfällt, so ist

$$x = \cos(x, x')\, x' + \cos(x, z')\, z' + x_q,$$

und es wird

$$\frac{\partial f(q)}{\partial t_x} = \left[\frac{\partial f(\cos(x, x')\, x' + \cos(x, z')\, z' + x_q, 0)}{\partial x'}\right]_{x'=0,\ z'=0}$$

$$= \frac{\partial f(x_q, 0)}{\partial x} \cos(x, x') = \frac{\partial f(x_q, 0)}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi(x_q, 0)}{\partial x}\right)^2}}.$$

2. Bedeutet S die Berandung eines ebenen Gebietes R, so soll es auch hier zu jedem ihrer Punkte p eine Umgebung $\mathfrak{U}(p)$ derart geben, daß die darin enthaltene Teilmenge S_p von S in einem rechtwinklig-kartesischen Bezugssystem x, y, bei dem die x-Achse mit der Tangente von S in p identisch ist, sich eindeutig in der Form $y = \varphi(x)$ darstellen läßt. Die Ableitung $\varphi'(x)$ soll stetig sein und einer in p gleichmäßigen H-Bedingung genügen, so daß für einen weiteren Punkt q aus S_p

$$|\varphi'(q) - \varphi'(p)| \leqq A t^{\lambda} \quad . \qquad (0 < \lambda < 1)$$

ist, wobei die Konstanten A und λ von p unabhängig sind.

Auch die übrigen im vorhergehenden Abschnitt eingeführten Definitionen besitzen im ebenen Fall ihr naheliegendes Gegenstück.

§ 2.

Zusammenstellung von geometrischen Hilfssätzen[16]).

1. *Ist P ein Punkt auf der Flächennormalen n_p in p und h seine z-Koordinate, so gelten, falls q ein beliebiger weiterer Punkt von S_p mit den Koordinaten x, y, z ist und man unter r_{qP} die Entfernung der Punkte q und P versteht, die folgenden Gleichungen und Ungleichungen:*

$$\frac{1}{r_{qP}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + O\left[\frac{1}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{1-\lambda}{2}}}\right], \tag{2}$$

$$\cos(r_{qP}, n_p) = \cos(r_{qP}, z) = \frac{h-z}{r_{qP}} = \frac{h}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + O\left[(x^2+y^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]^{17}), \tag{3}$$

$$\cos(r_{qP}, n_q) = \frac{h}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + O\left[(x^2+y^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right], \tag{4}$$

$$\cos(r_{qP}, x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + O\left[(x^2+y^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]^{17}), \tag{5}$$

$$\cos(r_{qP}, y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + O\left[(x^2+y^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]^{17}), \tag{6}$$

$$\left.\begin{matrix}|\cos(n_q, x)|\\ |\cos(n_q, y)|\end{matrix}\right\} \leqq A\, r_{qp}^{\lambda}, \tag{7}$$

$$\cos(n_q, z) = \cos(n_q, n_p) = 1 + O\left[(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]. \tag{8}$$

2. *Fällt P mit p zusammen, so erhalten wir statt dessen, unter K eine (von der Fläche abhängende) Konstante verstanden:*

$$|\cos(r_{qp}, n_q)| \leqq K A\, r_{qp}^{\lambda}, \tag{9}$$

$$|\cos(r_{qp}, n_p)| \leqq K A\, r_{qp}^{\lambda}, \tag{10}$$

$$\cos(r_{qp}, x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + O\left[(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]^{17}), \tag{11}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \geqq \frac{1}{r_{qp}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + O\left[\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1-\lambda}{2}}}\right]. \tag{12}$$

3. *Bezeichnet ν eine beliebige Richtung im Raume, so gilt für drei beliebige Punkte P_1, P_2, P im Raume*

$$|\cos(r_{PP_1}, \nu) - \cos(r_{PP_2}, \nu)| \leqq \frac{2\, r_{P_1P_2}}{r_{PP_1}}. \tag{13}$$

---

[16]) Für die nicht ausgeführten Beweise verweisen wir auf J. SCHAUDER, l. c. Anm. [14]).

[17]) Bei SCHAUDER ist hier das entgegengesetzte Zeichen angegeben. Ist aber die positive z-Richtung mit der Richtung n_p identisch, und bedeutet h die z-Koordinate von P, so muß das bei uns angegebene Zeichen stehen.

4. *Es seien p_1 und p_2 zwei Punkte der Fläche, deren Entfernung kleiner als $\frac{\varrho_0}{2}$ ist. Um den Mittelpunkt der Strecke $\overline{p_1 p_2}$ beschreibe man eine Kugel mit dem Radius $r_{p_1 p_2}$; sie sei, wie auch entsprechend gebildete Kugeln, im folgenden Text mit $K_{p_1 p_2}$ bezeichnet. Für jeden außerhalb $K_{p_1 p_2}$ liegenden Flächenpunkt q bestehen dann die Abschätzungen*

$$|\cos(r_{q p_1}, n_q) - \cos(r_{q p_2}, n_q)| \leqq K A \frac{r_{p_1 p_2}}{r_{q p_1}^{1-\lambda}} \tag{14}$$

und

$$|\cos(r_{q p_1}, n_{p_1}) - \cos(r_{q p_2}, n_{p_2})| \leqq K A \left(\frac{r_{p_1 p_2}}{r_{q p_1}^{1-\lambda}} + r_{p_1 p_2}^{\lambda}\right). \tag{15}$$

5. *Für jeden Punkt P, der außerhalb von $K_{p_1 p_2}$ liegt, ist*

$$\frac{1}{4} < \frac{r_{P p_1}}{r_{P p_2}} < 4 \tag{16}$$

und

$$\left|\frac{1}{r_{P p_1}^3} - \frac{1}{r_{P p_2}^3}\right| \leqq K \frac{r_{p_1 p_2}}{r_{P p_1}^3}, \tag{17}$$

$$\left|\frac{1}{r_{P p_1}^3} - \frac{1}{r_{P p_2}^3}\right| \leqq K \frac{r_{p_1 p_2}}{r_{P p_1}^4}. \tag{18}$$

6. *Für die in einem Punkte q von S_p in § 1 definierte t_x-Richtung gilt bei Zugrundelegung eines beliebigen rechtwinklig-kartesischen Bezugssystems ξ, η, ζ:*

$$\left.\begin{aligned} &|\cos(\xi, x) - \cos(\xi, t_x)| \\ &|\cos(\eta, x) - \cos(\eta, t_x)| \\ &|\cos(\zeta, x) - \cos(\zeta, t_x)| \end{aligned}\right\} \leqq A t^{\lambda}; \tag{19}$$

entsprechende Abschätzungen bestehen für die t_y-Richtung. Ist nämlich $\mathfrak{x}$ ein Einheitsvektor in x-Richtung, $\mathfrak{t}_x$ ein Einheitsvektor in t_x-Richtung, so sind die links stehenden Größen kleiner oder gleich als

$$|\mathfrak{x} - \mathfrak{t}_x| = 2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\right)} < \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2} = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| \leqq A t^{\lambda},$$

wenn α den Winkel bezeichnet, den $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{t}_x$ miteinander bilden.

7. *Ist t_1 eine im Punkte p_1, t_2 eine im Punkte p_2 tangentiale Richtung, wobei für die Richtungskosinus gegen ein beliebiges rechtwinklig-kartesisches ξ, η, ζ-Koordinatensystem*

$$\left.\begin{aligned} &|\cos(\xi, t_1) - \cos(\xi, t_2)| \\ &|\cos(\eta, t_1) - \cos(\eta, t_2)| \\ &|\cos(\zeta, t_1) - \cos(\zeta, t_2)| \end{aligned}\right\} \leqq A r_{p_1 p_2}^{\lambda} \tag{20}$$

gilt, so bestehen die Ungleichungen

$$|\cos(n_q, t_1) - \cos(n_q, t_2)| \leqq 3A r_{p_1 p_2}^{\lambda}, \tag{21}$$

$$|\cos(r_{qp_1}, t_1) - \cos(r_{qp_1}, t_2)| \leqq \frac{6 r_{p_1 p_2}}{r_{qp_1}} + 3A r_{p_1 p_2}^{\lambda}. \tag{22}$$

8. *Faßt man den Ausdruck* $\cos(r_{P_1 P}, \nu)$ *bei festem Punkt* P_1 *und fester Richtung* ν *als Funktion des Punktes* P *auf, so hat man für die Ableitung in einer beliebigen Richtung* t *im Raume*

$$\frac{\partial}{\partial t}\cos(r_{P_1 P}, \nu) = \{\cos(\nu, t) - \cos(r_{P_1 P}, t)\cos(r_{P_1 P}, \nu)\}\frac{1}{r_{P_1 P}}. \tag{23}$$

Setzt man nämlich

$$\overrightarrow{P_1 P} = \mathfrak{r}_{P_1 P}.$$

und ist $\mathfrak{t}$ ein Einheitsvektor in t-Richtung ($|\mathfrak{t}| = 1$), so liegen die Endpunkte P der Vektoren $\overrightarrow{P_1 P}$, falls man P in t-Richtung variieren läßt, auf der Geraden

$$\mathfrak{r}_{P_1 P} = \mathfrak{r}_{P_1 P_0} + t\mathfrak{t}.$$

Daher wird

$$\frac{\partial \mathfrak{r}_{P_1 P}}{\partial t} = \mathfrak{t},$$

und es folgt, falls $\mathfrak{n}$ ein Einheitsvektor in ν-Richtung ist, ($|\mathfrak{n}| = 1$):

$$\frac{\partial}{\partial t}\cos(r_{P_1 P}, \nu) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\mathfrak{r}_{P_1 P}}{|\mathfrak{r}_{P_1 P}|}\cdot\mathfrak{n}\right\} = \frac{1}{r_{P_1 P}}\mathfrak{t}\cdot\mathfrak{n} - \mathfrak{r}_{P_1 P}\cdot\mathfrak{n}\frac{\cos(r_{P_1 P}, t)}{r_{P_1 P}^2}$$

$$= \{\cos(\nu, t) - \cos(r_{P_1 P}, \nu)\cos(r_{P_1 P}, t)\}\frac{1}{r_{P_1 P}}.$$

§ 3.

Hilfssätze über Integrale, die die biharmonischen Analoga des Potentials einer Doppelbelegung darstellen.

1. *Unter* ξ, η, ζ *verstehen wir, wie eben, die Koordinaten in bezug auf ein beliebiges rechtwinklig-kartesisches Bezugssystem. Die geschlossene Fläche* S *genüge den in* § 1 *genannten Voraussetzungen. Alsdann gilt*

$$\iint_{(S)} \left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} d\sigma = \iint_{(S)} \frac{\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^2} d\sigma = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \\ 0 \end{cases}, \tag{24}$$

je nachdem P *im Innengebiet von* S, *auf* S *oder im Außengebiet von* S *liegt. Weiter ist bei beliebiger Lage des Punktes* P:

$$\iint_{(S)} \frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} d\sigma = \iint_{(S)} \frac{\cos(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, \eta)\cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^2} d\sigma = 0. \tag{25}$$

Hierbei bedeuten $P = (\xi, \eta, \zeta)$ den „Aufpunkt", $p' = (\xi_{p'}, \eta_{p'}, \zeta_{p'})$ den Integrationspunkt; $n_{p'}$ bezeichnet die innere Normale, und es ist

$$\frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} = \frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi_{p'}} \cos(\xi, n_{p'}) + \frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta_{p'}} \cos(\eta, n_{p'}) + \frac{\partial r_{p'P}}{\partial \zeta_{p'}} \cos(\zeta, n_{p'})$$

gesetzt.

Dem Beweis von (24) und (25) legen wir folgenden Hilfssatz[18]) zugrunde: *Sind die Funktionentripel u, v, w und $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ im Bereich $R + S$ zweimal*[19]) *stetig differenzierbar, und genügen sie dort den Differentialgleichungen*

$$\Delta u + k \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = 0, \quad \Delta v + k \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = 0, \quad \Delta w + k \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} = 0 \tag{26}$$

mit

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta},$$

wobei k ein Parameter ist, so besteht unter Benutzung der Bezeichnungen

$$\left\{\begin{aligned}
X_{u,v,w}(P,p) = {} & \Big\{\frac{\partial u(P)}{\partial \xi}\cos(n_p,\xi) + \frac{\partial u(P)}{\partial \eta}\cos(n_p,\eta) + \frac{\partial u(P)}{\partial \zeta}\cos(n_p,\zeta)\Big\} \\
& + k\Big\{\frac{\partial u(P)}{\partial \xi} + \frac{\partial v(P)}{\partial \eta} + \frac{\partial w(P)}{\partial \zeta}\Big\}\cos(n_p,\xi) + \\
& + \frac{k}{2+k}\Big\{\frac{\partial v(P)}{\partial \xi}\cos(n_p,\eta) + \frac{\partial w(P)}{\partial \xi}\cos(n_p,\zeta) - \\
& \qquad - \frac{\partial v(P)}{\partial \eta}\cos(n_p,\xi) - \frac{\partial w(P)}{\partial \zeta}\cos(n_p,\xi)\Big\}, \\
Y_{u,v,w}(P,p) = {} & \Big\{\frac{\partial v(P)}{\partial \xi}\cos(n_p,\xi) + \frac{\partial v(P)}{\partial \eta}\cos(n_p,\eta) + \frac{\partial v(P)}{\partial \zeta}\cos(n_p,\zeta)\Big\} \\
& + k\Big\{\frac{\partial u(P)}{\partial \xi} + \frac{\partial v(P)}{\partial \eta} + \frac{\partial w(P)}{\partial \zeta}\Big\}\cos(n_p,\eta) + \\
& + \frac{k}{2+k}\Big\{\frac{\partial w(P)}{\partial \eta}\cos(n_p,\zeta) + \frac{\partial u(P)}{\partial \eta}\cos(n_p,\xi) - \\
& \qquad - \frac{\partial w(P)}{\partial \zeta}\cos(n_p,\eta) - \frac{\partial u(P)}{\partial \xi}\cos(n_p,\eta)\Big\}, \\
Z_{u,v,w}(P,p) = {} & \Big\{\frac{\partial w(P)}{\partial \xi}\cos(n_p,\xi) + \frac{\partial w(P)}{\partial \eta}\cos(n_p,\eta) + \frac{\partial w(P)}{\partial \zeta}\cos(n_p,\zeta)\Big\} \\
& + k\Big\{\frac{\partial u(P)}{\partial \xi} + \frac{\partial v(P)}{\partial \eta} + \frac{\partial w(P)}{\partial \zeta}\Big\}\cos(n_p,\zeta) + \\
& + \frac{k}{2+k}\Big\{\frac{\partial u(P)}{\partial \zeta}\cos(n_p,\xi) + \frac{\partial v(P)}{\partial \zeta}\cos(n_p,\eta) - \\
& \qquad - \frac{\partial u(P)}{\partial \xi}\cos(n_p,\zeta) - \frac{\partial v(P)}{\partial \eta}\cos(n_p,\zeta)\Big\}
\end{aligned}\right. \tag{27}$$

[18]) Vgl. zu diesem Hilfssatz G. Lauricella, Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali alla fisica-matematica. Il Nuovo Cimento, serie 5ª, XIII, S. 104–118, 155–174, 237–262, 501–518, insbes. S. 109.

[19]) Es würde auch genügen, vorauszusetzen, daß die zweiten Ableitungen in R und die ersten in $R + S$ stetig sind.

die Integralformel

$$(28)\quad \iint_{(S)} \{[u]_S X_{\bar u,\bar v,\bar w}(p',p') + [v]_S Y_{\bar u,\bar v,\bar w}(p',p') + [w]_S Z_{\bar u,\bar v,\bar w}(p',p') - \\ - [\bar u]_S X_{u,v,w}(p',p') - [\bar v]_S Y_{u,v,w}(p',p') - [\bar w]_S Z_{u,v,w}(p',p')\}\, d\sigma = 0.$$

Die Relation (28) folgt unmittelbar bei Benutzung des Gaussschen Integralsatzes und einer Greenschen Formel aus

$$\begin{aligned} O = \iiint_{(R)} \Big\{ & u\Big[\Delta\bar u + k\frac{\partial\bar\vartheta}{\partial\xi} + \frac{k}{2+k}\Big(\frac{\partial^2\bar v}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{\partial^2\bar w}{\partial\xi\,\partial\zeta} - \frac{\partial^2\bar v}{\partial\eta\,\partial\xi} - \frac{\partial^2\bar w}{\partial\zeta\,\partial\xi}\Big)\Big] + \\ & + v\Big[\Delta\bar v + k\frac{\partial\bar\vartheta}{\partial\eta} + \frac{k}{2+k}\Big(\frac{\partial^2\bar w}{\partial\eta\,\partial\zeta} + \frac{\partial^2\bar u}{\partial\eta\,\partial\xi} - \frac{\partial^2\bar w}{\partial\zeta\,\partial\eta} - \frac{\partial^2\bar u}{\partial\xi\,\partial\eta}\Big)\Big] + \\ & + w\Big[\Delta\bar w + k\frac{\partial\bar\vartheta}{\partial\zeta} + \frac{k}{2+k}\Big(\frac{\partial^2\bar u}{\partial\zeta\,\partial\xi} + \frac{\partial^2\bar v}{\partial\zeta\,\partial\eta} - \frac{\partial^2\bar u}{\partial\xi\,\partial\zeta} - \frac{\partial^2\bar v}{\partial\eta\,\partial\zeta}\Big)\Big]\Big\}\, d\tau \\ = -\iiint_{(R)} \Big\{ & \Big[\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\bar u}{\partial\xi} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\bar u}{\partial\eta} + \frac{\partial u}{\partial\zeta}\frac{\partial u}{\partial\zeta} + \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\bar v}{\partial\xi} + \frac{\partial v}{\partial\eta}\frac{\partial\bar v}{\partial\eta} + \frac{\partial v}{\partial\zeta}\frac{\partial\bar v}{\partial\zeta} \\ & + \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\bar w}{\partial\xi} + \frac{\partial w}{\partial\eta}\frac{\partial\bar w}{\partial\eta} + \frac{\partial w}{\partial\zeta}\frac{\partial\bar w}{\partial\zeta}\Big] + k\vartheta\bar\vartheta + \\ & + \frac{k}{2+k}\Big[\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\bar v}{\partial\xi} + \frac{\partial\bar u}{\partial\eta}\frac{\partial v}{\partial\xi} + \frac{\partial v}{\partial\zeta}\frac{\partial\bar w}{\partial\eta} + \frac{\partial\bar v}{\partial\zeta}\frac{\partial w}{\partial\eta} + \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\bar u}{\partial\zeta} + \frac{\partial\bar w}{\partial\xi}\frac{\partial u}{\partial\zeta} - \\ & - \frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\bar v}{\partial\eta} - \frac{\partial\bar u}{\partial\xi}\frac{\partial v}{\partial\eta} - \frac{\partial v}{\partial\eta}\frac{\partial\bar w}{\partial\zeta} - \frac{\partial\bar v}{\partial\eta}\frac{\partial w}{\partial\zeta} - \frac{\partial w}{\partial\zeta}\frac{\partial\bar u}{\partial\xi} - \frac{\partial\bar w}{\partial\zeta}\frac{\partial u}{\partial\xi}\Big]\Big\}\, d\tau - \\ & - \iint_{(S)} \{[u]_S X_{\bar u,\bar v,\bar w}(p',p') + [v]_S Y_{\bar u,\bar v,\bar w}(p',p') + [w]_S Z_{\bar u,\bar v,\bar w}(p',p')\}\, d\sigma \end{aligned}$$

und einer entsprechenden Beziehung, die sich durch Vertauschung der Tripel u, v, w und $\bar u, \bar v, \bar w$ ergibt.

Ist nunmehr P_1 ein beliebiger in R gelegener Punkt, so sind die neun durch

$$(29)\quad \begin{cases} u_1(P,P_1) = \dfrac{1}{r_{P_1P}} - \dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\xi^2}, \quad v_1(P,P_1) = -\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\xi\,\partial\eta}, \\ \qquad\qquad w_1(P,P_1) = -\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\xi\,\partial\zeta}, \\ u_2(P,P_1) = -\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\eta\,\partial\xi}, \quad v_2(P,P_1) = \dfrac{1}{r_{P_1P}} - \dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\eta^2}, \\ \qquad\qquad w_2(P,P_1) = -\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\eta\,\partial\zeta}, \\ u_3(P,P_1) = -\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\zeta\,\partial\xi}, \quad v_3(P,P_1) = -\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\zeta\,\partial\eta}, \\ \qquad\qquad w_3(P,P_1) = \dfrac{1}{r_{P_1P}} - \dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\zeta^2} \end{cases}$$

gegebenen Funktionen in $R+S$ mit Ausnahme des Punktes P_1 beliebig oft differenzierbar und genügen den Gleichungen (26). Wählt man alsdann die drei Funktionentripel (29) der Reihe nach für $\bar u, \bar v, \bar w$, und umgibt man den

Punkt P_1 mit einer ganz in R gelegenen Kugel S_0, so folgt aus der zu (28) analogen Formel, bei der neben dem Flächenintegral über S noch ein Flächenintegral über S_0 auftritt mit aus der Potentialtheorie geläufiger Schlußweise, wenn man den Radius von S_0 gegen Null gehen läßt, daß

$$
(30)\quad \left\{\begin{aligned}
u(P_1) &= \frac{1}{4\pi}\iint_{(S)} \{[u]_S X_{u_1,v_1,w_1}(p',p';P_1) + [v]_S Y_{u_1,v_1,w_1}(p',p';P_1) + \\
&\qquad + [w]_S Z_{u_1,v_1,w_1}(p',p';P_1) - \\
&\qquad - [u_1]_S X_{u,v,w}(p',p') - [v_1]_S Y_{u,v,w}(p',p') - \\
&\qquad - [w_1]_S Z_{u,v,w}(p',p')\}\, d\sigma, \\
v(P_1) &= \frac{1}{4\pi}\iint_{(S)} \{[u]_S X_{u_2,v_2,w_2}(p',p';P_1) + [v]_S Y_{u_2,v_2,w_2}(p',p';P_1) + \\
&\qquad + [w]_S Z_{u_2,v_2,w_2}(p',p';P_1) - \\
&\qquad - [u_2]_S X_{u,v,w}(p',p') - [v_2]_S Y_{u,v,w}(p',p') - \\
&\qquad - [w_2]_S Z_{u,v,w}(p',p')\}\, d\sigma, \\
w(P_1) &= \frac{1}{4\pi}\iint_{(S)} \{[u]_S X_{u_3,v_3,w_3}(p',p';P_1) + [v]_S Y_{u_3,v_3,w_3}(p',p';P_1) + \\
&\qquad + [w]_S Z_{u_3,v_3,w_3}(p',p';P_1) - \\
&\qquad - [u_3]_S X_{u,v,w}(p',p') - [v_3]_S Y_{u,v,w}(p',p') - \\
&\qquad - [w_3]_S Z_{u,v,w}(p',p')\}\, d\sigma
\end{aligned}\right.
$$

sein muß. Hierbei ist gemäß (27) und (29)

$$
\begin{aligned}
X_{u_1,v_1,w_1}(p,p;P_1) &= \frac{2}{2+k}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p} + \frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p}, \\
Y_{u_1,v_1,w_1}(p,p;P_1) &= \frac{3k}{2+k}\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p}, \\
Z_{u_1,v_1,w_1}(p,p;P_1) &= \frac{3k}{2+k}\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \zeta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p}, \\
X_{u_2,v_2,w_2}(p,p;P_1) &= Y_{u_1,v_1,w_1}(p,p;P_1), \\
Y_{u_2,v_2,w_2}(p,p;P_1) &= \frac{2}{2+k}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p} + \frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \eta}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p}, \\
Z_{u_2,v_2,w_2}(p,p;P_1) &= \frac{3k}{2+k}\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \eta}\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \zeta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p}, \\
X_{u_3,v_3,w_3}(p,p;P_1) &= Z_{u_1,v_1,w_1}(p,p;P_1), \\
Y_{u_3,v_3,w_3}(p,p;P_1) &= Z_{u_2,v_2,w_2}(p,p;P_1), \\
Z_{u_3,v_3,w_3}(p,p;P_1) &= \frac{2}{2+k}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p} + \frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \zeta}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p}
\end{aligned}
$$

zu setzen.

Analoge Betrachtungen kann man für das Außengebiet R_a von R anstellen, wenn vorausgesetzt wird, daß die Funktionen u, v, w in $R_a + S$ zweimal stetig differenzierbar sind und dort den Gleichungen (26) genügen, daß sie ferner, falls der Aufpunkt P sich unbegrenzt weit vom Ursprung O des Koordinatensystems entfernt, wohlbestimmten Grenzwerten u_0, v_0, w_0 zustreben, während ihre ersten partiellen Ableitungen dabei wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ verschwinden. Es ergeben sich für $u(P_1)$, $v(P_1)$, $w(P_1)$ mit P_1 in R_a Ausdrücke von der Form (30), mit dem einzigen Unterschied, daß auf der rechten Seite bzw. die Bestandteile u_0, v_0, w_0 additiv hinzutreten.

Liegt schließlich der Punkt P_1 auf der Berandung S von R, so umgebe man ihn ebenfalls mit einer Kugel S_0 und wende (28), falls $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ bzw. gleich einem der Tripel (29) ist, auf die Oberfläche des Teilgebietes von R an, das aus R durch Wegnahme der Durchschnittsmenge von R und dem abgeschlossenen Kugelkörper von S_0 entsteht. Läßt man den Radius von S_0 gegen Null gehen, so erhält man eine zu (30) analoge Formel, die sich von dieser nur dadurch unterscheidet, daß der vor den Integralen über S stehende Faktor $\frac{1}{4\pi}$ durch $\frac{1}{2\pi}$ zu ersetzen ist.

Wählt man aber in (30) und in den im Text erwähnten entsprechenden Formeln, die sich ergeben, wenn P_1 auf S oder in R_a liegt, speziell

$$u(P) \equiv 1, \quad v(P) \equiv 0, \quad w(P) \equiv 0,$$

und beachtet man, daß als Folgerung aus dem GREENschen Satz der Potentialtheorie

$$\iint_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2}\, d\sigma = \begin{cases} 4\pi \\ 2\pi \\ 0 \end{cases}$$

ist, je nachdem P in R, auf S oder in R_a liegt, so resultieren unmittelbar die behaupteten Relationen (24) und (25).

2. *Ist auf S eine integrable und beschränkte Funktion $f(p)$ gegeben, so genügen die Integrale*

$$V(p) = \iint_{(S)} f(p') \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2}\, d\sigma$$

und

$$W(p) = \iint_{(S)} f(p') \frac{\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, \eta)\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2}\, d\sigma$$

auf S gleichmäßig einer H-Bedingung mit dem Flächenexponenten λ.

Dazu zeigen wir, daß für irgendeinen Flächenpunkt q *mit* $r_{pq} < \frac{\varrho_0}{2}$:

$$\left.\begin{matrix} |V(q) - V(p)| \\ |W(q) - W(p)| \end{matrix}\right\} \leqq KA\,\overline{\text{fin}}\,|f|\,r_{pq}^{\lambda}$$

gilt. Beachtet man nämlich, daß $r_{pq} \leqq Kt$ ist, so folgt daraus unmittelbar die Behauptung. Wir führen hier, wie auch bei den folgenden Hilfssätzen den Beweis nur für das Integral $V(p)$, da er für $W(p)$ ganz analog verläuft.

Um p und q beschreibe man die im § 2, Abschnitt 4 näher gekennzeichnete Kugel K_{pq}. Der Durchschnitt von S und K_{pq} heiße s; weiter sei $S - s = S'$. Damit wird

$$V(q) - V(p) = \iint\limits_{(s)} f(p') \frac{\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})}{r_{p'q}^2}\,d\sigma - \iint\limits_{(s)} f(p') \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2}\,d\sigma +$$

$$+ \iint\limits_{(S-s)} f(p') \left\{ \frac{\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})}{r_{p'q}^2} - \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} \right\} d\sigma.$$

Die beiden ersten Integrale lassen sich ihrem absoluten Betrage nach durch die bereits von Schauder[20]) abgeschätzten Integrale

$$\iint\limits_{(s)} |f(p')| \frac{|\cos(r_{p'q}, n_{p'})|}{r_{p'q}^2}\,d\sigma \leqq KA\,\overline{\text{fin}}\,|f|\,r_{pq}^{\lambda}$$

und

$$\iint\limits_{(s)} |f(p')| \frac{|\cos(r_{p'p}, n_{p'})|}{r_{p'p}^2}\,d\sigma \leqq KA\,\overline{\text{fin}}\,|f|\,r_{pq}^{\lambda}$$

majorisieren.

Beschreibt man um den Punkt p die feste, d. h. von q unabhängige Kugel K_{ϱ_0}, so enthält sie die Kugel K_{pq} in ihrem Inneren. Der in K_{ϱ_0} gelegene Teil von $S - s$ heiße S''. Zerlegt man nun das Integral $\iint\limits_{(S-s)}$ in $\iint\limits_{(S')}$ und $\iint\limits_{(S-s-S'')}$, so liefert das letztere sicher die für die H-Bedingung erforderliche Abschätzung. Für das restliche Integral kann geschrieben werden:

$$\iint\limits_{(S')} f(p') \frac{|\cos^2(r_{p'q}, \xi) - \cos^2(r_{p'p}, \xi)|\cos(r_{p'q}, n_{p'})}{r_{p'q}^2}\,d\sigma +$$

$$+ \iint\limits_{(S')} f(p')\cos^2(r_{p'p}, \xi) \left\{ \frac{\cos(r_{p'q}, n_{p'})}{r_{p'q}^2} - \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} \right\} d\sigma.$$

---

[20]) J. Schauder, l. c. Anm. [14]), insbes. S. 613.

Das zweite Integral kann durch das von SCHAUDER[21]) abgeschätzte Integral

$$\iint\limits_{(S'')} |f(p')| \left| \frac{\cos(r_{p'q}, n_{p'})}{r^2_{p'q}} - \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r^2_{p'p}} \right| d\sigma \leqq K A \overline{\text{fin}}\, |f| r^{\lambda}_{pq}$$

majorisiert werden.

Das erste Integral ist aber schließlich bei Beachtung von (9), (13) und (16) kleiner oder gleich als

$$4 \iint\limits_{(S'')} |f(p')| \left| \frac{r_{pq}}{r^3_{p'q}} \right| \cos(r_{p'q}, n_{p'}) | d\sigma$$

$$\leqq 4 \overline{\text{fin}}\, |f| r_{pq} K A \iint\limits_{(S'')} \frac{r^{\lambda}_{p'q}}{r^3_{p'q}} d\sigma \leqq K A \overline{\text{fin}}\, |f| r_{pq} \int\limits_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-\lambda}}$$

$$\leqq K A \overline{\text{fin}}\, |f| r^{\lambda}_{pq},$$

wenn man berücksichtigt, daß zunächst

$$\iint\limits_{(S'')} \frac{1}{r^{3-\lambda}_{p'p}} d\sigma \leqq K \int\limits_{\varrho_1}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-\lambda}}$$

ist, falls ϱ_1 den Abstand des Punktes p vom Rande der Projektion von S'' auf die Tangentialebene in p bedeutet, und daß nach (12)

$$\varrho_1 = \tfrac{1}{2} r_{pq} (1 + O[r^{\lambda}_{pq}])$$

gilt.

3. *Genügt $f(p)$ auf S einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten μ, d. h. gilt*

$$|f(q) - f(p)| \leqq B t^{\mu} \qquad (0 < \mu < 1;\ q \text{ in } S_p),$$

so hat man für $V(p)$ und $W(p)$ eine der drei Abschätzungen

$$\left.\begin{aligned} |V(q) - V(p)| \\ |W(q) - W(p)| \end{aligned}\right\} \leqq \begin{cases} KAB t^{\lambda+\mu} \\ KAB t \\ KAB t\, |\log t| \end{cases},$$

je nachdem

$$\mu + \lambda < 1, \quad \mu + \lambda > 1, \quad \mu + \lambda = 1$$

ist.

Da wegen (24)

$$\iint\limits_{(S)} f(p) \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r^2_{p'p}} d\sigma$$

$$= \iint\limits_{(S)} f(p) \frac{\cos^2(r_{p'q}, \xi) \cos(r_{p'q}, n_{p'})}{r^2_{p'q}} d\sigma = \frac{2\pi}{3} f(p)$$

---

[21]) J. SCHAUDER, l. c. Anm. [14]), insbes. S. 613.

sein muß, so kann man

$$V(q) - V(p) = \iint\limits_{(S)} \{f(p') - f(p)\} \left\{ \frac{\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})}{r_{p'q}^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} \right\} d\sigma$$

schreiben.

Zur Abschätzung dieser Differenz verwende man die bereits im Abschnitt 2 dieses Paragraphen benutzten Flächenstücke $s, S, S - s, S''$. Für $\iint\limits_{(s)}$ findet man unter Anwendung einer Abschätzung von SCHAUDER[22])

$$(31)\quad \left| \iint\limits_{(s)} \right| \leqq \iint\limits_{(s)} |f(p') - f(p)| \frac{|\cos(r_{p'q}, n_{p'})|}{r_{p'q}^2} d\sigma +$$
$$+ \iint\limits_{(s)} |f(p') - f(p)| \frac{|\cos(r_{p'p}, n_{p'})|}{r_{p'p}^2} d\sigma \leqq KAB r_{pq}^{\mu+\lambda} \leqq KABt^{\mu+\lambda}.$$

Wegen (9), (13) und (16) und einer weiteren Abschätzung von SCHAUDER[23]) ist weiter

$$\iint\limits_{(S'')} \leqq \iint\limits_{(S'')} |f(p') - f(p)| \frac{|\cos^2(r_{p'q}, \xi) - \cos^2(r_{p'p}, \xi)| \cdot |\cos(r_{p'q}, n_{p'})|}{r_{p'q}^2} d\sigma +$$
$$+ \iint\limits_{(S'')} |f(p') - f(p)| \frac{|\cos^2(r_{p'p}, \xi)| \cdot |\cos(r_{p'q}, n_{p'}) - \cos(r_{p'p}, n_{p'})|}{r_{p'q}^2} d\sigma +$$
$$+ \iint\limits_{(S'')} |f(p') - f(p)| \cdot |\cos^2(r_{p'p}, \xi)| \cdot |\cos(r_{p'p}, n_{p'})| \cdot \left| \frac{1}{r_{p'q}^2} - \frac{1}{r_{p'p}^2} \right| d\sigma$$
$$\leqq 4KAB \iint\limits_{(S'')} r_{p'p}^{\mu} \frac{r_{pq}}{r_{p'q}^3} r_{p'q}^{\lambda} d\sigma + KABr_{pq} \int\limits_{\frac{1}{2}r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(\lambda+\mu)}}$$
$$\leqq KABr_{pq} \int\limits_{\frac{1}{2}r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(\lambda+\mu)}}.$$

Aus den gewonnenen Abschätzungen gewinnt man aber genau wie bei SCHAUDER die Behauptung.

N. B. Für $\lambda + \mu > 1$ folgt insbesondere aus der letzten Abschätzung

$$\left| \iint\limits_{(S'')} \right| \leqq KABr_{pq}\varrho_0^{\lambda+\mu-1}.$$

Daraus kann man bei Beachtung von (31) eine für spätere Zwecke nützliche Bemerkung ablesen. Ist σ ein Flächenstück, das ganz in einer Kugel vom

---

[22]) J. SCHAUDER, l. c. Anm. [14]), insbes. S. 614.

[23]) J. SCHAUDER, l. c. Anm. [14]), insbes. S. 614.

Radius $\varepsilon < \frac{\varrho_0}{2}$ um p enthalten ist, und gilt $r_{pq} < \varepsilon$, so folgt im Falle $\lambda + \mu > 1$ für das über σ erstreckte Integral

$$\left| \iint_{(\sigma)} \{f(p') - f(p)\} \left\{ \frac{\cos^2(r_{p'q}, \xi) \cos(r_{p'q}, n_{p'})}{r_{p'q}^2} - \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} \right\} d\sigma \right| \leqq K A B \varepsilon^{\lambda+\mu-1} r_{pq}.$$

Man braucht ja in der eben angegebenen Abschätzung ϱ_0 nur durch ε zu ersetzen und in (31) $r_{pq} < \varepsilon$ zu berücksichtigen.

4. *Ist $\lambda + \mu > 1$, so existieren auf der Fläche die Tangentialableitungen $\frac{\partial V(p)}{\partial t}$ und $\frac{\partial W(p)}{\partial t}$ und sind durch*

$$\frac{\partial V(p)}{\partial t} = \iint_{(S)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(n_{p'}, t) + 2 \cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(\xi, t) - 5 \cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(r_{p'p}, t)\} \frac{1}{r_{p'p}^3} d\sigma$$

bzw.

$$\frac{\partial W(p)}{\partial t} = \iint_{(S)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, \eta) \cos(n_{p'}, t) + \cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(\eta, t) + \cos(r_{p'p}, \eta) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(\xi, t) - 5 \cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, \eta) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(r_{p'p}, t)\} \frac{1}{r_{p'p}^3} d\sigma$$

gegeben.

Beweis. Sei t eine an die Fläche im Punkte p tangentiale Richtung. Um p beschreibe man eine Kugel K_ε vom Radius ε mit $\varepsilon < \frac{\varrho_0}{2}$. Der Durchschnitt von S und K_ε heiße σ. Da nach (24)

$$\frac{\partial V(p)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S)} \{f(p') - f(p)\} \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} d\sigma$$

ist, so folgt bei Beachtung von (23), falls man das rechts stehende Integral $\iint_{(S)}$ in $\iint_{(\sigma)} + \iint_{(S-\sigma)}$ zerlegt,

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S-\sigma)} = \iint_{(S-\sigma)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(n_{p'}, t) + 2 \cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(\xi, t) - 5 \cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(r_{p'p}, t)\} \frac{1}{r_{p'p}^3} d\sigma.$$

Da nun aber weiter

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_{(\sigma)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\iint_{(\sigma)}\{f(p')-f(p)\}\left\{\frac{\cos^2(r_{p'q},\,\xi)\cos(r_{p'q},\,n_{p'})}{r_{p'q}^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos^2(r_{p'p},\,\xi)\cos(r_{p'p},\,n_{p'})}{r_{p'p}^2}\right\} d\sigma$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{r_{pq}}\iint_{(\sigma)}$$

gilt, falls q ein Punkt von S_p ist, der in t-Richtung liegt, und t wie bisher die Projektion von $\overline{qp}$ auf die Tangentialebene in p darstellt, so ergibt sich bei Beachtung der Nebenbemerkung im Abschnitt 3 dieses Paragraphen, daß

$$\left|\frac{1}{r_{pq}}\iint_{(\sigma)}\right| \leqq K\,A\,B\,\varepsilon^{\lambda+\mu-1}$$

ist und also wegen $\lambda+\mu>1$ mit ε gegen Null geht.

5. *Ist* $0<\lambda<1$, $0<\mu<1$, $\mu+\lambda>1$, *so genügen die Tangentialableitungen* $\frac{\partial V(p)}{\partial t}$ *und* $\frac{\partial W(p)}{\partial t}$ *einer H-Bedingung mit dem Exponenten* $\lambda+\mu-1$.

Es handelt sich also darum zu zeigen, daß für alle q aus S_p

$$\left.\begin{array}{l}\left|\frac{\partial V(q)}{\partial t_x}-\frac{\partial V(p)}{\partial x}\right| \\ \left|\frac{\partial V(q)}{\partial t_y}-\frac{\partial V(p)}{\partial y}\right|\end{array}\right\} \leqq C\,t^{\mu+\lambda-1}$$

gilt (vgl. § 1). Wir brauchen nur eine der beiden Relationen zu beweisen.

Bezeichnet man das in der Kugel $K_{pq}\left(r_{pq}<\frac{\varrho_0}{2}\right)$ gelegene Flächenstück mit s und schreibt man die links stehende Differenz der beiden Ableitungen unter Benutzung der im vorhergehenden Hilfssatz angegebenen Integraldarstellung als Differenz zweier Integrale, so findet man für die Integralanteile über s die Abschätzung

$$\begin{aligned}\left|\iint_{(s)}\right| \leqq \iint_{(s)} & |f(p')-f(q)|\,|\cos^2(r_{p'q},\,\xi)\cos(n_{p'},\,t_x)+ \\ & + 2\cos(r_{p'q},\,\xi)\cos(r_{p'q},\,n_{p'})\cos(\xi,\,t_x)- \\ & - 5\cos^2(r_{p'q},\,\xi)\cos(r_{p'q},\,n_{p'})\cos(r_{p'q},\,t_x)|\,\frac{1}{r_{p'q}^3}\,d\sigma + \\ & + \iint_{(s)}|f(p')-f(p)|\,|\cos^2(r_{p'p},\,\xi)\cos(n_{p'},\,x)+ \\ & + 2\cos(r_{p'p},\,\xi)\cos(r_{p'p},\,n_{p'})\cos(\xi,\,x)- \\ & - 5\cos^2(r_{p'p},\,\xi)\cos(r_{p'p},\,n_{p'})\cos(r_{p'p},\,x)|\,\frac{1}{r_{p'p}^3}\,d\sigma\end{aligned}$$

oder falls man (7), (9), (10) und

$$|\cos(r_{p'q}, \xi)| \leqq 1, \quad |\cos(\xi, t_a)| \leqq 1, \quad |\cos(r_{p'q}, t_a)| \leqq 1;$$
$$|\cos(r_{p'p}, \xi)| \leqq 1, \quad |\cos(\xi, x)| \leqq 1, \quad |\cos(r_{p'p}, x)| \leqq 1$$

benutzt

$$\left|\iint_{(s)}\right| \leqq KAB\left\{\iint_{(s)} r_{p'q}^{\mu} \frac{r_{p'q}^{\lambda}}{r_{p'q}^{3}}\, d\sigma + \iint_{(s)} r_{p'p}^{\mu} \frac{r_{p'p}^{\lambda}}{r_{p'p}^{3}}\, d\sigma\right\},$$

d. h.

$$\left|\iint_{(s)}\right| \leqq KAB\int_{0}^{2r_{pq}} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(\lambda+\mu)}} = KAB r_{pq}^{\mu+\lambda-1}. \tag{32}$$

N. B. Diese Abschätzung besteht auch für $\mu = 1$.

Es sind also nur noch die Anteile der Integrale über S'' zu untersuchen. Zunächst ist

$$\begin{aligned}
\iint_{(S'')} = \{f(p) - f(q)\} \iint_{(S'')} \{&\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(n_{p'}, t_a) + \\
&+ 2\cos(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})\cos(\xi, t_a) - \\
&- 5\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})\cos(r_{p'q}, t_a)\} \frac{1}{r_{p'q}^{3}}\, d\sigma + \\
+ \iint_{(S'')} \{f(p') - f(p)\}\Big[\{&\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(n_{p'}, t_a) + \\
&+ 2\cos(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})\cos(\xi, t_a) - \\
&- 5\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})\cos(r_{p'q}, t_a)\} \frac{1}{r_{p'q}^{3}} - \\
- \{&\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, x) + 2\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(\xi, x) - \\
&- 5\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(r_{p'p}, x)\} \frac{1}{r_{p'p}^{3}}\Big]\, d\sigma \\
= \mathrm{I} + \mathrm{II}.&
\end{aligned}$$

Das Integral I läßt sich nach (7) und (9) folgendermaßen abschätzen

$$|\mathrm{I}| \leqq Br_{pq}^{\mu} KA \iint_{(S'')} \frac{r_{p'q}^{\lambda}}{r_{p'q}^{3}}\, d\sigma \leqq KABr_{pq}^{\mu} \int_{\frac{1}{2}r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-\lambda}},$$

d. h.

$$|\mathrm{I}| \leqq KABr_{pq}^{\mu} r_{pq}^{\lambda-1} = KABr_{pq}^{\mu+\lambda-1}. \tag{33}$$

N. B. Diese Abschätzung gilt auch für $\mu = 1$.

Das Integral II werde weiter zerlegt in

$$\mathrm{II} = \iint\limits_{(S'')} \{f(p') - f(p)\} \left\{ \frac{\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(n_{p'}, t_x)}{r^3_{p'q}} - \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, x)}{r^3_{p'p}} \right\} d\sigma +$$

$$+ 2\iint\limits_{(S'')} \{f(p') - f(p)\} \left\{ \frac{\cos(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})\cos(\xi, t_x)}{r^3_{p'q}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(\xi, x)}{r^3_{p'p}} \right\} d\sigma -$$

$$- 5\iint\limits_{(S'')} \{f(p') - f(p)\} \left\{ \frac{\cos^3(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})\cos(r_{p'q}, t_x)}{r^3_{p'q}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos^3(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(r_{p'p}, x)}{r^3_{p'p}} \right\} d\sigma$$

$$= J_1 + J_2 + J_3.$$

Da

$$J_1 = \iint\limits_{(S'')} \{f(p') - f(p)\} \left[\left\{ \frac{\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(n_{p'}, t_x)}{r^3_{p'q}} - \frac{\cos^3(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, t_x)}{r^3_{p'q}} \right\} + \right.$$

$$+ \left\{ \frac{\cos^3(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, t_x)}{r^3_{p'q}} - \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, x)}{r^3_{p'q}} \right\} +$$

$$\left. + \left\{ \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, x)}{r^3_{p'q}} - \frac{\cos^3(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, x)}{r^3_{p'p}} \right\} \right] d\sigma,$$

so hat man bei Beachtung von (13), (7), (21), (18) und (16)

$$|J_1| \leqq KAB \iint\limits_{(S'')} \left\{ \frac{r^{\mu}_{p'p}\, r_{pq}\, r^{\lambda}_{p'q}}{r^4_{p'q}} + \frac{r^{\mu}_{p'p}\, r^{\lambda}_{pq}}{r^3_{p'q}} + \frac{r^{\mu}_{p'p}\, r^{\lambda}_{p'p}\, r_{pq}}{r^4_{p'q}} \right\} d\sigma$$

$$\leqq KAB\, r^{\lambda}_{pq} \int\limits_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-\mu}} + KAB\, r_{\mu q} \int\limits_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{3-(\lambda+\mu)}}.$$

Für $\lambda + \mu > 1$ und $\mu < 1$ ergibt sich daher

$$|J_1| \leqq KAB r^{\lambda+\mu-1}_{pq}.$$

Genau so erkennt man nach (13), (9), (14), (19) und (18), daß

$$|J_2| \leqq KAB \iint\limits_{(S'')} \left\{ \frac{r^{\mu}_{p'p}\, r_{pq}\, r^{\lambda}_{p'q}}{r^4_{p'q}} + \frac{r^{\mu}_{p'p}\, r_{pq}}{r^3_{p'q}\, r^{1-\lambda}_{p'q}} + \frac{r^{\mu}_{p'p}\, r^{\lambda}_{p'p}\, r^{\lambda}_{pq}}{r^3_{p'q}} + \frac{r^{\mu}_{p'p}\, r^{\lambda}_{p'p}\, r_{pq}}{r^4_{p'q}} \right\} d\sigma$$

$$\leqq KAB\, r_{pq} \int\limits_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{3-(\lambda+\mu)}} + KAB\, r^{\lambda}_{pq} \int\limits_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(\lambda+\mu)}}$$

$$\leqq KAB\, r^{\lambda+\mu-1}_{pq} + KAB\, r^{\lambda}_{pq}\, r^{\lambda+\mu-1}_{pq} \leqq KAB\, r^{\mu+\lambda-1}_{pq},$$

d. h.

$$|J_2| \leqq K A B r_{pq}^{\mu+\lambda-1} \tag{34}$$

ist, und gemäß (13), (10), (14), (9), (22) und (18) wird schließlich

$$|J_3| \leqq KAB \iint_{(S'')} \left\{ \frac{r_{p'p}^{\mu} r_{pq} r_{p'q}^{\lambda}}{r_{p'q}^{4}} + \frac{r_{p'p}^{\mu} r_{pq} r_{p'q}^{\lambda}}{r_{p'q}^{4}} + \right.$$

$$\left. + \frac{r_{p'p}^{\mu} r_{p'p}^{\lambda}}{r_{p'q}^{3}} \left(\frac{r_{pq}}{r_{p'q}} + r_{pq}^{\lambda} \right) + \frac{r_{p'p}^{\mu} r_{p'p}^{\lambda} r_{pq}}{r_{p'q}^{4}} \right\} d\sigma$$

$$\leqq KAB\, r_{pq} \int_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{3-(\lambda+\mu)}} + KAB\, r_{pq}^{\lambda} \int_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(\lambda+\mu)}},$$

d. h.

$$|J_3| \leqq K A B r_{pq}^{\mu+\lambda-1}. \tag{35}$$

6. *Besitzt die Funktion $f(p)$ auf S tangentiale Ableitungen, die gleichmäßig einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\varepsilon > 0$ genügen*:

$$\left.\begin{aligned} \left| \frac{\partial f(q)}{\partial t_x} - \frac{\partial f(p)}{\partial x} \right| \\ \left| \frac{\partial f(q)}{\partial t_y} - \frac{\partial f(p)}{\partial y} \right| \end{aligned}\right\} \leqq C t^{\varepsilon} \quad \left(q \text{ in } S_p;\ \operatorname{Max} \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \leqq C \right),$$

so genügen die Tangentialableitungen $\frac{\partial V(p)}{\partial t}$ und $\frac{\partial W(p)}{\partial t}$ gleichmäßig einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ.

Beweis. Wegen der Existenz der Tangentialableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ in jedem Punkte p muß

$$\frac{|f(q) - f(p)|}{t} \leqq KC$$

sein, so daß $f(p)$ gleichmäßig einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\mu = 1$ genügt.

Schreibt man nun, wie bei dem vorstehenden Hilfssatz

$$\frac{\partial V(q)}{\partial t_x} - \frac{\partial V(p)}{\partial x}$$

als Integral über S, so folgt nach den auch bei $\mu = 1$ geltenden Abschätzungen (32) und (33)

$$\left| \iint_{(\sigma)} \right| \leqq KAC r_{pq}^{\lambda}, \quad |\mathrm{I}| \leqq KAC r_{pq}^{\lambda}.$$

Bei Benutzung des im Punkte p lokalen Koordinatensystems wird nun

$$f(p') - f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x' + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y' + \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^* - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0\right\} x' + \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^* - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0\right\} y'.$$

Führt man die in der zum Punkte p^* gehörigen t_x-Richtung variierende lokale Tangentialkoordinate

$$t_x = (x - x^*)\cos\alpha + \{\varphi(x, 0) - \varphi(x^*, 0)\}\sin\alpha$$

ein, wo α der Winkel zwischen der x-Achse und der t_x-Richtung ist, so gilt

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^* &= \left(\frac{\partial f}{\partial t_x}\right)_{t_x = 0}\left(\frac{dt_x}{dx}\right)_{x = x^*} = \left(\frac{\partial f}{\partial t_x}\right)^*\left(\frac{dt_x}{dx}\right)^* \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t_x}\right)^*\left\{\cos\alpha + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^*\sin\alpha\right\} = \left(\frac{\partial f}{\partial t_x}\right)^*\frac{1}{\cos\alpha} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t_x}\right)^*\sqrt{1 + \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^*\right]^2}.\end{aligned}$$

Damit erhält man ohne weiteres bei Beachtung von (1) und der Voraussetzung dieses Hilfssatzes[24])

$$f(p') - f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x' + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y' + O\left[t'^{1+\varepsilon} + t'^{1+\lambda}\right]. \tag{36}$$

Für das Integral II kann dann geschrieben werden

$$\begin{aligned}\mathrm{II} = a_0 \iint_{(S'')} x' \Big[&\{\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(n_{p'}, t_x) + 2\cos(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})\cos(\xi, t_x) - \\ &- 5\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})\cos(r_{p'q}, t_x)\}\frac{1}{r_{p'q}^3} - \\ &- \{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, x) + 2\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(\xi, x) - \\ &- 5\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(r_{p'p}, x)\}\frac{1}{r_{p'p}^3}\Big]\, d\sigma + \\ &+ b_0 \iint_{(S'')} y'\,[\ldots]\, d\sigma + \iint_{(S'')} O\left[t'^{1+\varepsilon} + t'^{1+\lambda}\right]\cdot[\cdots]\, d\sigma \\ = \mathrm{II}_1 + \mathrm{II}_2 + \mathrm{II}_3,&\end{aligned}$$

falls

$$a_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, \quad b_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$$

---

[24]) Bei SCHAUDER, l. c. Anm. [14]) wird auf der rechten Seite irrtümlicherweise nur ein $O\left[t'^{1+\varepsilon}\right]$ angegeben.

gesetzt ist. Das Integral II_3 läßt sich wie das Integral II beim Beweise des Hilfssatzes 5 abschätzen:

$$|\mathrm{II}_3| \leqq KAC r_{pq}^{\lambda} \int_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(1+\varepsilon)}} + KAC r_{pq} \int_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{3-(1+\varepsilon+\lambda)}} +$$

$$+ KAC r_{pq}^{\lambda} \int_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(1+\varepsilon+\lambda)}} + KAC r_{pq}^{\lambda} \int_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(1+\lambda)}} +$$

$$+ KAC r_{pq} \int_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{3-(1+2\lambda)}} + KAC r_{pq}^{\lambda} \int_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(1+2\lambda)}}$$

$$\leqq KAC r_{pq}^{\lambda}.$$

Von den Integralen II_1 und II_2 braucht nur eines, etwa II_1, abgeschätzt zu werden. Das Integral II_1 zerlege man analog zu der früheren Zerlegung von II in $J_1 + J_2 + J_3$ in die drei Teilintegrale

$$\mathrm{II}_1 = J_1' + J_2' + J_3'.$$

Nimmt man weiter bei J_1' die Zerspaltung vor, wie sie früher für J_1 angegeben wurde, so findet man bei Beachtung von $|x'| \leqq r_{p'p}$:

$$|J_1'| = \left| a_0 \iint_{(S'')} x' \left\{ \frac{\cos^3(r_{p'q}, \xi) \cos(n_{p'}, t_x)}{r_{p'q}^3} - \frac{\cos^3(r_{p'p}, \xi) \cos(n_{p'}, x)}{r_{p'p}^3} \right\} d\sigma \right|$$

$$\leqq KAC \iint_{(S'')} \frac{|x'| r_{pq} r_{p'q}^4}{r_{p'q}^4} + \left| a_0 \iint_{(S'')} x' \left\{ \frac{\cos^3(r_{p'p}, \xi) \cos(n_{p'}, t_x)}{r_{p'q}^3} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\cos^3(r_{p'p}, \xi) \cos(n_{p'}, x)}{r_{p'q}^3} \right\} d\sigma \right| +$$

$$+ KAC \iint_{(S'')} \frac{|x'| r_{p'p}^{\lambda} r_{pq}}{r_{p'q}^4} d\sigma$$

$$\leqq KAC r_{pq}^{\lambda} + \left| a_0 \iint_{(S'')} \frac{x' \cos^3(r_{p'p}, \xi) \{\cos(n_{p'}, t_x) - \cos(n_{p'}, x)\}}{r_{p'q}^3} d\sigma \right|.$$

Aus

$$\cos(r_{p'p}, \xi) = \cos(r_{p'p}, x) \cos(x, \xi) + \cos(r_{p'p}, y) \cos(y, \xi) +$$

$$+ \cos(r_{p'p}, z) \cos(z, \xi)$$

folgt aber nach (11) und (10)

$$\cos(r_{p'p}, \xi) = \left(-\frac{x'}{t'}\right) \cos(x, \xi) + \left(-\frac{y'}{t'}\right) \cos(y, \xi) +$$

$$+ O[t'^{\lambda}] \cos(x, \xi) + O[t'^{\lambda}] \cos(y, \xi) + O[t'^{\lambda}] \cos(z, \xi),$$

so daß auch

$$\cos^2(r_{p'p}, \xi) = \frac{x'^2}{t'^2}\cos^2(x, \xi) + \frac{y'^2}{t'^2}\cos^2(y, \xi) + \frac{2x'y'}{t'^2}\cos(x,\xi)\cos(y,\xi) + \\ + O[t'^{\lambda}]$$

ist.

Damit erhält man, wenn man neben (19), (7) und (8) beachtet, daß nach (16) und (12)

$$\frac{1}{r^3_{p'q}} \leqq \frac{K}{t'^3} + O\left[\frac{1}{t'^{3-\lambda}}\right]$$

gilt, die Abschätzung

$$\left| a_0 \iint\limits_{(S'')} \frac{x' \cos^2(r_{p'p}, \xi)\{\cos(n_{p''}, t_x) - \cos(n_{p''}, x)\}}{r^3_{p'q}}\, d\sigma \right|$$

$$\leqq \left| a_0\{\cos(x, t_x) - \cos(x, x)\} \iint\limits_{(S'')} \frac{x' \cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p''}, x)}{r^3_{p'q}}\, d\sigma \right| +$$

$$+ \left| a_0\{\cos(y, t_x) - \cos(y, x)\} \iint\limits_{(S'')} \frac{x' \cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p''}, y)}{r^3_{p'q}}\, d\sigma \right| +$$

$$+ \left| a_0\{\cos(z, t_x) - \cos(z, x)\} \iint\limits_{(S'')} \frac{x' \cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p''}, z)}{r^3_{p'q}}\, d\sigma \right|$$

$$\leqq K A C r^{\lambda}_{pq} +$$

$$+ K A C r^{\lambda}_{pq} \left| \cos^2(x, \xi) \iint\limits_{(S'')} \frac{x'^3}{t'^5}\, d\sigma + \cos^2(y, \xi) \iint\limits_{(S'')} \frac{x' y'^2}{t'^5}\, d\sigma + \right.$$

$$\left. + 2\cos(x, \xi)\cos(y, \xi) \iint\limits_{(S'')} \frac{x'^2 y'}{t'^5}\, d\sigma \right|.$$

Die drei hier auf der rechten Seite stehenden Integrale sind aber beschränkt, denn sie unterscheiden sich zunächst durch beschränkte Größen von den Integralen mit demselben Integranden, die aber statt über S'' über die Projektion S_1'' von S'' auf die Tangentialebene in p erstreckt werden. Ersetzt man weiterhin die Integrationsfläche S_1'' durch die konzentrisch zu p gelegene Kreisringfläche S_2'', deren Randkreisradien ϱ_1 und ϱ_2 ($\varrho_1 < \varrho_2$) gleich dem minimalen bzw. maximalen Abstand der Randpunkte von S_1'' vom Punkte p sind, dann wird z. B.

$$\iint\limits_{(S_1'')} \frac{x'^3}{t'^5}\, d\sigma = \iint\limits_{(S_2'')} \frac{x'^3}{t'^5}\, d\sigma - \iint\limits_{(S_2'' - S_1'')} \frac{x'^3}{t'^5}\, d\sigma$$

$$= \int\limits_{\vartheta=0}^{2\pi} \int\limits_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{\cos^3\vartheta}{\varrho}\, d\varrho\, d\vartheta - \iint\limits_{(S_2'' - S_1'')} \frac{x'^3}{t'^5}\, d\sigma = - \iint\limits_{(S_2'' - S_1'')} \frac{x'^3}{t'^5}\, d\sigma.$$

Das letztere Integral ist aber, abgesehen von einem beschränkten Bestandteil, gleich dem Integral über ein Flächenstück, das von den inneren Randkurven von S_1'' und S_2'' berandet wird. Bezeichnet man den maximalen Abstand eines Punktes der inneren Randkurve von S_1'' vom Punkte p mit ϱ_3 ($\varrho_3 < 2\, r_{pq}$), so gilt

$$\left| \iint\limits_{(S_1'')} \frac{x'^3}{l'^5}\, d\sigma \right| \leqq K \int_{\varrho_1}^{\varrho_3} \frac{d\varrho}{\varrho} < K \frac{\varrho_3 - \varrho_1}{\varrho_1} < K \frac{r_{pq}}{\varrho_1}.$$

Auf dem inneren Rand von S'' gibt es nun einen Punkt p^*, dessen Projektion von p den Abstand ϱ_1 hat. Es ist dann offensichtlich

$$\frac{r_{pp^*}}{\varrho_1} \leqq K.$$

Da aber für alle Punkte auf diesem Rande, also insbesondere für p^*, die Abschätzung

$$r_{pq} \leqq \tfrac{1}{2}\, r_{pq} + r_{pp^*}$$

oder

$$r_{pq} \leqq 2\, r_{pp^*}$$

besteht, so folgt schließlich, wie behauptet,

$$\left| \iint\limits_{(S_1'')} \frac{x'^3}{l'^5}\, d\sigma \right| \leqq K \frac{r_{pp^*}}{\varrho_1} \leqq K.$$

Ähnlich schließt man für die zwei verbleibenden Integrale.

Zur Abschätzung der Integrale J_1' und J_2' kann man unmittelbar die im 5. Abschnitt angegebenen Abschätzungen (34) und (35) für J_2 und J_3 verwenden, wenn man den dort auftretenden Exponenten μ durch 1 und B durch C ersetzt, so daß schließlich

$$|J_2'| \leqq KAC r_{pq}^{\lambda} \quad \text{und} \quad |J_3'| \leqq KAC r_{pq}^{\lambda}$$

wird.

7. *Für einen beliebigen Punkt P gilt*

$$(37) \qquad \left.\begin{aligned} &\iint\limits_{(S)} \left| \frac{\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^3} \right| d\sigma, \\ &\iint\limits_{(S)} \left| \frac{\cos(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, \eta)\cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^3} \right| d\sigma \end{aligned}\right\} \leqq K.$$

Das ist eine unmittelbare Folge der in der Potentialtheorie benötigten Abschätzung[25])

$$(38) \qquad \iint\limits_{(S)} \left| \frac{\cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^3} \right| d\sigma \leqq K.$$

[25]) Für den Beweis vgl. J. SCHAUDER, l. c. Anm. [14]), insbes. S. 628.

8. *Sind $V_i(p)$ und $V_a(p)$ bzw. $W_i(p)$ und $W_a(p)$ die Grenzwerte von $V(p)$ bzw. $W(p)$, wenn sich der Punkt P von innen oder außen einem Punkte p von S nähert, so gilt, falls $f(p)$ stetig ist,*

$$V_i(p) - V_a(p) = \frac{4\pi}{3} f(p)$$

und

$$V_i(p) + V_a(p) = 2 \iint_{(S)} f(p') \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} d\sigma$$

bzw.

$$W_i(p) - W_a(p) = 0,$$

$$W_i(p) + W_a(p) = 2 \iint_{(S)} f(p') \frac{\cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, \eta) \cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} d\sigma.$$

Schreibt man nämlich, um z. B. das erste Relationenpaar zu beweisen,

$$V(P) = f(p) \iint_{(S)} \frac{\cos^2(r_{p'P}, \xi) \cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^2} d\sigma +$$

$$+ \iint_{(S)} \{f(p') - f(p)\} \frac{\cos^2(r_{p'P}, \xi) \cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^2} d\sigma,$$

so erkennt man bei Beachtung des Hilfssatzes 7 in bekannter Schlußweise, daß das zweite Integral beim Durchgang durch die Fläche stetig ist. Der Hilfssatz 1 dieses Paragraphen liefert dann die Relationen

$$V_i(p) - f(p) \frac{4\pi}{3} = V(p) - f(p) \frac{2\pi}{3} = V_a(p)$$

oder

$$V_i(p) = V(p) + \frac{2\pi}{3} f(p), \tag{39}$$

$$V_a(p) = V(p) - \frac{2\pi}{3} f(p), \tag{40}$$

aus denen die Behauptung folgt.

Entsprechend hat man

$$W_i(p) = W(p), \tag{41}$$

$$W_a(p) = W(p). \tag{42}$$

9. *Besitzt die Belegung $f(p)$ partielle Ableitungen, die ihrerseits einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügen, und konvergieren die*

Punktfolgen P_n^i bzw. P_n^a längs der Normalen von der einen oder anderen Seite von S gegen p, so gilt für das im Punkte p lokale Koordinatensystem

$$\lim_{\substack{P_n^i \to p \\ P_n^a \to p}} \frac{\partial V(P)}{\partial x} = \iint_{(S)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(n_{p'}, x) +$$

$$+ 2\cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(\xi, x) -$$

$$- 5\cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(r_{p'p}, x)\} \frac{1}{r_{p'p}^3} d\sigma \pm \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0,$$

$$\lim_{\substack{P_n^i \to p \\ P_n^a \to p}} \frac{\partial W(P)}{\partial x} = \iint_{(S)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, \eta) \cos(n_{p'}, x) +$$

$$+ \cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(\eta, x) + \cos(r_{p'p}, \eta) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(\xi, x) -$$

$$- 5\cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, \eta) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(r_{p'p}, x)\} \frac{1}{r_{p'p}^3} d\sigma.$$

Beweis. Es ist zunächst auf Grund von Hilfssatz 1:

$$\frac{\partial V(P)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ V(P) - f(p) \iint_{(S)} \frac{\cos^2(r_{p'P}, \xi) \cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^2} d\sigma \right\}.$$

Schreibt man den rechts in der Klammer stehenden Ausdruck als ein einziges Integral über S und zerlegt es in der Form

$$\iint_{(S)} = \iint_{(S-s)} + \iint_{(s)},$$

wo s ein Teilflächenstück von S ist, das ganz im Innern von S_p enthalten ist, und dessen Projektion auf die Tangentialebene in p ein Kreis K_ε vom Radius ε ist ($\varepsilon < \varrho_0$), so brauchen wir uns wegen

$$\lim_{P \to p} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \iint_{(S-s)} \right\} = \lim_{P \to p} \iint_{(S-s)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos^2(r_{p'P}, \xi) \cos(n_{p'}, x) +$$

$$+ 2\cos(r_{p'P}, \xi) \cos(r_{p'P}, n_{p'}) \cos(\xi, x) -$$

$$- 5\cos^2(r_{p'P}, \xi) \cos(r_{p'P}, n_{p'}) \cos(r_{p'P}, x)\} \frac{1}{r_{p'P}^3} d\sigma$$

$$= \iint_{(S-s)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(n_{p'}, x) +$$

$$+ 2\cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(\xi, x) -$$

$$- 5\cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(r_{p'p}, x)\} \frac{1}{r_{p'p}^3} d\sigma$$

nur mit der Ableitung des Integrals $\iint\limits_{(s)}$ zu befassen, für die wir bei Beachtung von (36) auch

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\iint\limits_{(s)} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x' \{\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(n_{p'}, x) \\ &+ 2\cos(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(\xi, x) - \\ &- 5\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(r_{p'P}, x)\}\frac{1}{r^3_{p'P}}d\sigma + \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \iint\limits_{(s)} y'\{\cdots\}\frac{1}{r^3_{p'P}}d\sigma + \iint\limits_{(s)} O[t'^{1+\lambda}]\{\cdots\}\frac{1}{r^3_{p'P}}d\sigma \\ &= \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}\end{aligned}$$

schreiben können.

Für $|\mathrm{III}|$ gilt aber nach (2)

$$\begin{aligned}|\mathrm{III}| &\leqq \left|\iint\limits_{(s)} O[t'^{1+\lambda}]\left\{\frac{1}{(t'^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} + O\left[\frac{1}{(t'^2+h^2)^{\frac{3-\lambda}{2}}}\right]\right\}d\sigma\right| \\ &\leqq \iint\limits_{(s)} O\left[\frac{1}{t'^{2-\lambda}}\right]d\sigma \leqq O\left[\int\limits_0^{\varepsilon}\frac{d\varrho}{\varrho^{1-\lambda}}\right] = O[\varepsilon^{\lambda}],\end{aligned}$$

so daß das Integral III mit $\varepsilon \to 0$ gegen Null geht.

Das Integral I zerlegen wir gemäß den drei Summanden in der geschweiften Klammer des Integranden in drei Teilintegrale. Das erste Teilintegral läßt sich wegen (2) und (7) folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}&\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x'\frac{\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos n_{p'}, x)}{r^3_{p'P}}d\sigma\right| \\ &\leqq O\left[\iint\limits_{(s)}\frac{x'(t'^2+z'^2)^{\frac{\lambda}{2}}}{t'^3}d\sigma\right] = O\left[\int\limits_0^{\varepsilon}\frac{d\varrho}{\varrho^{1-\lambda}}\right] = O[\varepsilon^{\lambda}].\end{aligned}$$

wenn man noch nach (1) $z' = O[t'^{1+\lambda}]$ beachtet. Da gemäß

$$\begin{aligned}\cos(r_{p'P}, \xi) = &\cos(r_{p'P}, x)\cos(x, \xi) + \cos(r_{p'P}, y)\cos(y, \xi) + \\ &+ \cos(r_{p'P}, z)\cos(z, \xi)\end{aligned}$$

und (5), (6) und (3) die Abschätzung

$$\begin{aligned}\cos(r_{p'P}, \xi) = &-\frac{x'}{\sqrt{t'^2+h^2}}\cos(x, \xi) - \frac{y'}{\sqrt{t'^2+h^2}}\cos(y, \xi) + \\ &+ \frac{h}{\sqrt{t'^2+h^2}}\cos(z, \xi) + O[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}]\end{aligned} \tag{43}$$

besteht, so erhält man für das zweite Teilintegral wegen (2) und (4) die Relation

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x' \, 2\cos(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(\xi, x)\frac{1}{r^3_{p'P}}\,d\sigma$$

$$= 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x' \Big\{ -\frac{x'}{\sqrt{t'^2+h^2}}\cos(x,\xi) - \frac{y'}{\sqrt{t'^2+h^2}}\cos(y,\xi) + \frac{h}{\sqrt{t'^2+h^2}}\cos(z,\xi) + O\left[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\Big\}$$

$$\Big\{\frac{h}{\sqrt{t'^2+h^2}} + O\left[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\Big\}\cos(\xi,x)\left\{\frac{1}{\sqrt{t'^2+h^2}^3} + O\left[\frac{1}{(t'^2+h^2)^{\frac{3-\lambda}{2}}}\right]\right\} d\sigma$$

$$= -2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \Big\{\cos^2(\xi,x)\,h\iint\limits_{(s)}\frac{x'^2}{(t'^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\,d\sigma + \cos(\xi,x)\cos(\xi,y)\,h\iint\limits_{(s)}\frac{x'y'}{(t'^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\,d\sigma -$$

$$- \cos(\xi,x)\cos(\xi,z)\,h^2\iint\limits_{(s)}\frac{x'}{(t'^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\,d\sigma + O[\varepsilon^\lambda]\Big\}$$

$$= -2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos^2(\xi,x)\,h\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\,d\vartheta\int\limits_0^{\varepsilon}\frac{\varrho^3}{(\varrho^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\,d\varrho + O[\varepsilon^\lambda]$$

$$= -2\pi\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos^2(\xi,x)\,h\left\{\left(-\varepsilon^2 - \frac{2h^2}{3}\right)\frac{1}{(\varepsilon^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{|h|}\right\} + O[\varepsilon^\lambda],$$

wenn man berücksichtigt, daß

$$\int \frac{x^3}{(x^2+a)^{\frac{5}{2}}}\,dx = \frac{-a^2 - \frac{2a}{3}}{(x^2+a)\sqrt{x^2+a}}$$

ist, die Abschätzungen

$$h\int\limits_0^{\varepsilon}\frac{\varrho^3\,\varrho^\lambda}{(\varrho^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\,d\varrho < \frac{h}{(h^2)^{\frac{1}{2}}}\int\limits_0^{\varepsilon}\frac{\varrho^{3+\lambda}}{(\varrho^2)^{\frac{4}{2}}}\,d\varrho = O[\varepsilon^\lambda],$$

$$h^2\int\limits_0^{\varepsilon}\frac{\varrho^2\,\varrho^\lambda}{(\varrho^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\,d\varrho < \frac{h^2}{(h^2)^{\frac{2}{2}}}\int\limits_0^{\varepsilon}\frac{\varrho^{2+\lambda}}{(\varrho^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\varrho = O[\varepsilon^\lambda]$$

bestehen, und die Integrale

$$\iint\limits_{(K_\varepsilon)}\frac{x'y'}{(t'^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\,dx\,dy = 0, \qquad \iint\limits_{(K_\varepsilon)}\frac{x'}{(t'^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\,dx\,dy = 0$$

sind, wie man unter Einführung von Polarkoordinaten sofort sieht. Bei festem ε und $h \to 0$ geht also das zweite Teilintegral gegen

$$\mp \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos^2(\xi, x) + O[\varepsilon^4],$$

je nachdem der Fall $P_n^i \to p$ oder $P_n^a \to p$ vorliegt.

Für das dritte Teilintegral von I findet man schließlich nach (43), (2), (4) und (5)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x' \, 5\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(r_{p'P}, x)\frac{1}{r_{p'P}^3}\, d\sigma$$

$$= 5\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x' \left\{\frac{x'^2}{t'^2+h^2}\cos^2(x,\xi) + \frac{y'^2}{t'^2+h^2}\cos^2(y,\xi) + \frac{h^2}{t'^2+h^2}\cos^2(z,\xi) + \right.$$

$$+ 2\frac{x'y'}{t'^2+h^2}\cos(x,\xi)\cos(y,\xi) - 2\frac{x'h}{t'^2+h^2}\cos(x,\xi)\cos(z,\xi) -$$

$$\left. - 2\frac{y'h}{t'^2+h^2}\cos(y,\xi)\cos(z,\xi) + O\left[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\right\}$$

$$\left\{\frac{h}{\sqrt{t'^2+h^2}} + O\left[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\right\}\left\{-\frac{x'}{\sqrt{t'^2+h^2}} + O\left[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{t'^2+h^2}^3} + O\left[\frac{1}{(t'^2+h^2)^{\frac{3-\lambda}{2}}}\right]\right\} d\sigma$$

$$= -5\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left\{\cos^2(\xi,x)\,h\iint\limits_{(s)}\frac{x'^4}{(t'^2+h^2)^{\frac{7}{2}}}\,d\sigma + \cos^2(\xi,y)\,h\iint\limits_{(s)}\frac{x'^2y'^2}{(t'^2+h^2)^{\frac{7}{2}}}\,d\sigma + \right.$$

$$+ \cos^2(\xi,z)\,h^3\iint\limits_{(s)}\frac{x'^2}{(t'^2+h^2)^{\frac{7}{2}}}\,d\sigma + 2\cos(\xi,x)\cos(\xi,y)\,h\iint\limits_{(s)}\frac{x'^3y'}{(t'^2+h^2)^{\frac{7}{2}}}\,d\sigma -$$

$$- 2\cos(\xi,x)\cos(\xi,z)\,h^2\iint\limits_{(s)}\frac{x'^3}{(t'^2+h^2)^{\frac{7}{2}}}\,d\sigma -$$

$$\left. - 2\cos(\xi,y)\cos(\xi,z)\,h^2\iint\limits_{(s)}\frac{x'^2y'}{(t'^2+h^2)^{\frac{7}{2}}}\,d\sigma + O[\varepsilon^4]\right\}$$

$$= -5\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0\left[\cos^2(\xi,x)\frac{3\pi}{4}\,h\left\{-\frac{\varepsilon^4}{5(\varepsilon^2+h^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{4}{5}\left(\varepsilon^2+\frac{2h^2}{3}\right)\frac{1}{(\varepsilon^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{8}{15}\frac{1}{|h|}\right\} + \right.$$

$$+ \cos^2(\xi,y)\frac{\pi}{4}\,h\left\{-\frac{\varepsilon^4}{5(\varepsilon^2+h^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{4}{5}\left(\varepsilon^2+\frac{2h^2}{3}\right)\frac{1}{(\varepsilon^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{8}{15}\frac{1}{|h|}\right\} +$$

$$\left. + \cos^2(\xi,z)\,\pi\,h^3\left\{-\frac{\varepsilon^2}{5(\varepsilon^2+h^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2}{15}\frac{1}{(\varepsilon^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{15}\frac{1}{|h|^3}\right\}\right] + O[\varepsilon^4],$$

wenn man noch beachtet, daß

$$\int_0^{2\pi} \cos^4\vartheta\, d\vartheta = \frac{3\pi}{4}, \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta\, d\vartheta = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta\, d\vartheta = \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \cos^3\vartheta\, d\vartheta = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta = 0,$$

$$\int \frac{x^5}{(x^2+a)^{\frac{7}{2}}}\, dx = -\frac{x^4}{5\,(x^2+a)^{\frac{5}{2}}} - \frac{4}{5}\,\frac{x^2+\frac{2a}{3}}{(x^2+a)\sqrt{x^2+a}}$$

und

$$\int \frac{x^3}{(x^2+a)^{\frac{7}{2}}}\, dx = -\frac{x^2}{5\,(x^2+a)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2}{15}\,\frac{1}{(x^2+a)^{\frac{3}{2}}}$$

ist. Der Limes bei festem ε und $h \to 0$ des dritten Teilintegrals ist also

$$\mp 5\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0\left[\cos^2(\xi, x)\,\frac{3\pi}{4}\,\frac{8}{15} + \cos^2(\xi, y)\,\frac{\pi}{4}\,\frac{8}{15} + \cos^2(\xi, z)\,\pi\,\frac{2}{15}\right] + O[\varepsilon^4]$$

$$= \mp 2\pi\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0\left[\cos^2(\xi, x) + \frac{1}{3}\cos^2(\xi, y) + \frac{1}{3}\cos^2(\xi, z)\right] + O[\varepsilon^4],$$

je nachdem der Fall $P_n' \to p$ oder $P_n'' \to p$ vorliegt.

Das Integral I konvergiert also für $h \to 0$ gegen

$$\lim_{\substack{P_n' \to p \\ P_n'' \to p}} \mathrm{I} = \mp\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos^2(\xi, x) \pm 2\pi\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0\left[\cos^2(\xi, x) + \frac{1}{3}\cos^2(\xi, y) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\cos^2(\xi, z)\right] + O[\varepsilon^4]$$

$$= \pm\frac{2\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0\left[\cos^2(\xi, x) + \cos^2(\xi, y) + \cos^2(\xi, z)\right] + O[\varepsilon^4]$$

$$= \pm\frac{2\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0.$$

Nimmt man mit dem Integral II eine entsprechende Zerlegung in drei Teilintegrale vor, so findet man, daß das erste ein $O[\varepsilon^4]$ ist, während die beiden anderen ergeben

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \iint_{(s)} y'\, 2\cos(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(\xi, x)\,\frac{1}{r_{p'P}^3}\, d\sigma$$

$$= -2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0\left\{\cos^2(\xi, x)\, h \iint_{(s)} \frac{x'y'}{(\varrho'^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\, d\sigma + \cos(\xi, x)\cos(\xi, y)\, h \iint_{(s)} \frac{y'^2}{(\varrho'^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\, d\sigma - \right.$$

$$\left. - \cos(\xi, x)\cos(\xi, z)\, h^2 \iint_{(s)} \frac{y'}{(\varrho''^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\, d\sigma + O[\varepsilon^4],\right.$$

d. h. für $h \to 0$:

$$\mp \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, x)\cos(\xi, y) + O[\varepsilon^2]$$

bzw.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \iint\limits_{(\sigma)} y'\, 5\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(r_{p'P}, x)\frac{1}{r_{p'P}^3}\, d\sigma$$

$$= -5\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \Big\{\cos^2(\xi, x)\, h \iint\limits_{(\sigma)} \frac{x'^3 y'}{(t'^2+h^2)^{\frac{7}{2}}}\, d\sigma + \cos^2(\xi, y)\, h \iint\limits_{(\sigma)} \frac{x' y'^3}{(t'^2+h^2)^{\frac{7}{2}}}\, d\sigma +$$

$$+ \cos^2(\xi, z)\, h^2 \iint\limits_{(\sigma)} \frac{x' y'}{(t'^2+h^2)^{\frac{7}{2}}}\, d\sigma + 2\cos(\xi, x)\cos(\xi, y)\, h \iint\limits_{(\sigma)} \frac{x'^2 y'^2}{(t'^2+h^2)^{\frac{7}{2}}}\, d\sigma -$$

$$- 2\cos(\xi, x)\cos(\xi, z)\, h^2 \iint\limits_{(\sigma)} \frac{x'^2 y'}{(t'^2+h^2)^{\frac{7}{2}}}\, d\sigma -$$

$$- 2\cos(\xi, y)\cos(\xi, z)\, h^2 \iint\limits_{(\sigma)} \frac{x' y'^2}{(t'^2+h^2)^{\frac{7}{2}}}\, d\sigma + O[\varepsilon^2]\Big\},$$

d. h. für $h \to 0$

$$\mp 5\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 2\cos(\xi, x)\cos(\xi, y)\,\frac{\pi}{4}\,\frac{8}{15} + O[\varepsilon^2]$$

$$= \mp \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, x)\cos(\xi, y) + O[\varepsilon^2],$$

wenn man noch beachtet, daß

$$\int_0^{2\pi} \cos\vartheta \sin^3\vartheta\, d\vartheta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos\vartheta \sin^3\vartheta\, d\vartheta = 0$$

ist.

Da mithin

$$\lim_{h \to 0} \mathrm{II} = \mp \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, x)\cos(\xi, y) \pm \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, x)\cos(\xi, y) + O[\varepsilon^2] = O[\varepsilon^2]$$

ist, so folgt

$$\lim_{h \to 0} \iint\limits_{(\sigma)} = \lim_{h \to 0} \{\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}\} = \pm \frac{2\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + O[\varepsilon^2].$$

10. *Unter der Voraussetzung von Hilfssatz 9 hat man für die Normalableitungen von V bzw. W die Limesrelationen*

$$\lim_{\substack{P_n^i \to p \\ P_n^a \to p}} \frac{\partial V(P)}{\partial z} = \iint_{(S)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(n_{p'}, n_p) +$$
$$+ 2\cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(n_p, \xi) -$$
$$- 5\cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(r_{p'p}, n_p)\} \frac{1}{r_{p'p}^3} d\sigma \mp$$
$$\mp \frac{4\pi}{3} \cos(\xi, z) \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(\xi, x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, y) \right\},$$

$$\lim_{\substack{P_n^i \to p \\ P_n^a \to p}} \frac{\partial W(P)}{\partial z} = \iint_{(S)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, \eta) \cos(n_{p'}, n_p) +$$
$$+ \cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(n_p, \eta) +$$
$$+ \cos(r_{p'p}, \eta) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(n_p, \xi) -$$
$$- 5\cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, \eta) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(r_{p'p}, n_p)\} \frac{1}{r_{p'p}^3} d\sigma \mp$$
$$\mp \frac{2\pi}{3} \left\{ \cos(\xi, z) \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(x, \eta) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(y, \eta) \right) + \right.$$
$$\left. + \cos(\eta, z) \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(x, \xi) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(y, \xi) \right) \right\}$$

Beweis. Nach Hilfssatz 1 dieses Paragraphen ist

$$\frac{\partial V(P)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ V(P) - f(p) \iint_{(S)} \frac{\cos^2(r_{p'P}, \xi) \cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^2} d\sigma \right\}.$$

Wird der in der geschweiften Klammer stehende Ausdruck wieder analog wie bei dem Beweise von Hilfssatz 9 als ein Integral über S geschrieben und in der Form

$$\iint_{(S)} = \iint_{(S-s)} + \iint_{(s)}$$

zerlegt, so braucht wegen

$$\lim_{P \to p} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \iint_{(S-s)} \right\} = \lim_{P \to p} \iint_{(S-s)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos^2(r_{p'P}, \xi) \cos(n_{p'}, n_p) +$$
$$+ 2\cos(r_{p'P}, \xi) \cos(r_{p'P}, n_{p'}) \cos(n_p, \xi) -$$
$$- 5\cos^2(r_{p'P}, \xi) \cos(r_{p'P}, n_{p'}) \cos(r_{p'P}, n_p)\} \frac{1}{r_{p'P}^3} d\sigma$$
$$= \iint_{(S-s)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(n_{p'}, n_p) +$$
$$+ 2\cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(n_p, \xi) -$$
$$- 5\cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(r_{p'p}, n_p)\} \frac{1}{r_{p'p}^3} d\sigma.$$

[man vergleiche hierzu (23)] nur noch der Limes von

$$\frac{\partial}{\partial z}\iint_{(s)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint_{(s)} x' \{\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(\mathfrak{n}_{p'}, \mathfrak{n}_p) +$$
$$+ 2\cos(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, \mathfrak{n}_{p'})\cos(\mathfrak{n}_p, \xi) -$$
$$- 5\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, \mathfrak{n}_{p'})\cos(r_{p'P}, \mathfrak{n}_p)\}\frac{1}{r^3_{p'P}}\,d\sigma +$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \iint_{(s)} y' \{\cdots\}\frac{1}{r^3_{p'P}}\,d\sigma + \iint_{(s)} O[t'^{1+\lambda}]\{\cdots\}\frac{1}{r^3_{p'P}}\,d\sigma$$
$$= \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}$$

untersucht zu werden.

Für III erkennt man genau, wie im vorhergehenden Abschnitt, daß

$$|\mathrm{III}| \leqq O[\varepsilon^\lambda]$$

ist. Zerlegt man I wieder in drei Teilintegrale, so findet man für das erste bei Beachtung von (43) und (8)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint_{(s)} \frac{x'\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(\mathfrak{n}_{p'}, \mathfrak{n}_p)}{r^3_{p'P}}\,d\sigma$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint_{(s)} x' \Big\{\frac{x'^2}{t'^2+h^2}\cos^2(x, \xi) + \frac{y'^2}{t'^2+h^2}\cos^2(y, \xi) + \frac{h^2}{t'^2+h^2}\cos^2(z, \xi) +$$
$$+ \frac{2x'y'}{t'^2+h^2}\cos(x, \xi)\cos(y, \xi) - \frac{2x'h}{t'^2+h^2}\cos(x, \xi)\cos(z, \xi) -$$
$$- \frac{2y'h}{t'^2+h^2}\cos(y, \xi)\cos(z, \xi) +$$
$$+ O\left[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\Big\}\{1 + O[t'^\lambda]\}\left\{\frac{1}{\sqrt{t'^2+h^2}^3} + O\left[\frac{1}{(t'^2+h^2)^{\frac{3-\lambda}{2}}}\right]\right\}d\sigma,$$

so daß für $h \to 0$ sich der Grenzwert

$$\mp\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(\xi, x)\cos(\xi, z) + O[\varepsilon^\lambda]$$

ergibt.

Für das zweite Teilintegral von I folgt nach (43) und (4)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint_{(s)} x'\,2\cos(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(n_p, \xi)\,\frac{1}{r^3_{p'P}}\,d\sigma$$
$$= 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint_{(s)} x' \Big\{-\frac{x'}{\sqrt{t'^2+h^2}}\cos(x, \xi) - \frac{y'}{\sqrt{t'^2+h^2}}\cos(y, \xi) + \frac{h}{\sqrt{t'^2+h^2}}\cos(z, \xi) +$$
$$+ O\left[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\Big\}\left\{\frac{h}{\sqrt{t'^2+h^2}} + O\left[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\right\}\cos(z, \xi)$$
$$\left\{\frac{1}{\sqrt{t'^2+h^2}^3} + O\left[\frac{1}{(t'^2+h^2)^{\frac{3-\lambda}{2}}}\right]\right\}d\sigma,$$

so daß der Grenzwert für $h \to 0$

$$\mp \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(\xi, x)\cos(\xi, z) + O[\varepsilon^\lambda]$$

ist.

Für das dritte Teilintegral von I wird schließlich

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x' 5\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(r_{p'P}, n_p)\frac{1}{r_{p'P}^3}\,d\sigma$$

$$= 5\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x'\left\{\frac{x'^2}{t'^2+h^2}\cos^2(x,\xi) + \frac{y'^2}{t'^2+h^2}\cos^2(y,\xi) + \frac{h^2}{t'^2+h^2}\cos^2(z,\xi) + \right.$$

$$+ \frac{2x'y'}{t'^2+h^2}\cos(x,\xi)\cos(y,\xi) - \frac{2x'h}{t'^2+h^2}\cos(x,\xi)\cos(z,\xi) -$$

$$\left. - \frac{2y'h}{t'^2+h^2}\cos(y,\xi)\cos(z,\xi) + O\left[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\right\}$$

$$\left\{\frac{h}{\sqrt{t'^2+h^2}} + O\left[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\right\}\left\{\frac{h}{\sqrt{t'^2+h^2}} + O\left[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{t'^2+h^2}^3} + O\left[\frac{1}{(t'^2+h^2)^{\frac{3-\lambda}{2}}}\right]\right\} d\sigma,$$

so daß der Grenzwert für $h \to 0$

$$\mp 10\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(\xi, x)\cos(\xi, z)\pi\frac{2}{15} + O[\varepsilon^\lambda]$$

$$= \mp \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(\xi, x)\cos(\xi, z) + O[\varepsilon^\lambda]$$

lautet.

Damit ist also erkannt, daß

$$\lim_{h\to 0} \mathrm{I} = \mp \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(\xi, x)\cos(\xi, z) + O[\varepsilon^\lambda]$$

ist. Wird das Integral II entsprechend behandelt, so ergibt sich

$$\lim_{h\to 0} \mathrm{II} = \mp \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, y)\cos(\xi, z) \mp \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, y)\cos(\xi, z) \pm$$

$$\pm \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, y)\cos(\xi, z) + O[\varepsilon^\lambda]$$

$$= \mp \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, y)\cos(\xi, z) + O[\varepsilon^\lambda],$$

so daß insgesamt

$$\lim_{\substack{P_n^i \to p \\ P_n^a \to p}} \frac{\partial}{\partial z}\iint\limits_{(s)} = \mp \frac{4\pi}{3}\cos(\xi, z)\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(\xi, x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, y)\right\} + O[\varepsilon^\lambda]$$

ist.

N. B. Die Grenzwerte in den Hilfssätzen 9 und 10 werden gleichmäßig angenommen.

11. *Genügt die Belegung $f(p)$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten μ, so genügen die Integrale $V(P)$ und $W(P)$ in $R+S$ und in R_a+S einer H-Bedingung mit dem gleichen Exponenten μ, wenn man hier, abweichend von der früher benutzten Terminologie, die Werte von V und W in einem Punkte p der Berandung S von R bzw. R_a durch*

$$V(p) = \lim_{P_n^i \to p} V(P_n^i), \quad W(p) = \lim_{P_n^i \to p} W(P_n^i)$$

bzw.

$$V(p) = \lim_{P_n^a \to p} V(P_n^a), \quad W(p) = \lim_{P_n^a \to p} W(P_n^a)$$

gegeben denkt.

Beweis[26]). Es seien P_1, P_2 zwei beliebige in R (oder in R_a) gelegene Punkte, für die

$$r_{P_1 P_2} = r_{12} < \frac{\varrho_0}{8}$$

gilt, und deren Entfernung von der Fläche kleiner als $\frac{\varrho_0}{4}$ ist. Versteht man unter K_{12} die Kugel mit dem Radius r_{12} um den Mittelpunkt P von $\overline{P_1 P_2}$, so sei

$$s = S \cdot K_{12},$$

wobei s natürlich auch die Nullmenge sein kann. Mit p_0 bezeichne man den P_1 am nächsten gelegenen Punkt von S, so daß

$$r_{p_0 P_1} < \frac{\varrho_0}{4}$$

ist. Die Strecke $\overline{p_0 P_1}$ steht dann offenbar auf S senkrecht.

Es kann nun

$$V(P_1) - V(P_2) = \iint_{(S)} \{f(p') - f(p_0)\} \left\{ \frac{\cos^2(r_{p'P_1}, \xi)\cos(r_{p'P_1}, n_{p'})}{r_{p'P_1}^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{\cos^2(r_{p'P_2}, \xi)\cos(r_{p'P_2}, n_{p'})}{r_{p'P_2}^2} \right\} d\sigma$$
$$= \iint_{(s)} + \iint_{(S-s)}$$

geschrieben werden. Ist s nicht gleich der Nullmenge, so gibt es mindestens einen Punkt p von s mit

$$r_{pP_1} \leqq r_{pP} + r_{PP_1} \leqq r_{12} + \frac{1}{2} r_{12} = \frac{3}{2} r_{12},$$

[26]) Bei den für den Beweis benutzten Abschätzungen sind in Richtigstellung der ursprünglichen SCHAUDERschen Fassung einige Modifikationen angebracht worden, die auch bei der Behandlung des Potentials der Doppelschicht entsprechend zu benutzen sind.

so daß auch

$$r_{p_0 P_1} \leqq \frac{3}{2} r_{12}$$

und daher

$$r_{p p_0} \leqq r_{p P_1} + r_{P_1 p_0} \leqq 3 r_{12}$$

gilt. Da dann für jeden Punkt p von s

$$|f(p) - f(p_0)| \leqq 3 B r_{12}^{\mu}$$

ist, so folgt auf Grund von Hilfssatz 7 dieses Paragraphen, daß

$$(44) \quad \iint_{(s)} \{f(p') - f(p_0)\} \left\{ \frac{\cos^2(r_{p' P_1}, \xi) \cos(r_{p' P_1}, n_{p'})}{r_{p' P_1}^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos^2(r_{p' P_2}, \xi) \cos(r_{p' P_2}, n_{p'})}{r_{p' P_2}^2} \right\} d\sigma$$

$$\leqq K B r_{12}^{\mu}$$

ist.

Außerhalb von K_{12} muß nach (13) und (17)

$$(45) \quad \left| \frac{\cos^2(r_{p P_1}, \xi) \cos(r_{p P_1}, n_p)}{r_{p P_1}^2} - \frac{\cos^2(r_{p P_2}, \xi) \cos(r_{p P_2}, n_p)}{r_{p P_2}^2} \right|$$

$$\leqq K \frac{r_{12}}{r_{p P_1}^3}$$

sein. Versteht man unter $K_{\varrho_0}^{(p_0)}$ die feste Kugel mit dem Radius $\frac{\varrho_0}{2}$ um p_0, so ist s, da für einen beliebigen Punkt p von s

$$r_{p p_0} \leqq 3 r_{12} < \frac{\varrho_0}{2}$$

gilt, in $K_{\varrho_0}^{(p_0)}$ enthalten. Die Menge $S - S \cdot K_{\varrho_0}^{(p_0)}$ liegt also außerhalb von K_{12}. Da aber für einen beliebigen Punkt p von ihr

$$r_{p P_1} \geqq r_{p p_0} - r_{p_0 P_1} \geqq \frac{\varrho_0}{2} - \frac{\varrho_0}{4} = \frac{\varrho_0}{4}$$

sein muß, so ergibt sich nach der gleichzeitig erfüllten Ungleichung (45) die Abschätzung

$$(46) \quad \left| \iint_{(S - S \cdot K_{\varrho_0}^{(p_0)})} \right| \leqq K B r_{12},$$

wenn für die Konstante B der H-Bedingung für $f(p)$ gleichzeitig $\operatorname{Max}|f(p)| \leqq B$ gilt.

Versteht man weiter unter R_{12} die Kugel vom Radius r_{12} um den Punkt p_0 und ist $\sigma = S \cdot R_{12}$, so gilt nach dem Hilfssatz 7 dieses Paragraphen

$$(47)\quad \left|\iint_{(\sigma)} \{f(p') - f(p_0)\} \left\{ \frac{\cos^3(r_{p'P_1}, \xi)\cos(r_{p'P_1}, n_{p'})}{r^2_{p'P_1}} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\cos^3(r_{p'P_2}, \xi)\cos(r_{p'P_2}, n_{p'})}{r^2_{p'P_2}} \right\} d\sigma \right|$$
$$\leqq K B r_{12}^{\mu} \left\{ \iint_{(\sigma)} \left| \frac{\cos^3(r_{p'P_1}, \xi)\cos(r_{p'P_1}, n_{p'})}{r^3_{p'P_1}} \right| d\sigma + \right.$$
$$\left. + \iint_{(\sigma)} \left| \frac{\cos^3(r_{p'P_2}, \xi)\cos(r_{p'P_2}, n_{p'})}{r^3_{p'P_2}} \right| d\sigma \right\}$$
$$\leqq K B r_{12}^{\mu}.$$

Für einen beliebigen Punkt p von $S \cdot K_{\varrho_0}^{(p_0)}$ bestehen nun die Abschätzungen

$$(48)\qquad r_{pp_0} \leqq KA(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad r_{pP_1} \geqq (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}},$$

wenn man das in p_0 lokale rechtwinklige Koordinatensystem zugrunde legt, bei dem die Strecke $\overline{p_0 P_1}$ auf der z-Achse liegt. Daher findet man nach (45) und (48)

$$(49)\qquad \left| \iint_{(S \cdot K_{\varrho_0}^{(p_0)} - (s + \sigma))} \right| \leqq K B r_{12} \iint_{(S \cdot K_{\varrho_0}^{(p_0)} - (s + \sigma))} \frac{r^{\mu}_{p'p_0}}{r^3_{p'P_1}} d\sigma$$
$$\leqq KAB r_{12} \iint_{(S \cdot K_{\varrho_0}^{(p_0)} - (s + \sigma))} \frac{1}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3-\mu}{2}}} d\sigma \leqq KAB r_{12}^{\mu}.$$

Aus (44), (46), (47) und (49) folgt aber insgesamt

$$|V(P_1) - V(P_2)| = \left| \iint_{(s)} + \iint_{(S - S \cdot K_{\varrho_0}^{(p_0)})} + \iint_{(\sigma)} + \iint_{(S \cdot K_{\varrho_0}^{(p_0)} - (s + \sigma))} \right| \leqq KBr_{12}^{\mu}$$

q. e. d.

12. *Die in diesem Paragraphen für den Raum abgeleiteten Hilfssätze gelten mutatis mutandis auch für die Ebene.*

Sind ξ, η die Koordinaten in bezug auf ein beliebiges in der Ebene gelegenes rechtwinklig-kartesisches Bezugssystem, so bestehen, falls die Kurve S den in § 1 genannten Voraussetzungen genügt, die (24) und (25) entsprechenden Relationen

$$(50)\quad \int_{(S)} \left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds = \int_{(S)} \frac{\cos^3(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r^3_{p'P}} ds = \begin{cases} \pi \\ \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{cases},$$

je nachdem P im Innengebiet von S, auf S oder im Außengebiet von S liegt, und

$$(51)\qquad \int_{(S)} \frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds = \int_{(S)} \frac{\cos(r_{p'P},\xi)\cos(r_{p'P},\eta)\cos(r_{p'P},n_{p'})}{r_{p'P}}\,ds = 0$$

bei beliebiger Lage des Aufpunktes P. Den Beweis von (50) und (51) kann man unter Benutzung des erst an einer späteren Stelle dieser Arbeit angegebenen ebenen Analogons (161), (162) der räumlichen Beziehungen (30) mit derselben Methode erbringen, die zum Beweise von (24) und (25) herangezogen wurde.

Mit geometrischen Hilfssätzen in der Art, wie sie in § 2 angegeben wurden, können die Analoga der Hilfssätze 2 bis 11 für den ebenen Fall bewiesen werden. Die Analoga der Hilfssätze 2 bis 6 lassen sich jedoch auch unmittelbar aus den bereits bewiesenen Sätzen für den räumlichen Fall ablesen, wie jetzt noch kurz gezeigt werden soll[27]).

Man ergänze das ξ,η-Koordinatensystem durch eine zur ξ,η-Ebene senkrechte ζ-Achse zu einem räumlichen Bezugssystem und bilde mit Hilfe der auf der Kurve S definierten integrablen Funktion $f(p)$ das über einen unendlich langen Zylinder, dessen Erzeugende der ζ-Achse parallel sind, erstreckte Integral

$$(52)\qquad \lim_{b\to\infty}\int_{(S)}\left\{\int_{-b}^{b} f(p)\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\,d\zeta\right\}ds,$$

wobei p der auf dem Zylinder gelegene Integrationspunkt, P ein Punkt der ξ,η-Ebene ist und die Definition von $f(p)$ dadurch auf alle Punkte p des Zylinders erweitert wird, daß für sie der Wert der Funktion gleich dem an denjenigen auf S gelegenen Punkten p' angenommenen Wert ist, die dieselben ξ,η-Koordinaten besitzen.

Da aber mit

$$r_{pP} = \sqrt{r_{p'P}^2 + \zeta^2}$$

die Gleichungen

$$\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi} = \frac{r_{p'P}}{\sqrt{r_{p'P}^2+\zeta^2}}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi} \quad\text{und}\quad \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} = -\frac{r_{p'P}}{(r_{p'P}^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_p}$$

---

[27]) Vgl. hierzu O. D. KELLOG, Foundations of potential theory. Berlin 1929. Insbes. S. 172–174.

bestehen, so erhält man

$$\int_{-b}^{b} f(p)\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} d\zeta = -f(p')\, r_{p'P}^3 \left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} \int_{-b}^{b} \frac{d\zeta}{(r_{p'P}^2+\zeta^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= -f(p')\, r_{p'P}^3 \left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} \left[\left(\frac{2}{3 r_{p'P}^4}\zeta^3 + \frac{1}{r_{p'P}^2}\zeta\right) \frac{1}{(r_{p'P}^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}\right]_{-b}^{b}$$

und also

$$\text{(53)} \quad \lim_{b\to\infty} \int_{(S)} \left\{ \int_{-b}^{b} f(p)\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} d\zeta \right\} ds$$

$$= \frac{4}{3} \int_{(S)} f(p')\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds.$$

Wählt man nun eine feste Zahl a mit $0 < a < b$, so wird

$$\lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(p)\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} d\zeta = -f(p')\, r_{p'P}^3 \left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} \left[\frac{2}{3 r_{p'P}^4} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{2a^3}{3 r_{p'P}^4} + \frac{a}{r_{p'P}^2}\right) \frac{1}{(r_{p'P}^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

und

$$\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{-a} f(p)\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} d\zeta = -f(p')\, r_{p'P}^3 \left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} \cdot$$

$$\cdot \left[-\left(\frac{2a^3}{3 r_{p'P}^4} + \frac{a}{r_{p'P}^2}\right) \frac{1}{(r_{p'P}^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{3 r_{p'P}^4}\right],$$

so daß wegen (53)

$$\text{(54)} \quad V'(p) = \int_{(S)} f(p')\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds$$

$$= \frac{3}{4} \int_{(S)} \left\{ \int_{-a}^{a} f(p)\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} d\zeta \right\} ds -$$

$$- \frac{3}{2} \int_{(S)} f(p')\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} \left[\frac{2}{3 r_{p'P}} - \left(\frac{2a^3}{3 r_{p'P}} + a r_{p'P}\right) \frac{1}{(r_{p'P}^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right] ds$$

sein muß.

Das erste rechts stehende Integral ist aber ein Integral von dem Typ, wie er in den vorhergehenden Abschnitten dieses Paragraphen untersucht wurde, so daß die darauf bezüglichen Sätze unmittelbar angewendet werden können. Es ist allerdings anzumerken, daß das herausgeschnittene Stück der Zylinderfläche keine geschlossene Fläche darstellt. Da uns aber das Verhalten eines solchen Integrals und seiner Tangentialableitungen lediglich in Flächenpunkten p interessiert, die gleichzeitig der Kurve S angehören, so können wir das Zylinderflächenstück einfach dadurch zu einer geschlossenen Fläche ergänzen, sofern das bei den Beweisen erforderlich ist, daß wir die von der Zylinderfläche herausgeschnittenen endlichen Flächenstücke in den Ebenen $\zeta = \pm a$ hinzunehmen.

Das zweite Integral rechts ist dagegen an jeder Stelle P der ξ, η-Ebene beliebig oft partiell nach ξ und η differenzierbar. Um das zu erkennen, bedarf es nur der Untersuchung einer auf S gelegenen Stelle, für die ja $r_{p'P} = 0$ sein kann. In der Umgebung einer solchen Stelle mit $r_{p'P} = 0$ gilt aber die Reihenentwicklung

$$\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} \left[\frac{2}{3 r_{p'P}} - \left(\frac{2a^3}{3 r_{p'P}} + a\, r_{p'P}\right) \frac{1}{(r_{p'P}^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$= \frac{(\xi' - \xi)^2}{r_{p'P}^2} \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} \left[\frac{2}{3 r_{p'P}} - \left(\frac{2}{3 r_{p'P}} + \frac{r_{p'P}}{a^2}\right)\left(1 - \frac{3}{2}\left(\frac{r_{p'P}}{a}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{r_{p'P}}{a}\right)^4 - + \cdots\right)\right]$$

$$= \frac{(\xi' - \xi)^2}{r_{p'P}^2} \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} \left[\frac{r_{p'P}}{a^2} - \frac{r_{p'P}}{a^2} - \frac{1}{4}\frac{r_{p'P}^3}{a^4} + \frac{3}{2}\frac{r_{p'P}^3}{a^4} + \cdots\right]$$

$$= \frac{(\xi' - \xi)^2}{r_{p'P}^2} \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} \left[\frac{5}{4}\frac{r_{p'P}^3}{a^4} + \cdots\right],$$

wobei in der zuletzt angeschriebenen Reihe nur Potenzen mit einem ungeradzahligen Exponenten größer gleich 3 auftreten, so daß man schließlich mit geeigneten Koeffizienten $a_1, a_3, \ldots$

$$\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} \left[\frac{2}{3 r_{p'P}} - \left(\frac{2a^3}{3 r_{p'P}} + a\, r_{p'P}\right) \frac{1}{(r_{p'P}^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$= (\xi' - \xi)^2 \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} \left[a_1 r_{p'P} + a_3 r_{p'P}^3 + a_5 r_{p'P}^5 + \cdots\right]$$

$$= (\xi' - \xi)^2 \frac{\partial}{\partial n_{p'}} \left[\frac{a_1}{2} r_{p'P}^2 + \frac{a_3}{4} r_{p'P}^4 + \cdots\right]$$

schreiben kann. Da hier aber in der eckigen Klammer eine Potenzreihe steht, die nach Potenzen von $(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2$ fortschreitet, so ist klar, daß der letztere Ausdruck an der Stelle $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$ und damit, wie behauptet, das zweite Integral auf der rechten Seite von (54) auch an einer auf S gelegenen Stelle beliebig oft nach ξ und η differenziert werden kann.

Für das Integral

$$W'(P) = \int_{(S)} f(p') \frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi} \frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta} \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds$$

kann man eine zu (54) analoge Formel aufstellen und daraus dieselben Schlüsse ziehen.

Beachtet man, daß wegen der zu (38) analogen Relation

$$\int_{(S)} \left| \frac{\cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}} \right| ds \leqq K,$$

bei der K eine von der Lage des Punktes P unabhängige Konstante ist, die Abschätzungen

$$\left.\begin{aligned} &\int_{(S)} \left| \frac{\cos^3(r_{p'P}, \xi) \cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}} \right| ds, \\ &\int_{(S)} \left| \frac{\cos(r_{p'P}, \xi) \cos(r_{p'P}, \eta) \cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}} \right| ds \end{aligned}\right\} \leqq K$$

bestehen, so ergeben sich die (39), (40), (41) und (42) entsprechenden Relationen

$$V_i'(p) = V'(p) + \frac{\pi}{2} f(p), \tag{55}$$

$$V_a'(p) = V'(p) - \frac{\pi}{2} f(p), \tag{56}$$

$$W_i'(p) = W'(p), \tag{57}$$

$$W_a'(p) = W'(p), \tag{58}$$

falls die Funktion $f(p)$ als stetig vorausgesetzt wird.

Besitzt die Funktion $f(p)$ eine erste partielle Ableitung, die einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Kurvenexponenten λ genügt, und versteht man unter x, y ein in einem Punkte p von S lokales Koordinatensystem, bei

dem die y-Achse in die Richtung der in das Innere von R weisenden Normalen zeigt, so folgt aus Hilfssatz 9 und 10 unmittelbar, daß die Grenzwerte

$$(59)\quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial V'(P_n^i)}{\partial x}, & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial V'(P_n^a)}{\partial x}, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial V'(P_n^a)}{\partial y}, & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial V'(P_n^a)}{\partial y}, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial W'(P_n^i)}{\partial x}, & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial W'(P_n^a)}{\partial x}, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial W'(P_n^a)}{\partial y}, & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial W'(P_n^a)}{\partial y} \end{cases}$$

existieren, wenn die Punktfolgen P_n^i bzw. P_n^a von innen bzw. von außen gegen p konvergieren, und daß insbesondere bei Beachtung von (54)

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\partial V'(P_n^i)}{\partial x} - \frac{\partial V'(P_n^a)}{\partial x}\right\} = \frac{3}{4}\,\frac{4\pi}{3} = \pi$$

und

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\partial W'(P_n^i)}{\partial x} - \frac{\partial W'(P_n^a)}{\partial x}\right\} = 0$$

ist. Unter derselben Voraussetzung über $f(p)$ gelten dann aber die folgenden später benötigten Limesrelationen

$$(60)\quad \lim_{n\to\infty}\left\{\left(2\frac{\partial V'(P_n^i)}{\partial x} - \left[\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(S)} f(p')\,\frac{\partial\left[\log\frac{1}{r_{p'P}}\right]}{\partial n_{p'}}\,ds\right]_{P=P_n^i}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(2\frac{\partial V'(P_n^a)}{\partial x} - \left[\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(S)} f(p')\,\frac{\partial\left[\log\frac{1}{r_{p'P}}\right]}{\partial n_{p'}}\,ds\right]_{P=P_n^a}\right)\right\} = 2\pi - 2\pi = 0,$$

da

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(S)} f(p')\,\frac{\partial\left[\log\frac{1}{r_{p'P}}\right]}{\partial n_{p'}}\,ds\right]_{P=P_n^i} - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(S)} f(p')\,\frac{\partial\left[\log\frac{1}{r_{p'P}}\right]}{\partial n_{p'}}\,ds\right]_{P=P_n^a}\right\} = 2\pi$$

ist, und

$$(61) \quad \lim_{n \to \infty} \left\{ \left(2 \frac{\partial W'(P_n^i)}{\partial x} \pm \left[\frac{\partial}{\partial y} \int_{(S)} f(p') \frac{\partial \left[\log \frac{1}{r_{p'P}} \right]}{\partial n_{p'}} ds \right]_{P = P_n^i} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(2 \frac{\partial W'(P_n^a)}{\partial x} \pm \left[\frac{\partial}{\partial y} \int_{(S)} f(p') \frac{\partial \left[\log \frac{1}{r_{p'P}} \right]}{\partial n_{p'}} ds \right]_{P = P_n^a} \right) \right\} = 0$$

wegen

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial y} \int_{(S)} f(p') \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{p'P}} \right)}{\partial n_{p'}} ds \right]_{P = P_n^i} - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{\partial}{\partial y} \int_{(S)} f(p') \frac{\partial \left[\log \frac{1}{r_{p'P}} \right]}{\partial n_{p'}} ds \right]_{P = P_n^a} \right\} = 0.$$

§ 4.

Das innere Problem im Raume.

1. Wir wollen in diesem Paragraphen für das innere räumliche Problem folgenden Existenz- und Eindeutigkeitssatz beweisen:

Hauptsatz I. *Genügt die Berandung S des einfach zusammenhängenden ganz im Endlichen gelegenen Gebietes R den im § 1 genannten Voraussetzungen, und besitzen die auf S definierten Funktionen ϱ, σ, τ dort partielle Ableitungen erster Ordnung, die einer gleichmäßigen H-Bedingung genügen, und sind sie die auf S angenommenen Werte der partiellen Ableitungen erster Ordnung einer in R zweimal stetig differenzierbaren Funktion $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$, so gibt es (bis auf eine additive Konstante) genau eine in R biharmonische Funktion U, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in $R + S$ stetig sind und auf S bzw. mit ϱ, σ, τ übereinstimmen.*

Nimmt man an, daß es eine biharmonische Funktion U mit den verlangten Eigenschaften gibt, und setzt man

$$u = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad w = \frac{\partial U}{\partial \zeta}, \quad \vartheta = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = \Delta U,$$

so genügen die Funktionen u, v, w, ϑ offenbar im Gebiet R den Differentialgleichungen

$$(62) \quad \Delta u - \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = 0, \quad \Delta v - \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = 0, \quad \Delta w - \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} = 0, \quad \Delta \vartheta = 0,$$

sowie den (im Sinne von Grenzübergängen aus R auf S zu verstehenden) Randbedingungen

$$[u]_S = \varrho, \quad [v]_S = \sigma, \quad [w]_S = \tau, \tag{63}$$

und umgekehrt gilt der gleich zu beweisende

Satz 1. *Sind die Funktionen ϱ, σ, τ die auf S angenommenen Werte der partiellen Ableitungen einer in R zweimal stetig differenzierbaren Funktion $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$, und gibt es ein Lösungssystem u, v, w des Problems* (62), (63), *das in $R + S$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzt, so existiert eine biharmonische Funktion U derart, daß*

$$u = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad w = \frac{\partial U}{\partial \zeta}$$

ist.

Mit diesem Satz 1 ist aber zugleich der Hauptsatz I, jedenfalls was die Existenz einer Lösung anlangt, bewiesen, wenn man die folgenden in den Abschnitten 4 bis 11 zu beweisenden Sätze heranzieht:

Satz 2. *Bei beliebig vorgegebenen auf S stetigen Funktionen ϱ, σ, τ hat das Problem* (62), (63) *in R stets eine Lösung.*

Satz 3. *Besitzen die Funktionen ϱ, σ, τ auf S überdies partielle Ableitungen erster Ordnung, die einer gleichmäßigen H-Bedingung genügen, so sind die nach Satz 2 existierenden Lösungsfunktionen in $R + S$ einmal stetig partiell differenzierbar.*

Der Nachweis für die im Hauptsatz I behauptete Einzigkeit der Lösung bleibt einem besonderen Abschnitt vorbehalten, wo sie sogar unter allgemeineren Voraussetzungen aufgezeigt werden wird.

2. Dem Beweise des Satzes 1 schicken wir einen Hilfssatz voraus, der auch für die folgenden Schlüsse benötigt wird: *Genügt die Berandung S des einfach zusammenhängenden, ganz im Endlichen gelegenen Gebiet R den in § 1 genannten Voraussetzungen, so kann man eine unendliche Folge von ganz in R gelegenen, denselben Voraussetzungen genügenden, gegen S konvergierenden Flächen S_n konstruieren, die die Eigenschaft besitzen, daß für eine Folge von integrablen und gleichmäßig beschränkten Funktionen $f_n(p)$, die resp. auf S_n definiert sind, und die für $n \to \infty$ gegen eine auf S definierte integrable Funktion $f(p)$ konvergieren, die Limesrelation*

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{(S_n)} f_n(p)\, d\sigma = \iint_{(S)} f(p)\, d\sigma$$

gilt.

Beweis. Die zu $R + S$ gehörige Greensche Funktion, die auf S verschwindet und in einem Punkte P von R einen Pol aufweist, werde mit G bezeichnet. Die Funktion G besitzt bei den getroffenen Regularitätsvoraus-

setzungen über S nach Sätzen von SCHAUDER [28]) und KELLOG [29]) in dem abgeschlossenen Bereich $R + S$ mit Ausnahme des Punktes P stetige partielle Ableitungen erster Ordnung. Für die Normalableitung $\left[\frac{\partial G}{\partial n}\right]_S$ muß, wie von L. LICHTENSTEIN [30]) bewiesen wurde,

$$\left[\frac{\partial G}{\partial n}\right]_S \neq 0$$

sein. Ist p ein beliebiger Punkt auf S, so bezeichne man mit Z_{ϱ_1} das Innere eines Kreiszylinders, dessen Grundkreisfläche den Radius ϱ_1 besitzt, der die Höhe $2\,\varrho_1$ hat, dessen Mittelpunkt mit p zusammenfällt und dessen Achse mit der Normale n_p im Punkte p identisch ist. Man kann dann sicher den Radius ϱ_1 so klein wählen, daß erstens ϱ_1 kleiner als ϱ_0 ist, wobei ϱ_0 die in der Einleitung angegebene Bedeutung hat, daß zweitens in der Durchschnittsmenge von $R + S$ und Z_{ϱ_1}

$$\frac{\partial G}{\partial n_p} \neq 0$$

ist, und daß drittens Z_{ϱ_1} den Punkt P nicht enthält. Versteht man weiter unter B den Bereich, der alle Punkte von R enthält, deren Entfernung von S größer oder gleich als $\delta > 0$ sei, wobei $\delta < \varrho_1$ ist, so wird die Funktion G in B ein positives Minimum M annehmen.

Es soll nun gezeigt werden, daß die durch

$$G = \frac{M}{n} \; (n = \text{ganze Zahl} \geqq 2)$$

gegebenen Äquipotentialflächen eine Flächenschar S_n mit den gewünschten Eigenschaften ergeben.

Jeder Punkt des Bereiches B_1, der aus allen Punkten von $R + S$ besteht, deren Entfernung von S kleiner oder gleich δ ist, gehört nun einem Zylinder Z_{ϱ_1} an. Nach dem HEINE-BORELschen Überdeckungssatz läßt sich dann B_1 bereits mit endlich vielen Z_{ϱ_1} überdecken. Da jeder Punkt der Fläche S_n ($n \geqq 2$) von S um weniger als δ entfernt ist, so gehört jede solche Fläche ganz dem Bereich B_1 an und wird also ebenfalls von den endlich vielen Zylindern Z_{ϱ_1} überdeckt.

Ist p der Mittelpunkt eines von diesen Zylindern, so wähle man in p das Tangential-Normalkoordinatensystem x, y, z. Enthält dieser Zylinder das

---

[28]) J. SCHAUDER, l. c., Anm. [14]).

[29]) O. D. KELLOG, l. c., Anm. [15]).

[30]) L. LICHTENSTEIN, Über eine Eigenschaft der klassischen GREENschen Funktion. Math. Zeitschr. 11 (1921), S. 319—320.

Flächenstück F_n von S_n, und ist (x_0, y_0, z_0) ein beliebiger darauf gelegener Punkt, so kann F_n nach dem Satz über implizite Funktionen in einer gewissen Umgebung dieses Punktes eindeutig und analytisch in der Form

$$z = \varphi_n(x, y)$$

dargestellt werden, da ja

$$\frac{\partial G(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \neq 0$$

ist. Diese eindeutige Darstellung läßt sich aber auf das ganze Flächenstück F_n ausdehnen, denn wäre für zwei beliebige Punkte (x_0, y_0, z_0) und $(x_0, y_0, z_0 + l)$ von R, die gleichzeitig Z_{ϱ_1} angehören,

$$G(x_0, y_0, z_0) = G(x_0, y_0, z_0 + l),$$

so müßte nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$l \frac{\partial G(x_0, y_0, z_0 + \vartheta l)}{\partial z} = 0 \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

sein, wenn man noch beachtet, daß wegen der eindeutigen und stetigen Darstellbarkeit des Z_{ϱ_1} angehörenden Flächenstückes F von S in der Form

$$z = \varphi(x, y)$$

mit (x_0, y_0, z_0) und $(x_0, y_0, z_0 + l)$ auch alle Punkte $(x_0, y_0, z_0 + \vartheta l)$ für $0 < \vartheta < 1$ dem Gebiet $Z_{\varrho_1} \cdot R$ angehören.

Da aber

$$\frac{\partial G(x_0, y_0, z_0 + \vartheta l)}{\partial z} \neq 0$$

ist, so folgt notwendig

$$l = 0.$$

Man überlegt sich weiterhin, daß jede Fläche S_n die Berandung eines einfach zusammenhängenden Gebietes ist[31]).

Bezeichnet man die Projektion von F_n bzw. F auf die x-y-Ebene mit $\overline{F}_n$ bzw. $\overline{F}$, so wird zunächst

$$\iint\limits_{(F_n)} f_n(p)\, d\sigma = \iint\limits_{(\overline{F}_n)} f_n(x, y) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Da hier die Ableitungen

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial G(x, y, \varphi_n(x, y))}{\partial x}}{\dfrac{\partial G(x, y, \varphi_n(x, y))}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial G(x, y, \varphi_n(x, y))}{\partial y}}{\dfrac{\partial G(x, y, \varphi_n(x, y))}{\partial z}}$$

[31]) Vgl. hierzu O. D. KELLOG, l. c., Anm. [27]), insbes. S. 238–239.

für alle n ($n \geqq 2$) gleichmäßig beschränkt sind, und

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x, y) = \varphi(x, y),$$

$$\lim_{n \to \infty} \overline{F_n} = \overline{F}$$

ist, so folgt nach dem Satz von Arzèla-Lebesgue

$$\lim_{n \to \infty} \iint\limits_{(\overline{F_n})} f_n(p)\, d\sigma = \iint\limits_{(\overline{F})} f(p)\, d\sigma.$$

Beachtet man schließlich, daß die Flächen S und S_n durch die endlich vielen überdeckenden Zylinder Z_{ϱ_1} in endlich viele Stücke zerlegt werden, deren Randkurven stückweise stetige Tangenten besitzen[32]), und deren jedes auch, wenn es mehreren Z_{ϱ_1} gleichzeitig angehört, jeweils nur einem dieser Zylinder zugeordnet sei, so folgt durch Summation, wie behauptet,

$$\lim_{n \to \infty} \iint\limits_{(S_n)} f_n(p)\, d\sigma = \iint\limits_{(S)} f(p)\, d\sigma.$$

3. Man bilde nun, um den Satz 1 zu beweisen, mit Hilfe der in $R + S$ einmal stetig partiell differenzierbaren Lösungsfunktionen u, v, w des Problems (62), (63) und der gegebenen in R zweimal stetig differenzierbaren Funktion Φ die neuen Funktionen

$$\bar{u} = u - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad \bar{v} = v - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad \bar{w} = w - \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}, \tag{64}$$

für die offenbar

$$[\bar{u}]_S = 0, \quad [\bar{v}]_S = 0, \quad [\bar{w}]_S = 0 \tag{65}$$

ist.

Da alsdann

$$w_1 = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \zeta} = \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \zeta}, \quad w_2 = \frac{\partial \bar{u}}{\delta \zeta} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\delta \zeta} - \frac{\partial w}{\partial \xi},$$
$$w_3 = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \tag{66}$$

sein muß, so folgt aus (62)

$$\frac{\partial w_2}{\partial \zeta} - \frac{\partial w_3}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial w_3}{\partial \xi} - \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \eta} - \frac{\partial w_2}{\partial \zeta} = 0. \tag{67}$$

---

[32]) Vgl. hierzu O. D. Kellog, l. c., Anm. [27]), insbes. S. 97–107.

Auf den von den im zweiten Abschnitt konstruierten Flächen S_n begrenzten Bereich $R_n + S_n$ wende man den GAUSSschen Integralsatz in der Form

$$\iiint_{(R_n)} \left\{\bar{u}\left(\frac{\partial w_2}{\partial \zeta} - \frac{\partial w_3}{\partial \eta}\right) + \bar{v}\left(\frac{\partial w_3}{\partial \xi} - \frac{\partial w_1}{\partial \zeta}\right) + \bar{w}\left(\frac{\partial w_1}{\partial \eta} - \frac{\partial w_2}{\partial \xi}\right)\right\} d\tau$$

$$(68) \quad = \iiint_{(R_n)} \{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2\}\, d\tau + \iint_{(S_n)} \{\bar{u}\,(w_2 \cos(n_{p'}, \zeta) - w_3 \cos(n_{p'}, \eta))$$

$$+ \bar{v}\,(w_3 \cos(n_{p'}, \xi) - w_1 \cos(n_{p'}, \zeta)) + \bar{w}\,(w_1 \cos(n_{p'}, \eta) - w_2 \cos(n_{p'}, \xi))\}\, d\sigma$$

an. Da bei Beachtung von (67) die linke Seite von (68) und wegen (65) auch der Limes des rechts stehenden Oberflächenintegrals für $n \to \infty$ auf Grund des im zweiten Abschnitt bewiesenen Hilfssatzes verschwindet, so folgt aus der damit resultierenden Relation

$$\iiint_{(R)} \{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2\}\, d\tau = 0,$$

daß die Funktionen w_1, w_2 und w_3 in R identisch verschwinden. Gemäß (66) existiert aber alsdann in R tatsächlich eine Funktion $U(\xi, \eta, \zeta)$ derart, daß

$$u = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad w = \frac{\partial U}{\partial \zeta}$$

ist, wobei nach (62) und (63)

$$\Delta\Delta U \equiv 0 \text{ in } R$$

und

$$\left[\frac{\partial U}{\partial \xi}\right]_S = \varrho, \quad \left[\frac{\partial U}{\partial \eta}\right]_S = \sigma, \quad \left[\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right]_S = \tau$$

wird.

4. Bei dem Beweis des Satzes 2, zu dem wir nunmehr in den Abschnitten 4 bis 6 übergehen, benutzen wir ein von LAURICELLA[33]) ausgebautes elegantes Schlußverfahren FREDHOLMS[34]).

Neben der Problemstellung (62), (63) betrachte man zugleich die bereits im § 3, Abschnitt 1 herangezogenen Differentialgleichungen

$$(69) \quad \Delta u + k \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = 0, \quad \Delta v + k \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = 0, \quad \Delta w + k \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} = 0, \quad \Delta \vartheta = 0$$

und Randbedingungen

$$(70) \quad [u]_S = \varrho, \quad [v]_S = \sigma, \quad [w]_S = \tau$$

mit k als Parameter, wie sie beim Hauptproblem der Elastizitätstheorie auftreten.

---

[33]) G. LAURICELLA, l. c., Anm. [12]).

[34]) J. FREDHOLM, l. c., Anm. [13]).

Mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$\varkappa = \frac{k}{2+k},$$

$$K_{\xi\xi}(P,p;\varkappa) = \frac{2}{2+k}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} + \frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}$$

$$= \frac{\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}^2} + \varkappa\{3\cos^2(r_{pP}, \xi) - 1\}\frac{\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}^2},$$

$$K_{\xi\eta}(P,p;\varkappa) = \frac{3k}{2+k}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}$$

$$= 3\varkappa\frac{\cos(r_{pP}, \xi)\cos(r_{pP}, \eta)\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}^2},$$

$$K_{\xi\zeta}(P,p;\varkappa) = \frac{3k}{2+k}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \zeta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}$$

$$= 3\varkappa\frac{\cos(r_{pP}, \xi)\cos(r_{pP}, \zeta)\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}^2},$$

(71)
$$K_{\eta\xi}(P,p;\varkappa) = K_{\xi\eta}(P,p;\varkappa),$$

$$K_{\eta\eta}(P,p;\varkappa) = \frac{2k}{2+k}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} + \frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \eta}\right)^2\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}$$

$$= \frac{\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}^2} + \varkappa\{3\cos^2(r_{pP}, \eta) - 1\}\frac{\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}^2},$$

$$K_{\eta\zeta}(P,p;\varkappa) = \frac{3k}{2+k}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \eta}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \zeta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}$$

$$= 3\varkappa\frac{\cos(r_{pP}, \eta)\cos(r_{pP}, \zeta)\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}^2},$$

$$K_{\zeta\xi}(P,p;\varkappa) = K_{\xi\zeta}(P,p;\varkappa), \quad K_{\zeta\eta}(P,p;\varkappa) = K_{\eta\zeta}(P,p;\varkappa),$$

$$K_{\zeta\zeta}(P,p;\varkappa) = \frac{2}{2+k}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} + \frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \zeta}\right)^2\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}$$

$$= \frac{\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}^2} + \varkappa\{3\cos^2(r_{pP}, \zeta) - 1\}\frac{\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}^2}$$

werde zunächst das System der inhomogenen linearen Integralgleichungen zur Bestimmung der unbekannten Funktionen $f(p;\varkappa)$, $g(p;\varkappa)$ und $h(p;\varkappa)$

$$
\begin{aligned}
f(p;\varkappa) + \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)\, f(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)\, g(p';\varkappa) + \\
+ K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)\, h(p';\varkappa)\}\, d\sigma = \varrho(p), \\
g(p;\varkappa) + \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p,p';\varkappa)\, f(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(p,p';\varkappa)\, g(p';\varkappa) + \\
+ K_{\eta\zeta}(p,p';\varkappa)\, h(p';\varkappa)\}\, d\sigma = \sigma(p), \\
h(p;\varkappa) + \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\zeta\xi}(p,p';\varkappa)\, f(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(p,p';\varkappa)\, g(p';\varkappa) + \\
+ K_{\zeta\zeta}(p,p';\varkappa)\, h(p';\varkappa)\}\, d\sigma = \tau(p),
\end{aligned}
\tag{72}
$$

untersucht, wobei wir annehmen, daß $k \neq -2$ ist, und daß die inhomogenen Bestandteile ϱ, σ, τ auf S stetige Funktionen sind.

Ein solches System läßt sich stets auf eine einzige Integralgleichung zurückführen. Man wähle dazu statt des Integrationsgebietes S eine aus drei Exemplaren von S bestehende Fläche $\mathfrak{S}$, die um sie voneinander unterscheiden zu können, mit $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ bezeichnet seien. Ein Punkt p soll $\mathfrak{S}$ angehören, wenn er auf einer der Flächen $S^{(\mu)}$ ($\mu = 1, 2, 3$) liegt. Unter Benutzung der für den Augenblick gebrauchten neuen Bezeichnungen

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3 \quad \text{statt} \quad \xi,\ \eta,\ \zeta,$$

$$f_1(p;\varkappa),\ f_2(p;\varkappa),\ f_3(p;\varkappa) \quad \text{statt} \quad f(p;\varkappa),\ g(p;\varkappa),\ h(p;\varkappa)$$

und

$$\varrho_1(p),\ \varrho_2(p),\ \varrho_3(p) \quad \text{statt} \quad \varrho(p),\ \sigma(p),\ \tau(p)$$

definiere man auf $\mathfrak{S}$ die beiden Funktionen

$$f^*(p;\varkappa) = f_\mu(p;\varkappa), \qquad \text{falls } p \text{ auf } S^{(\mu)} \text{ liegt } (\mu = 1, 2, 3)$$

und

$$\varrho^*(p) = \varrho_\mu(p), \qquad \text{falls } p \text{ auf } S^{(\mu)} \text{ liegt } (\mu = 1, 2, 3)$$

und außerdem eine Funktion $K(p, q;\varkappa)$ der beiden auf $\mathfrak{S}$ variierenden Veränderlichen p und q durch

$$K(p, q;\varkappa) = K_{\xi_\mu \xi_\nu}(p, q;\varkappa), \quad \text{falls } p \text{ auf } S^{(\mu)} \text{ und } q \text{ auf } S^{(\nu)} \text{ liegt.}$$

Das System (72) kann alsdann durch die einzige Integralgleichung

$$f^*(p;\varkappa) + \frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p, p';\varkappa)\, f^*(p';\varkappa)\, d\sigma = \varrho^*(p) \tag{73}$$

ersetzt werden, wenn man unter dem auf der linken Seite stehenden Integral naturgemäß

$$\iint_{(\mathfrak{S})} \cdots d\sigma = \iint_{(S^{(1)})} \cdots d\sigma + \iint_{(S^{(2)})} \cdots d\sigma + \iint_{(S^{(3)})} \cdots d\sigma$$

versteht.

Da die Kerne des Integralgleichungssystems (72) wegen (9) für $p' = p$ wie $\frac{1}{r_{p'p}^{2-\lambda}}$ unendlich werden, so erkennt man genau wie in der Potentialtheorie durch Übergang zu den iterierten Kernen, daß man auf (73) die FREDHOLMsche Theorie anwenden kann. Ist die natürliche Zahl m hinreichend groß, so erweisen sich die m-ten iterierten Kerne als auf S stetige Funktionen[35]). Wir können für m insbesondere eine ungerade Zahl wählen.

Wir behaupten nunmehr, daß die FREDHOLMsche Nennerdeterminante $D^{(m)}(\varkappa)$, die in üblicher Weise mit Hilfe der m-ten iterierten Kerne gebildet wird, für $\varkappa = 0$ nicht verschwinden kann, so daß die ganze transzendente Funktion $D^{(m)}(\varkappa)$ sicherlich nicht identisch verschwindet. Da nämlich für $\varrho, \sigma, \tau \equiv 0, 0, 0$ und $\varkappa = 0$ (d. h. $k = 0$) das System (72) in das System der homogenen Integralgleichungen

$$f(p) + \frac{1}{2\pi} \iint_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} f(p')\, d\sigma = 0,$$

$$g(p) + \frac{1}{2\pi} \iint_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} g(p')\, d\sigma = 0,$$

$$h(p) + \frac{1}{2\pi} \iint_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} h(p')\, d\sigma = 0$$

übergeht, so hätte für $D^{(m)}(0) = 0$ die aus einer solchen homogenen Integralgleichung durch m-fache Iteration hervorgehende Integralgleichung eine nicht identisch verschwindende Lösung. Dann muß es aber eine m-te Einheitswurzel ε_μ ($\varepsilon_\mu^m = 1$) und eine nicht identisch verschwindende Funktion $f_1(p)$ derart geben, daß

$$f_1(p) + \frac{\varepsilon_\mu}{2\pi} \iint_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} f_1(p')\, d\sigma = 0$$

ist[36]), woraus wieder die Existenz einer nicht identisch verschwindenden Funktion $f_2(p)$ folgt, die der Integralgleichung

$$f_2(p) + \frac{\varepsilon_\mu}{2\pi} \iint_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_p)}{r_{p'p}^2} f_2(p')\, d\sigma = 0$$

genügt.

---

[35]) Vgl. hierzu E. GOURSAT, Cours d'analyse III, 3. Aufl., Paris 1923, insbes. S. 362–364 und O. D. KELLOG, l. c., Anm. [27]), insbes. S. 299–309.

[36]) Vgl. etwa A. KNESER, Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik. Braunschweig 1911. Insbes. S. 213–214.

Für diese Integralgleichung kann man aber unter Benutzung von Sätzen über Potentiale der einfachen Schicht, wie sie bei unseren Voraussetzungen über die Berandung S von SCHAUDER[37]) bewiesen wurden, mit Schlußweisen, die im Rahmen der Potentialtheorie geläufig sind, im Gegensatz zu dem eben Festgestellten zeigen, daß sie weder für $\varepsilon_\mu = 1$ noch für eine beliebige komplexe m-te Einheitswurzel ε_μ eine nichttriviale Lösung besitzen kann[38]), so daß tatsächlich $D^{(m)}(0) \neq 0$ sein muß.

Ist $\varkappa$ keine Nullstelle von $D^{(m)}(\varkappa)$, so lautet unter Benutzung der für nichtbeschränkte Kerne, deren m-te Iterierte stetig sind, gültigen Form der Resolvente[39]) die eindeutig bestimmte Lösung von (72)

$$(74)\qquad f(p;\varkappa) = \frac{F(p;\varkappa)}{D^{(m)}(\varkappa)},\quad g(p;\varkappa) = \frac{G(p;\varkappa)}{D^{(m)}(\varkappa)},\quad h(p;\varkappa) = \frac{H(p;\varkappa)}{D^{(m)}(\varkappa)},$$

wobei die in $\varkappa$ ganzen transzendenten und in p stetigen Funktionen F, G, H den Integralgleichungen

$$(75)\quad \begin{aligned} F(p;\varkappa) + \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} &\{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)\,F(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)\,G(p';\varkappa) + \\ &+ K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)\,H(p';\varkappa)\}\,d\sigma = D^{(m)}(\varkappa)\,\varrho(p), \\ G(p;\varkappa) + \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} &\{K_{\eta\xi}(p,p';\varkappa)\,F(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(p,p';\varkappa)\,G(p';\varkappa) + \\ &+ K_{\eta\zeta}(p,p';\varkappa)\,H(p';\varkappa)\}\,d\sigma = D^{(m)}(\varkappa)\,\sigma(p), \\ H(p;\varkappa) + \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} &\{K_{\zeta\xi}(p,p';\varkappa)\,F(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(p,p';\varkappa)\,G(p';\varkappa) + \\ &+ K_{\zeta\zeta}(p,p';\varkappa)\,H(p';\varkappa)\}\,d\sigma = D^{(m)}(\varkappa)\,\tau(p) \end{aligned}$$

genügen.

Man kann sich nun davon überzeugen, daß die mit Hilfe von F, G, H für die Punkte $P = (\xi, \eta, \zeta)$ von R gebildeten Funktionen

$$(76)\quad \begin{aligned} u^*(P;\varkappa) = \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} &\{K_{\xi\xi}(P,p';\varkappa)\,F(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(P,p';\varkappa)\,G(p';\varkappa) + \\ &+ K_{\xi\zeta}(P,p';\varkappa)\,H(p';\varkappa)\}\,d\sigma, \\ v^*(P;\varkappa) = \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} &\{K_{\eta\xi}(P,p';\varkappa)\,F(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(P,p';\varkappa)\,G(p';\varkappa) + \\ &+ K_{\eta\zeta}(P,p';\varkappa)\,H(p';\varkappa)\}\,d\sigma, \\ w^*(P;\varkappa) = \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} &\{K_{\zeta\xi}(P,p';\varkappa)\,F(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(P,p';\varkappa)\,G(p';\varkappa) + \\ &+ K_{\zeta\zeta}(P,p';\varkappa)\,H(p;\varkappa)\}\,d\sigma \end{aligned}$$

---

[37]) J. SCHAUDER, l. c., Anm. [14]), insbes. S. 635–640.

[38]) Vgl. hierzu A. KNESER, l. c., Anm. [36]), insbes. S. 203–204 und S. 219–222 und O. D. KELLOG, l. c., Anm. [27]), insbes. S. 309–310.

[39]) Vgl. etwa E. GOURSAT, l. c., Anm. [35]), insbes. S. 382–384.

in R den Gleichungen

$$\Delta u^* + k\frac{\partial \vartheta^*}{\partial \xi} = 0, \quad \Delta v^* + k\frac{\partial \vartheta^*}{\partial \eta} = 0, \quad \Delta w^* + k\frac{\partial \vartheta^*}{\partial \zeta} = 0,$$
$$\vartheta^* = \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \frac{\partial v^*}{\partial \eta} + \frac{\partial w^*}{\partial \zeta} \tag{77}$$

genügen und auf S wegen (39), (41) und wegen der bekannten Sprungrelationen für das Potential der Doppelschicht gemäß (75) die Randwerte

$$[u^*]_S = D^{(m)}(\varkappa)\varrho, \quad [v^*]_S = D^{(m)}(\varkappa)\sigma, \quad [w^*]_S = D^{(m)}(\varkappa)\tau \tag{78}$$

annehmen. Mit den Funktionen

$$u_1 = (1+k)\frac{1}{r_{pP}} - \frac{k}{2}\frac{\partial^2 r_{pP}}{\partial \xi^2}, \quad v_1 = -\frac{k}{2}\frac{\partial^2 r_{pP}}{\partial \xi\, \partial \eta}, \quad w_1 = -\frac{k}{2}\frac{\partial^2 r_{pP}}{\partial \xi\, \partial \zeta}$$

bilden nämlich auch folgende Funktionen ein Lösungstripel von (77):

$$u_1' = \frac{\partial u_1}{\partial n_p} = (1+k)\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} - \frac{k}{2}\left\{\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} - 2\frac{\xi-\xi_p}{r_{pP}^3}\frac{\partial \xi}{\partial n_p} - 3\frac{(\xi-\xi_p)^2}{r_{pP}^2}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\right\}$$
$$= \left(1+\frac{k}{2}\right)\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} - k\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial n_p} + \frac{3k}{2}\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p},$$

$$v_1' = \frac{\partial v_1}{\partial n_p} = -\frac{k}{2}\left\{-\frac{\xi-\xi_p}{r_{pP}^3}\frac{\partial \eta}{\partial n_p} - \frac{\eta-\eta_p}{r_{pP}^3}\frac{\partial \xi}{\partial n_p} - 3\frac{\xi-\xi_p}{r_{pP}}\frac{\eta-\eta_p}{r_{pP}}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\right\}$$
$$= -\frac{k}{2}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial n_p} - \frac{k}{2}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial n_p} + \frac{3k}{2}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p},$$

$$w_1' = \frac{\partial w_1}{\partial n_p} = -\frac{k}{2}\left\{-\frac{\xi-\xi_p}{r_{pP}^3}\frac{\partial \zeta}{\partial n_p} - \frac{\zeta-\zeta_p}{r_{pP}^3}\frac{\partial \xi}{\partial n_p} - 3\frac{\xi-\xi_p}{r_{pP}}\frac{\zeta-\zeta_p}{r_{pP}}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\right\}$$
$$= -\frac{k}{2}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \xi}\frac{\partial \zeta}{\partial n_p} - \frac{k}{2}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \zeta}\frac{\partial \xi}{\partial n_p} + \frac{3k}{2}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \zeta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}$$

und zugleich mit

$$u_2 = \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \xi}, \quad v_2 = \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \eta}, \quad w_2 = \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \zeta}$$

ist das auch für die Funktionen

$$u_2' = \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial n_p}, \quad v_2' = \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial n_p}, \quad w_2' = \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \zeta}\frac{\partial \xi}{\partial n_p}$$

der Fall. Da auch die Funktionen

$$u_3 = \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} - \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial n_p}, \quad v_3 = -\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial n_p}, \quad w_3 = -\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial n_p}$$

ein Lösungssystem darstellen, so gilt das schließlich, wie behauptet, für die Funktionen

$$u_1' + \frac{k}{2}u_2' - \frac{k}{2}u_3 = \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} + \frac{3k}{2}\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p},$$

$$v_1' + \frac{k}{2}v_2' - \frac{k}{2}v_3 = \frac{3k}{2}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}, \tag{79}$$

$$w_1' + \frac{k}{2}w_2' - \frac{k}{2}w_3 = \frac{3k}{2}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \zeta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}.$$

Die restlichen Relationen ergeben sich durch zyklische Vertauschung.

Für die durch (76) gegebene Lösung ist

$$\begin{aligned}\vartheta^* &= \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)}\frac{2}{2+k}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}F(p';\varkappa) + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}G(p';\varkappa) + \right.\\ &\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}H(p';\varkappa)\right\}d\sigma\\ &= \frac{1-\varkappa}{2\pi}\iint_{(S)}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}F(p';\varkappa) + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}G(p';\varkappa) + \right.\\ &\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_p}H(p';\varkappa)\right\}d\sigma.\end{aligned} \tag{80}$$

5. Innerhalb von R sind u^*, v^*, w^* beliebig oft nach $\xi, \eta, \zeta, \varkappa$ differenzierbar, so daß die Reihenfolge von aufeinanderfolgenden Differentiationen vertauscht werden kann. Durch i-malige Differentiation von (77) nach $\varkappa$ ergibt sich

$$\begin{aligned}&\Delta\frac{\partial^i u^*}{\partial \varkappa^i} + k\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial^i \vartheta^*}{\partial \varkappa^i} + i\frac{(2+k)^2}{2}\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial^{i-1}\vartheta^*}{\partial \varkappa^{i-1}} + \cdots = 0,\\ &\Delta\frac{\partial^i v^*}{\partial \varkappa^i} + k\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial^i \vartheta^*}{\partial \varkappa^i} + i\frac{(2+k)^2}{2}\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial^{i-1}\vartheta^*}{\partial \varkappa^{i-1}} + \cdots = 0,\\ &\Delta\frac{\partial^i w^*}{\partial \varkappa^i} + k\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial^i \vartheta^*}{\partial \varkappa^i} + i\frac{(2+k)^2}{2}\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial^{i-1}\vartheta^*}{\partial \varkappa^{i-1}} + \cdots = 0,\\ &\Delta\frac{\partial^i \vartheta^*}{\partial \varkappa^i} = 0,\end{aligned} \tag{81}$$

wobei durch die Punkte Glieder gekennzeichnet sind, die Ableitungen von ϑ^* nach $\varkappa$ von niederer als der $(i-1)$-ten Ordnung enthalten.

Für die Randwerte der i-ten Ableitungen von u^*, v^*, w^* findet man

$$(82)\quad \left[\frac{\partial^i u^*}{\partial x^i}\right]_S = \frac{d^i D^{(m)}(x)}{d x^i}\varrho, \quad \left[\frac{\partial^i v^*}{\partial x^i}\right]_S = \frac{d^i D^{(m)}(x)}{d x^i}\sigma, \quad \left[\frac{\partial^i w^*}{\partial x^i}\right]_S = \frac{d^i D^{(m)}(x)}{d x^i}\tau.$$

Denn es ist z. B. innerhalb von R

$$\begin{aligned}(83)\quad \frac{\partial^i u^*(P;\varkappa)}{\partial x^i} = \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)}\Bigg\{&\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} + \varkappa\left(3\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 - 1\right)\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\right)\frac{\partial^i F(p';\varkappa)}{\partial x^i} + \\ &+ i\left(3\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 - 1\right)\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\frac{\partial^{i-1} F(p';\varkappa)}{\partial x^{i-1}} + \\ &+ 3\varkappa\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\frac{\partial^i G(p';\varkappa)}{\partial x^i} + \\ &+ 3i\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\frac{\partial^{-1} G(p';\varkappa)}{\partial x^{i-1}} + \\ &+ 3\varkappa\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \zeta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\frac{\partial^i H(p';\varkappa)}{\partial x^i} + \\ &+ 3i\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \zeta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\frac{\partial^{i-1} H(p';\varkappa)}{\partial x^{i-1}}\Bigg\} d\sigma,\end{aligned}$$

so daß auf Grund von (39), (40), (41) und (42) und dem Randverhalten des Potentials der Doppelschicht bei Annäherung von P an S

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial^i u^*(P;\varkappa)}{\partial x^i}\right]_S = \frac{\partial^i F(p;\varkappa)}{\partial x^i} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)}\Big\{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)\frac{\partial^i F(p';\varkappa)}{\partial x^i} + i\frac{\partial K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)}{\partial \varkappa}\frac{\partial^{i-1} F(p';\varkappa)}{\partial x^{i-1}} + \\ &\quad + K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)\frac{\partial^i G(p';\varkappa)}{\partial x^i} + i\frac{\partial K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)}{\partial \varkappa}\frac{\partial^{i-1} G(p';\varkappa)}{\partial x^{i-1}} + \\ &\quad + K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)\frac{\partial^i H(p';\varkappa)}{\partial x^i} + i\frac{\partial K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)}{\partial \varkappa}\frac{\partial^{i-1} H(p';\varkappa)}{\partial x^{i-1}}\Big\} d\sigma \\ &= \frac{\partial^i F(p;\varkappa)}{\partial x^i} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^i}{\partial x^i}\iint_{(S)}\{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)F(p';\varkappa) \\ &\quad + K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)G(p';\varkappa) + K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)H(p';\varkappa)\}d\sigma = \frac{d^i D^{(m)}(x)}{d x^i}\varrho(p)\end{aligned}$$

sein muß.

6. Nehmen wir nun an, daß der Wert $x_0 = -1$ ($k = -1$) eine $(t+1)$-fache Nullstelle von $D^{(m)}(x)$ darstellt, so daß

$$(84)\quad D^{(m)}(x_0) = \frac{d\,D^{(m)}(x_0)}{dx} = \cdots = \frac{d^t\,D^{(m)}(x_0)}{dx^t} = 0, \quad \frac{d^{t+1}\,D^{(m)}(x_0)}{dx^{t+1}} \neq 0$$

ist und also

$$(85)\quad D^{(m)}(x) = (x - x_0)^{t+1}\,d(x) \text{ mit } d(x_0) \neq 0$$

gilt.

Da alsdann (76), (77) und (78)

$$\Delta u^*(P; -1) - \frac{\partial \vartheta^*(P; -1)}{\partial \xi} = 0, \quad \Delta v^*(P; -1) - \frac{\partial \vartheta^*(P; -1)}{\partial \eta} = 0,$$

$$\Delta w^*(P; -1) - \frac{\partial \vartheta^*(P; -1)}{\partial \zeta} = 0$$

und

$$[u^*]_S = 0, \quad [v^*]_S = 0, \quad [w^*]_S = 0$$

ergeben, so behaupten wir, daß in R

$$u^*(P; -1) \equiv 0, \quad v^*(P; -1) \equiv 0, \quad w^*(P; -1) \equiv 0$$

sein muß. Zum Beweise dieser Tatsache zeigen wir zunächst, daß die ersten partiellen Ableitungen von u^*, v^*, w^* bei Annäherung des Punktes P an S existieren und stetig sind.

Auf Grund des Hilfssatzes 2 von § 3 und des entsprechenden von SCHAUDER bewiesenen Satzes über das Potential der Doppelschicht (eine Bemerkung, die auch auf die weiteren von § 3 benutzten Hilfssätze zu übertragen ist) genügen die Funktionen $F(p; -1)$, $G(p; -1)$, $H(p; -1)$ wegen (75) einer H-Bedingung mit dem Flächenexponenten λ. Wir wollen annehmen, was man ohne weiteres tun kann, daß kein Vielfaches von $\lambda = 1$ ist. Dann folgt ebenfalls aus (75) nach dem Hilfssatz 3 von § 3, daß dieselben Funktionen für $2\lambda < 1$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten 2λ und für $2\lambda > 1$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten 1 genügen. Im Falle $2\lambda < 1$ fahre man so fort. Die betrachteten drei Funktionen genügen also stets einer H-Bedingung mit dem Exponenten 1. Auf Grund der Hilfssätze 4 und 5 von § 3 existieren dann auf S die Tangentialableitungen

$$\frac{\partial F(p; -1)}{\partial t}, \qquad \frac{\partial G(p; -1)}{\partial t}, \qquad \frac{\partial H(p; -1)}{\partial t}$$

und erfüllen eine H-Bedingung mit dem Exponenten $\lambda + \mu - 1 = \varepsilon$, wobei man für μ eine beliebige Zahl mit $0 < \mu < 1$ wählen kann, für die $\lambda + \mu > 1$ ist. Nach dem Hilfssatz 6 desselben Paragraphen genügen dann die drei Tangentialableitungen einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ. Die Hilfssätze 9 und 10 zeigen schließlich, daß die ersten partiellen Ableitungen von $u^*(P; -1)$, $v^*(P; -1)$, $w^*(P; -1)$ bei normaler Annäherung an S gegen

wohlbestimmte Grenzwerte konvergieren. Da diese Konvergenz gleichmäßig ist, so erkennt man, daß die Ableitungen auch in $R+S$ stetig sind[40]).

Nach Satz 1 gibt es dann eine biharmonische Funktion U^* derart, daß

$$u^*(P;-1)=\frac{\partial U^*}{\partial \xi}, \qquad v^*(P;-1)=\frac{\partial U^*}{\partial \eta} \qquad w^*(P;-1)=\frac{\partial U^*}{\partial \zeta}$$

ist.

Versteht man nun unter S_n eine der Flächen, die im Abschnitt 2 dieses Paragraphen definiert wurde, so kann man auf ihr Inneres R_n eine Greensche Formel in der Gestalt

$$\iiint_{(R_n)} (\Delta U^*)^2 \, d\tau = \iint_{(S_n)} \left\{ U^* \frac{\partial \Delta U^*}{\partial n} - \Delta U^* \frac{\partial U^*}{\partial n} \right\} d\sigma \tag{86}$$

anwenden. Bildet man hierin den Limes für $n \to \infty$, so geht $\iint_{(S_n)} \Delta U^* \frac{\partial U^*}{\partial n} \, d\sigma$ gegen Null, da ΔU^* beschränkt bleibt, während $\frac{\partial U^*}{\partial n}$ gegen Null konvergiert. Bei dem ersten Bestandteil auf der rechten Seite beachte man aber, daß für alle Punkte P auf S_n, deren Abstand von S mit h bezeichnet sei,

$$|[U^*]_{S_n}| < \tfrac{1}{2} C h^2 \text{ mit } |D^2 U^*| < C \text{ in } R+S$$

sein muß, da U^* mit seinen partiellen Ableitungen erster Ordnung auf S verschwindet, und die Ableitungen zweiter Ordnung in $R+S$ beschränkt sind. Berücksichtigt man aber, daß ΔU^* eine in $R+S$ stetige harmonische Funktion ist, so hat man nach einem Satz aus der Potentialtheorie[41]) für alle Punkte P von S_n:

$$\left| \left[\frac{\partial \Delta U^*}{\partial n} \right]_{S_n} \right| < 3 \cdot \frac{3}{2} C \frac{1}{h},$$

so daß schließlich

$$\left| \iint_{(S_n)} U^* \frac{\partial \Delta U^*}{\partial n} \, d\sigma \right| < \frac{9}{4} C^2 F_n h_n$$

ist, wenn F_n den Flächeninhalt von S_n und h_n den maximalen Abstand eines auf S_n gelegenen Punktes P_n von S bedeuten.

Da also auch dieser Bestandteil für $n \to \infty$, d. h. $h_n \to 0$ gegen Null geht, so gilt in $R+S$

$$\Delta U^* \equiv 0$$

und da U^* auf S verschwindet, so muß in $R+S$

$$U^* \equiv 0$$

---

[40]) Für den Beweis dieser Tatsache sei auf M. Sullivan, On the derivatives of Newtonian and logarithmic potentials near the acting masses. Transactions of the Am. math. soc. **34** (1932), S. 137–171, insbes. S. 146–147, verwiesen.

[41]) Vgl. O. D. Kellog, l. c., Anm. [27]), insbes. S. 227.

und damit auch, wie behauptet,

$$u^*(P; -1) \equiv 0, \quad v^*(P; -1) \equiv 0, \quad w^*(P; -1) \equiv 0$$

sein.

Aus (81) folgt nun für $i = 1$ wegen $\vartheta^*(P; -1) \equiv 0$

$$\Delta \frac{\partial u^*}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \vartheta^*}{\partial x}\right) = 0, \quad \Delta \frac{\partial v^*}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \vartheta^*}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\Delta \frac{\partial w^*}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial \vartheta^*}{\partial x}\right) = 0$$

während nach (82) und (84)

$$\left[\frac{\partial u^*}{\partial x}\right]_S = 0, \quad \left[\frac{\partial v^*}{\partial x}\right]_S = 0, \quad \left[\frac{\partial w^*}{\partial x}\right]_S = 0$$

ist. Mit derselben Methode, mit der eben das Verschwinden von u^*, v^*, w^* bewiesen wurde, läßt sich dann zeigen, daß in R

$$\frac{\partial u^*(P; -1)}{\partial x} \equiv 0, \quad \frac{\partial v^*(P; -1)}{\partial x} \equiv 0, \quad \frac{\partial w^*(P; -1)}{\partial x} \equiv 0$$

sein muß. Es ist dazu nur nachzuweisen, daß die partiellen Ableitungen der Funktionen

$$\frac{\partial u^*(P; -1)}{\partial x}, \quad \frac{\partial v^*(P; -1)}{\partial x}, \quad \frac{\partial w^*(P; -1)}{\partial x}$$

nach ξ, η, ζ in $R + S$ stetige Funktionen sind, was ohne weiteres gelingt, wenn man beachtet, daß man neben (83) und entsprechenden Gleichungen für $\frac{\partial^i v^*(P; x)}{\partial x^i}$ und $\frac{\partial^i w^*(P; x)}{\partial x^i}$ für $\frac{\partial^i F(p; x)}{\partial x^i}$ die Funktionalrelation

$$\frac{\partial^i F(p; x)}{\partial x^i} + \frac{1}{2\pi} \iint_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}} + x\left(3\left(\frac{\partial r_{p'p}}{\partial \xi}\right)^2 - 1\right) \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}} \right) \frac{\partial^i F(p'; x)}{\partial x^i} + \right.$$

$$+ i\left(3\left(\frac{\partial r_{p'p}}{\partial \xi}\right)^2 - 1\right) \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}} \frac{\partial^{i-1} F(p'; x)}{\partial x^{i-1}} + 3x \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \xi} \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \eta} \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}} \frac{\partial^i G(p'; x)}{\partial x^i} +$$

$$+ 3i \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \xi} \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \eta} \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}} \frac{\partial^{i-1} G(p'; x)}{\partial x^{i-1}} + 3x \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \xi} \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \zeta} \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}} \frac{\partial^i H(p'; x)}{\partial x^i} +$$

$$\left. + 3i \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \xi} \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \zeta} \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}} \frac{\partial^{i-1} H(p'; x)}{\partial x^{i-1}} \right\} d\sigma = \frac{\vartheta^i D^{(m)}(x)}{dx^i} \varrho(p)$$

und entsprechende Relationen für $\frac{\partial^i G(p; x)}{\partial x^i}$ und $\frac{\partial^i H(p; x)}{\partial x^i}$ hat. In dieser Weise erkennt man der Reihe nach für $i = 0, 1, 2, \ldots, t$, daß in R

$$\frac{\partial^i u^*(P; -1)}{\partial x^i} \equiv 0, \quad \frac{\partial^i v^*(P; -1)}{\partial x^{i-1}} \equiv 0, \quad \frac{\partial^i w^*(P; -1)}{\partial x^i} \equiv 0$$

gilt. Daher kann geschrieben werden

$$u^*(P;\varkappa) = (\varkappa+1)^{l+1}u'(P;\varkappa), \quad v^*(P;\varkappa) = (\varkappa+1)^{l+1}v'(P;\varkappa),$$
$$w^*(P;\varkappa) = (\varkappa+1)^{l+1}w'(P;\varkappa).$$

Hierbei besitzen die Funktionen u', v', w' dieselben Differenzierbarkeitseigenschaften wie die Funktionen u^*, v^*, w^* und genügen nach (77), (78) und (85) den Gleichungen

$$\Delta u' + k\frac{\partial \vartheta'}{\partial \xi} = 0, \quad \Delta v' + k\frac{\partial \vartheta'}{\partial \eta} = 0, \quad \Delta w' + k\frac{\partial \vartheta'}{\partial \zeta} = 0,$$
$$\vartheta' = \frac{\partial u'}{\partial \xi} + \frac{\partial v'}{\partial \eta} + \frac{\partial w'}{\partial \zeta},$$
$$[u']_S = d(\varkappa)\varrho, \quad [v']_S = d(\varkappa)\sigma, \quad [w']_S = d(\varkappa)\tau.$$

Daher stellen die Funktionen

$$u(P;-1) = \frac{u^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)}, \quad v(P;-1) = \frac{v^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)}, \tag{87}$$
$$w(P;-1) = \frac{w^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)}$$

stets bei beliebigen stetigen Randfunktionen ϱ, σ, τ eine Lösung von (62), (63) dar, ganz gleich, ob $D^{(m)}(-1)$ ungleich Null ist oder verschwindet. Damit ist also Satz 2 bewiesen.

7. Als Vorbereitung für den Beweis des im Abschnitt 1 dieses Paragraphen genannten Satzes 3, des ebendort erwähnten Eindeutigkeitssatzes, sowie einiger weiterer Sätze bedürfen wir einiger Hilfssätze, von denen wir zunächst den folgenden beweisen: *Genügen in dem Integralgleichungssystem* (75) *mit* $D^{(m)}(\varkappa) \neq 0$ *die Funktionen* $\varrho(p)$, $\sigma(p)$, $\tau(p)$ *einer H-Bedingung mit dem Exponenten* μ, *so erfüllen auch die Lösungsfunktionen* $F(p;\varkappa)$, $G(p;\varkappa)$, $H(p;\varkappa)$ *eine H-Bedingung mit dem Exponenten* μ.

Beweis[42]). Wir nehmen zunächst an, daß kein Vielfaches von λ gleich 1 ist. Da nach (75) die Lösungsfunktionen stetig sind, so genügen die in diesen Gleichungen auftretenden Integrale nach Hilfssatz 2 von § 3 einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ, so daß wiederum nach (75) die Lösungsfunktionen eine H-Bedingung mit dem Exponenten $\mathrm{Min}(\lambda, \mu)$ erfüllen. Für $\mu \leqq \lambda$ ist also der Hilfssatz bewiesen. Ist aber $\mu > \lambda$, so genügen die Lösungsfunktionen zunächst einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ und demgemäß die Integrale in (75) nach Hilfssatz 3 von § 3 einer H-Bedingung mit dem Exponenten

$$\begin{cases} 2\lambda, & \text{falls } 2\lambda < 1 \\ 1, & \text{falls } 2\lambda > 1 \end{cases}$$

ist (der Fall $2\lambda = 1$ ist ja ausgeschlossen worden).

---

[42]) Er verläuft wörtlich genau, wie der Beweis des entsprechenden Satzes in der Potentialtheorie bei J. SCHAUDER, l. c., Anm. [14]).

Für $2\lambda > 1$ folgt also aus (75), daß die Lösungsfunktionen einer H-Bedingung mit dem Exponenten μ genügen. Im Falle $2\lambda < 1$ ist die Behauptung ebenso für $\mu \leqq 2\lambda$ erwiesen. Ist aber $\mu > 2\lambda$, so gehe man entsprechend einen Schritt weiter. Man muß nach mindestens n Schritten zum Ziele kommen, wenn n eine ganze Zahl bezeichnet, für die $n \cdot \lambda > 1$ ist.

8. Aus dem eben bewiesenen Hilfssatz ergibt sich unmittelbar der folgende

Hilfssatz: *Genügen die Randfunktionen* $\varrho(p)$, $\sigma(p)$, $\tau(p)$ *einer H-Bedingung mit dem Exponenten* μ, *und ist* $D^{(m)}(\varkappa) \neq 0$, *so erfüllen die gemäß* (75) *und* (76) *dazugehörigen Lösungsfunktionen*

$$u(P;\varkappa) = \frac{u^*(P;\varkappa)}{D^{(m)}(\varkappa)}, \quad v(P;\varkappa) = \frac{v^*(P;\varkappa)}{D^{(m)}(\varkappa)}, \quad w(P;\varkappa) = \frac{w^*(P;\varkappa)}{D^{(m)}(\varkappa)}$$

von (69), (70) *in* $R + S$ *eine H-Bedingung mit demselben Exponenten* μ.

Beweis. Auf Grund des eben bewiesenen Hilfssatzes genügen nämlich die durch (75) gegebenen Belegungsfunktionen $F(p;\varkappa)$, $G(p;\varkappa)$, $H(p;\varkappa)$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten μ. Dann folgt aber unmittelbar nach Hilfssatz 11 von § 3, daß die durch (76) gegebenen Funktionen $u^*(P;\varkappa)$, $v^*(P;\varkappa)$, $w^*(P;\varkappa)$ und damit auch die Funktionen $u(P;\varkappa)$, $v(P;\varkappa)$, $w(P;\varkappa)$ in $R + S$ eine H-Bedingung mit dem Exponenten μ erfüllen.

9. Weiter wollen wir den Hilfssatz beweisen: *Genügen die Randfunktionen* $\varrho(p)$, $\sigma(p)$, $\tau(p)$ *einer H-Bedingung mit dem Exponenten* μ, *so erfüllen die durch* (87) *gegebenen Lösungsfunktionen*

$$u(P;-1) = \frac{u^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)}, \quad v(P;-1) = \frac{v^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)},$$

$$w(P;-1) = \frac{w^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)}$$

von (62), (63) *in* $R + S$ *eine H-Bedingung mit dem Exponenten* μ.

Beweis. Für $D^{(m)}(-1) \neq 0$ liegt nur der eben bewiesene Hilfssatz für $\varkappa = -1$ vor. Sei also $D^{(m)}(-1)$ gleich Null. Bezeichnet P einen beliebigen Punkt von R, so ist

$$u(P;\varkappa) = \frac{u^*(P;\varkappa)}{D^{(m)}(\varkappa)}$$

in einer gewissen in der komplexen $\varkappa$-Ebene gelegenen Umgebung von $\varkappa = -1$ analytisch. Als eine solche Umgebung kann gleichmäßig für alle P aus R die Kreisscheibe

$$|\varkappa + 1| < r$$

gewählt werden, bei der r die Entfernung der nächsten an $\varkappa = -1$ gelegenen komplexwertigen Nullstelle von $D^{(m)}(\varkappa)$ ist. Sind P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte aus R, so besitzt die Funktion

$$u_{12}(\varkappa) = u(P_1;\varkappa) - u(P_2;\varkappa)$$

dieselbe Regularitätseigenschaft. In der Kreisscheibe

$$|\varkappa + 1| \leqq \varrho = \frac{r}{2}$$

der komplexen $\varkappa$-Ebene ist alsdann die Funktion $u_{12}(\varkappa)$ regulär analytisch und $D^{(m)}(\varkappa)$ verschwindet nur bei $\varkappa = -1$. Es läßt sich also für $u_{12}(-1)$ nach der Cauchyschen Integralformel

$$u_{12}(-1) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{u_{12}(\varkappa)}{\varkappa + 1} d\varkappa$$

schreiben, wobei das Integral über den Kreis $|\varkappa + 1| = \varrho$ der $\varkappa$-Ebene erstreckt wird. Versteht man unter M das Maximum von $|u_{12}(\varkappa)|$ auf diesem Kreise, so gilt also die Abschätzung

$$|u_{12}(-1)| = |u(P_1; -1) - u(P_2; -1)| \leqq \frac{1}{2\pi} 2\pi\varrho \frac{1}{\varrho} M = M.$$

Dehnt man nunmehr die Überlegungen, die zum Hilfssatz 8 geführt haben, auf die komplexen $\varkappa$-Werte mit $|\varkappa + 1| = \varrho$ aus, für die ja $D^{(m)}(\varkappa) \neq 0$ ist, so muß

$$\operatorname{Max}\{|u(P_1; \varkappa) - u(P_2; \varkappa)|\} \leqq K B r_{P_1 P_1}^{\mu}$$
$$(|\varkappa + 1| = \varrho)$$

sein. Die Konstante B ist hierbei zugleich mit ϱ von der Lage der Punkte P_1. P_2 unabhängig. Aus dem letzten Ergebnis folgt dann aber, wie behauptet,

$$|u(P_1; -1) - u(P_2; -1)| \leqq K B r_{P_1 P_2}^{\mu}.$$

10. Weiter gilt folgender Hilfssatz. *Besitzen in dem Integralgleichungssystem* (75) *mit* $D^{(m)}(\varkappa) \neq 0$ *die Funktionen* $\varrho(p)$, $\sigma(p)$, $\tau(p)$ *Tangentialableitungen, die einer H-Bedingung mit dem Exponenten* $\mu \leqq \lambda$ *genügen, so besitzen die eindeutig bestimmten Lösungsfunktionen* $F(p; \varkappa)$, $G(p; \varkappa)$, $H(p; \varkappa)$ *Tangentialableitungen, die der gleichen H-Bedingung genügen.*

Beweis[43]). Da ϱ, σ, τ Tangentialableitungen besitzen, so erfüllen sie eine H-Bedingung mit einem beliebigen Exponenten $\mu_0 < 1$. Nach dem Hilfssatz 7 dieses Paragraphen genügen dann auch wegen (75) die Funktionen $F(P; \varkappa), G(p; \varkappa), H(p; \varkappa)$ ebenfalls einer H-Bedingung mit dem Exponenten μ_0. Man wähle μ_0 so groß, daß $\mu_0 + \lambda > 1$ ist. Nach Hilfssatz 4 und 5 von § 3 existieren dann die Tangentialableitungen der in (75) vorkommenden Integrale und genügen einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\lambda + \mu_0 - 1$. Aus (75) folgt dann aber wieder, daß die Tangentialableitungen von $F(p; \varkappa)$, $G(p; \varkappa)$, $H(p; \varkappa)$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\varepsilon = \operatorname{Min}(\mu, \lambda + \mu_0 - 1)$ genügen. Nach dem Hilfssatz 6 von § 3 erfüllen dann aber die Tangential-

[43]) Er verläuft wörtlich genau wie der Beweis des entsprechenden Satzes in der Potentialtheorie bei J. Schauder, l. c., Anm. [14]).

ableitungen der Integrale in (75) eine H-Bedingung mit dem Exponenten λ. Damit folgt dann schließlich aus (75), daß $F(p;\varkappa), G(p;\varkappa), H(p;\varkappa)$ Tangentialableitungen besitzen, die einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\mu = \mathrm{Min}(\mu, \lambda)$ genügen.

11. Mit dem eben erhaltenen Ergebnis können wir alsdann den im ersten Abschnitt dieses Paragraphen angegebenen Satz 3 beweisen, nach dem die durch (87) gegebenen Lösungsfunktionen

$$u(P;-1) = \frac{u^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)}, \quad v(P;-1) = \frac{v^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)},$$
$$w(P;-1) = \frac{w^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)}$$

von (62), (63) in $R+S$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben, falls die Randfunktionen $\varrho(p), \sigma(p), \tau(p)$ partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen, die einer gleichmäßigen H-Bedingung genügen.

Da nämlich alsdann die Randfunktionen nach der Bemerkung am Ende von § 1 auch Tangentialableitungen besitzen, die einer gleichmäßigen H-Bedingung genügen, so ist dieser Satz für $D^{(m)}(-1) \neq 0$ eine unmittelbare Folge des Hilfssatzes 10 dieses Paragraphen und der Hilfssätze 9 und 10 von § 3. Schreibt man aber im Falle $D^{(m)}(-1) = 0$ ähnlich wie im Abschnitt 9 dieses Paragraphen,

$$u(P;-1) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{u(P;\varkappa)}{\varkappa+1}\,d\varkappa,$$

wobei das Integral über einen von P unabhängigen Kreis in der komplexen $\varkappa$-Ebene, auf dem $D^{(m)}(\varkappa) \neq 0$ ist, erstreckt wird [und entsprechend für $v(P;-1)$, $w(P;-1)$], so erkennt man auf Grund derselben Hilfssätze, daß auch in diesem Fall die ersten partiellen Ableitungen der angegebenen Lösungsfunktionen in $R+S$ stetig sind.

12. Wir sind nunmehr in der Lage, den bereits im ersten Abschnitt angekündigten Eindeutigkeitssatz unter folgenden allgemeinen Voraussetzungen zu beweisen:

Satz 4. *Werden die Funktionen $\varrho(p)$, $\sigma(p)$, $\tau(p)$ auf S lediglich als stetig vorausgesetzt, so kann es (bis auf eine additive Konstante) höchstens eine in R biharmonische Funktion U geben, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in $R+S$ stetig sind und bei Annäherung an S bzw. gegen die Funktionen ϱ, σ, τ konvergieren.*

Beweis. Sei U eine beliebige derartige biharmonische Funktion. Ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung besitzen auf den im Abschnitt 2 dieses Paragraphen konstruierten Flächen S_n stetig variierende Randfunktionen $\varrho_{(n)}$, $\sigma_{(n)}$, $\tau_{(n)}$, die außerdem sicherlich Tangentialableitungen aufweisen, die einer H-Bedingung mit einem beliebigen Exponenten $\mu < 1$ genügen.

Zu diesen Randfunktionen konstruiere man nun die zu (87) analogen Funktionen

$$u_{(n)}(P;-1)=\frac{u^*_{(n)}(P;-1)}{D^{(m)}_{(n)}(-1)},\qquad v_{(n)}(P;-1)=\frac{v^*_{(n)}(P;-1)}{D^{(m)}_{(n)}(-1)},$$

(88)

$$w_{(n)}(P;-1)=\frac{w^*_{(n)}(P;-1)}{D^{(m)}_{(n)}(-1)}.$$

die nach den Aussagen von Satz 1 bis 3 die Lösung der biharmonischen Randwertaufgabe für R_n+S_n darstellen. Da nach Satz 3 die ersten partiellen Ableitungen dieser Funktionen in R_n+S_n als stetige Funktionen existieren, so folgt aus Überlegungen, wie sie im Abschnitt 6 dieses Paragraphen angestellt wurden, daß in R_n

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}\equiv u_{(n)}(P:-1),\qquad \frac{\partial U}{\partial \eta}\equiv v_{(n)}(P;-1),\qquad \frac{\partial U}{\partial \zeta}\equiv w_{(n)}(P;-1)$$

sein muß.

Beachtet man nun, daß sich für die die Fredholmschen Determinanten darstellenden unendlichen Reihen bei Benutzung des Hadamardschen Determinantensatzes konvergente von n unabhängige Majoranten angeben lassen, so bestehen für $n\to\infty$ die folgenden Limesrelationen

$$\lim_{n\to\infty}D^{(m)}_{(n)}(\varkappa)=D^{(m)}(\varkappa),$$

$$\lim_{n\to\infty}F_{(n)}(P;\varkappa)=F(P;\varkappa),\qquad \lim_{n\to\infty}G_{(n)}(P;\varkappa)=G(P;\varkappa),$$

$$\lim_{n\to\infty}H_{(n)}(P;\varkappa)=H(P;\varkappa).$$

Ist nun $D^{(m)}(-1)\neq 0$, so ist von einem gewissen n ab auch $D^{(m)}_{(n)}(-1)\neq 0$, und es ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty}u_{(n)}(P;-1)=\frac{u^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)},\qquad \lim_{n\to\infty}v_{(n)}(P;-1)=\frac{v^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)},$$

(89)

$$\lim_{n\to\infty}w_{(n)}(P;-1)=\frac{w^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)}.$$

Im Falle $D^{(m)}(-1)=0$ gehe man von dem Satz aus, daß die Folge $D^{(m)}_{(n)}(\varkappa)$ in jedem ganz im Endlichen gelegenen Gebiet der komplexen $\varkappa$-Ebene gleichmäßig gegen $D^{(m)}(\varkappa)$ konvergiert. Es ist nämlich $D^{(m)}_{(n)}(\varkappa)$ als Fredholmsche Determinante eine unendliche Reihe der Gestalt

$$D^{(m)}_{(n)}(\varkappa)=\sum_{\varrho=1}^{\infty}d_{n\varrho}(\varkappa)\qquad (n=1,2,\ldots),$$

deren Elemente bei Benutzung des Hadamardschen Determinantensatzes sich in der Form

$$|d_{n\varrho}(\varkappa)|\leqq c_\varrho$$

abschätzen lassen, wobei c_ϱ von n und dem in dem endlichen Gebiet der $\varkappa$-Ebene gelegenen $\varkappa$ unabhängig ist, und die Reihe $\sum_{\varrho=1}^{\infty} c_\varrho$ konvergiert. Wählt man alsdann bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_1 und die natürliche Zahl n so groß, daß

$$1. \qquad \sum_{\varrho=n_1+1}^{\infty} c_\varrho < \frac{\varepsilon}{3}$$

ist, womit also n_1 festgelegt wird, und daß

$$2. \qquad \sum_{\varrho=1}^{n_1} |d_{n\varrho}(\varkappa) - d_\varrho(\varkappa)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

mit

$$d_\varrho(\varkappa) = \lim_{n\to\infty} d_{n\varrho}(\varkappa)$$

gilt, so gewinnt man die Abschätzung

$$|D_{(n)}^{(m)}(\varkappa) - D^{(m)}(\varkappa)|$$

$$\leqq |D_{(n)}^{(m)}(\varkappa) - \sum_{\varrho=1}^{n_1} d_{n\varrho}(\varkappa)| + |\sum_{\varrho=1}^{n_1} d_{n\varrho}(\varkappa) - \sum_{\varrho=1}^{n_1} d_\varrho(\varkappa)| + |\sum_{\varrho=1}^{n_1} d_\varrho(\varkappa) - D^{(m)}(\varkappa)|$$

$$\leqq \sum_{\varrho=n_1+1}^{\infty} |d_{n\varrho}(\varkappa)| + \sum_{\varrho=1}^{n_1} |d_{n\varrho}(\varkappa) - d_\varrho(\varkappa)| + \sum_{\varrho=n_1+1}^{\infty} |d_\varrho(\varkappa)|$$

$$\leqq 2 \sum_{\varrho=n_1+1}^{\infty} c_\varrho + \sum_{\varrho=1}^{n_1} |d_{n\varrho}(\varkappa) - d_\varrho(\varkappa)| < \varepsilon,$$

die die Behauptung beweist. Ist dann auf der Berandung eines in der $\varkappa$-Ebene gelegenen Kreises um den Punkt $\varkappa = -1$ durchweg $D^{(m)}(\varkappa) \neq 0$, so gilt das wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz auch von einem gewissen n ab für die Funktionen $D_{(n)}^{(m)}(\varkappa)$. Schreibt man also mit einem über einen solchen Kreis erstreckten Integral

$$u_{(n)}(P; -1) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{u_{(n)}(P; \varkappa)}{\varkappa + 1}\, d\varkappa$$

und entsprechende Ausdrücke für $v_n(P; -1)$, $w_n(P; -1)$, so erkennt man, daß die Limesrelationen (89) auch im Falle $D^{(m)}(-1) = 0$ gelten.

Damit ist also gezeigt, daß jede Lösung die Gestalt (87) haben muß, so daß es höchstens eine Lösung geben kann.

13. Mit Hilfe des eben bewiesenen Eindeutigkeitssatzes können wir nunmehr folgenden Satz aussprechen, der für eine anschließende, bereits in der Einleitung erwähnte Arbeit des Verfassers von Wichtigkeit sein wird.

Satz 5. *Nehmen die ersten partiellen Ableitungen der in R biharmonischen Funktion U bei Annäherung an S die Randfunktionen $\varrho(p)$, $\sigma(p)$, $\tau(p)$ an, die*

einer H-Bedingung mit dem Exponenten μ genügen, so erfüllen auch die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial U}{\partial \zeta}$$

in $R + S$ eine H-Bedingung mit dem Exponenten μ.

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 4 und dem in Abschnitt 9 bewiesenen Hilfssatz.

14. Unter einem regulären Oberflächenelement E verstehe man bei Zugrundelegung eines rechtwinklig kartesischen Bezugssystems eine räumliche Punktmenge von Punkten (x, y, z), für deren z-Koordinate bei geeigneter Orientierung der Koordinatenachsen

$$z = \varphi(x, y)$$

gilt, wobei $\varphi(x, y)$ eindeutig ist und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung in einem ebenen Gebiet G der x, y-Ebene besitzt, das von einer endlichen Anzahl von aneinander schließenden, durch eine einmal stetig differenzierbare Parameterdarstellung gegebenen doppelpunktfreien Kurvenbogen begrenzt wird. Unter Benutzung dieser Definition beschließen wir diesen Paragraphen mit dem folgenden

Satz 6. *R sei ein beschränktes, offenes Kontinuum, dessen Berandung S ein reguläres Oberflächenelement E mit den folgenden Eigenschaften enthalte:*

(a) *Der Winkel, den zwei Normalen von E miteinander einschließen, sei stets kleiner als 60^0.*

(b) *In einem Koordinatensystem, dessen Achsen in einem beliebigen Punkte p von E tangential bzw. normal zu E seien, lasse sich E durch eine Funktion*

$$z = \varphi(x, y)$$

darstellen, die eindeutig ist und stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung hinsichtlich x und y besitzt, die einer in p gleichmäßigen H-Bedingung (Exponent λ) genügen.

(c) *Zu jedem regulären Oberflächenelement E', das im Innern von E enthalten ist, gebe es eine positive Zahl a_1 derart, daß eine Kugel mit dem Radius a_1 um irgendeinen Punkt von E' von S nur Punkte enthält, die gleichzeitig E angehören (diese Voraussetzung soll mehrfache Randpunkte ausschließen). Die Funktion $U(\xi, \eta, \zeta)$ sei in R eindeutig und biharmonisch, in $R + S$ sei sie mit ihren ersten partiellen Ableitungen stetig, wobei die letzteren bei Annäherung an S gegen Randfunktionen $\varrho(p), \sigma(p), \tau(p)$ konvergieren, die auf E einer gleichmäßigen H-Bedingung (Exponent μ) genügen.*

Es wird dann behauptet, daß es ein Gebiet R' gibt, welches alle Punkte von R in einer gewissen Nachbarschaft von E' enthält, so daß in $R' + E'$ die Funktionen $\frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}, \frac{\partial U}{\partial \zeta}$ einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten μ genügen.

Dem Beweise dieses Satzes schicken wir zunächst einen Hilfssatz voraus.

15. *Es gibt ein reguläres Oberflächenelement E'', das ganz in E enthalten ist, und das E' in seinem Innern enthält, von der Eigenschaft, daß es durch ein ganz in R liegendes Flächenstück zu einer einfachen geschlossenen Fläche $\bar{S}$ ergänzt werden kann, die durchweg den in § 1 genannten Voraussetzungen genügt.*

Beweis. Die Einheitsvektoren des x, y, z-Systems in einem Punkte p von E seien mit $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ bezeichnet. Man wähle eine einfache geschlossene, im Innern von E, aber im Äußeren von E' gelegene Kurve C, die etwa durch den auf p bezogenen Ortsvektor in der Form

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s) = x(s)\,\mathfrak{e}_1 + y(s)\,\mathfrak{e}_2 + z(s)\,\mathfrak{e}_3 \qquad (0 \leqq s \leqq s_0)$$

gegeben sei, wobei angenommen werden soll, daß die drei Funktionen $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ zweimal stetig nach s differenzierbar sind, und die zweiten Ableitungen außerdem einer in s gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügen. Solche Kurven gibt es sicherlich auf E[44]). Das von C begrenzte reguläre Oberflächenelement heiße E''.

Zu E'' konstruiere man nun das Parallelflächenstück E_h'' im Abstand h, das durch

$$x_h = x + h\cos(n, x) = x - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\omega} h,$$

$$y_h = y + h\cos(n, y) = y - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\omega} h, \qquad \left(\omega = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}\right)$$

$$z_h = z + h\cos(n, z) = z + \frac{1}{\omega} h,$$

gegeben ist, wenn der Punkt (x, y, z) auf E'' liegt. Wir nehmen h so klein (h wird im folgenden noch weiter eingeschränkt werden), daß sich die Normalenstücke zwischen $E'' + C$ und $E_h'' + C_h$ nicht schneiden, und daß E_h'' ganz in R liegt, was bei Beachtung der Voraussetzung (c) über E stets möglich ist. Wegen der Voraussetzungen über S besitzt E_h'', wenn es als Teilstück von $\bar{S}$ gewählt wird, offenbar die verlangten Eigenschaften.

Die beiden Flächenstücke E'' und E_h'' ergänze man nun in folgender Weise zu einer geschlossenen Fläche. In einem beliebigen Punkte von C, dem etwa

---

[44]) Vgl. hierzu O. D. Kellog, l. c., Anm. [37]), insbes. S. 318–319.

der Parameter s entspreche, und der kurz als der Punkt s auf C bezeichnet werde, wähle man das durch die Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1(s)$, $\mathfrak{e}_2(s)$, $\mathfrak{e}_3(s)$ charakterisierte Tangential-Normalkoordinatensystem (die diesbezüglichen Koordinaten seien mit $\xi^{(s)}$, $\eta^{(s)}$), $\zeta^{(s)}$ bezeichnet), bei dem $\mathfrak{e}_3(s)$ mit dem Flächennormalenvektor $\mathfrak{n}(s)$ ($|\mathfrak{n}(s)| = 1$) und $\mathfrak{e}_2(s)$ mit dem Tangentenvektor $\mathfrak{t}(s)$ ($|\mathfrak{t}(s)| = 1$) an C identisch sind. Den Punkt s auf C und den auf der Flächennormalen in s gelegenen Punkt mit den Koordinaten

$$\xi^{(s)} = 0, \quad \eta^{(s)} = 0, \quad \zeta^{(s)} = h$$

verbinde man durch den in der von $\mathfrak{e}_1(s)$ und $\mathfrak{e}_3(s)$ aufgespannten Ebene gelegenen Kurvenbogen $C^{(s)}$, der die Parameterdarstellung

$$\xi^{(s)}(\alpha) = \tau \frac{h}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{h}\right), \qquad \zeta^{(s)}(\alpha) = \frac{h}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right) + 1\right), \tag{90}$$

$$-\frac{\pi}{2} h \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2} h$$

besitzt, wobei τ eine positive Zahl sei, über die noch verfügt wird. Die Fläche, die aus allen $C^{(s)}$ ($0 \leqq s \leqq s_0$) besteht, werde mit $F_{h,\tau}$ bezeichnet. Wir behaupten, daß bei hinreichend kleinem h und τ die Fläche $E'' + F_{h,\tau} + E_h''$ einfach geschlossen ist und den in § 1 genannten Voraussetzungen genügt, wobei $F_{h,\tau} + E_h''$ abgesehen von der Randkurve C ganz in R liegt.

Es ist dazu nur noch zu zeigen, daß $F_{h,\tau}$ bei hinreichend kleinem h und τ einfach ist, den in § 1 genannten Voraussetzungen genügt und abgesehen von C ganz in R liegt. $F_{h,\tau}$ ist in Vektoren durch die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \mathfrak{x}(s,\alpha) = x(s,\alpha)\,\mathfrak{e}_1 + y(s,\alpha)\,\mathfrak{e}_2 + z(s,\alpha)\,\mathfrak{e}_3 \\ &= \mathfrak{x}(s) + \xi^{(s)}(\alpha)\,\mathfrak{e}_1(s) + \zeta^{(s)}(\alpha)\,\mathfrak{e}_3(s) \\ &= x(s)\,\mathfrak{e}_1 + y(s)\,\mathfrak{e}_2 + z(s)\,\mathfrak{e}_3 + \\ &\quad + \xi^{(s)}(\alpha)\,\mathfrak{e}_1(s) + \zeta^{(s)}(\alpha)\,\mathfrak{e}_3(s) \end{aligned} \tag{91}$$

oder in Koordinaten durch

$$\begin{aligned} x &= x(s,\alpha) = x(s) + \xi^{(s)}(\alpha)\cos(\mathfrak{e}_1(s), \mathfrak{e}_1) + \zeta^{(s)}(\alpha)\cos(\mathfrak{e}_3(s), \mathfrak{e}_1), \\ y &= y(s,\alpha) = y(s) + \xi^{(s)}(\alpha)\cos(\mathfrak{e}_1(s), \mathfrak{e}_2) + \zeta^{(s)}(\alpha)\cos(\mathfrak{e}_3(s), \mathfrak{e}_2), \\ z &= z(s,\alpha) = z(s) + \xi^{(s)}(\alpha)\cos(\mathfrak{e}_1(s), \mathfrak{e}_3) + \zeta^{(s)}(\alpha)\cos(\mathfrak{e}_3(s), \mathfrak{e}_3) \end{aligned} \tag{92}$$

gegeben. Beachtet man nun, daß

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_1(s) &= \mathfrak{t}(s) \times \mathfrak{n}(s), \\ \mathfrak{e}_3(s) &= \mathfrak{n}(s), \\ \mathfrak{t}(s) &= \mathfrak{x}'(s) = x'(s)\mathfrak{e}_1 + y'(s)\mathfrak{e}_2 + z'(s)\mathfrak{e}_3 \end{aligned}$$

und

$$\mathfrak{n}(s) = -\frac{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right]_s}{\omega(s)}\,\mathfrak{e}_1 - \frac{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]_s}{\omega(s)}\,\mathfrak{e}_2 + \frac{1}{\omega(s)}\,\mathfrak{e}_3$$

ist, so kann für (91) und (92) bei Beachtung von (90) ausführlicher

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s,\alpha) = \mathfrak{x}(s) + \tau\frac{h}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{h}\right)\mathfrak{t}(s)\times\mathfrak{n}(s) + \frac{h}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right)+1\right)\mathfrak{n}(s)$$

und

$$x = x(s,\alpha) = x(s) + \tau\frac{h}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{h}\right)\frac{1}{\omega(s)}\begin{vmatrix} y'(s), & z'(s) \\ -\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]_s, & 1\end{vmatrix} - \frac{h}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right)+1\right)\frac{\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_s}{\omega(s)},$$

$$y = y(s,\alpha) = y(s) - \tau\frac{h}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{h}\right)\frac{1}{\omega(s)}\begin{vmatrix} x'(s), & z'(s) \\ -\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_s, & 1\end{vmatrix} - \frac{h}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right)+1\right)\frac{\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]_s}{\omega(s)},$$

$$z = z(s,\alpha) = z(s) + \tau\frac{h}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{h}\right)\frac{1}{\omega(s)}\begin{vmatrix} x'(s), & y'(s) \\ -\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_s, & -\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]_s\end{vmatrix} + \frac{h}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right)+1\right)\frac{1}{\omega(s)}$$

geschrieben werden. Man sieht, daß die drei Funktionen $x(s,\alpha)$, $y(s,\alpha)$, $z(s,\alpha)$ als Funktionen von s und α einmal stetig differenzierbar sind und die partiellen Ableitungen einer in $s\,(0 \leqq s \leqq s_0)$ und $\alpha\left(-\frac{\pi}{2}h \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}h\right)$ gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügen.

Die Fläche $F_{h,\tau}$ läßt sich dann für jedes in einem Punkte (s,α) gelegene Tangential-Normalkoordinatensystem x, y, z im Kleinen durch eine Funktion $z = \varphi(x,y)$ mit den gewünschten Eigenschaften eindeutig darstellen, wenn gezeigt werden kann, daß die Vektoren $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s}$ und $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\alpha}$ stets linear unabhängig sind. Nun ist

$$\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s} = \mathfrak{t}(s) + \tau\frac{h}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{h}\right)\frac{d}{ds}\left(\mathfrak{t}(s)\times\mathfrak{n}(s)\right) + \frac{h}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right)+1\right)\frac{d\,\mathfrak{n}(s)}{ds},$$

$$\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\alpha} = -\frac{\tau}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right)\mathfrak{t}(s)\times\mathfrak{n}(s) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{h}\right)\mathfrak{n}(s).$$

Für keinen Parameterwert s mit $0 \leqq s \leqq s_0$ und α mit

$$-\frac{\pi}{2}h \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}h$$

ist der Vektor $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\alpha}$ für $\tau > 0$ gleich dem Nullvektor. Die Vektoren $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s}$ und $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\alpha}$ sind sodann sicher linear unabhängig, wenn h so klein gewählt wird, daß

erstens $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s}$ $(0 \leqq s \leqq s_0)$ nicht gleich dem Nullvektor ist — das ist ja wegen

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s}\right| \geqq 1 - h\left|\frac{\tau}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{h}\right)\frac{d}{ds}(\mathfrak{t}(s)\times\mathfrak{n}(s)) + \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right)+1\right)\frac{d\,\mathfrak{n}(s)}{ds}\right|$$

stets möglich — und daß zweitens $\left|\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s} - \mathfrak{t}(s)\right|$ so klein ist, daß $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s}$ $(0 \leqq s \leqq s_0)$ niemals der von $\mathfrak{n}(s)$ und $\mathfrak{t}(s)\times\mathfrak{n}(s)$ aufgespannten Ebene angehört.

Wird die Bogenlänge auf den Kurven $\alpha =$ konst. mit s_α und die Bogenlänge auf den Kurven $s =$ konst. mit σ_s bezeichnet, wobei also

$$\frac{ds_\alpha}{ds} = \sqrt{\left(\mathfrak{t}(s) + \tau\frac{h}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{h}\right)\frac{d}{ds}(\mathfrak{t}(s)\times\mathfrak{n}(s)) + \frac{h}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right)+1\right)\frac{d\,\mathfrak{n}(s)}{ds}\right)^2}$$

und

$$\frac{d\sigma_s}{d\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{\tau^2\sin^2\left(\frac{\alpha}{h}\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{h}\right)}$$

gilt, so zeigt sich weiter, daß die ersten partiellen Ableitungen $\frac{\partial \mathfrak{x}(s,\alpha)}{\partial s_\alpha}$, $\frac{\partial \mathfrak{x}(s,\alpha)}{\partial \sigma_s}$ die jeweils für $\alpha =$ konst. bzw. $s =$ konst. zu bilden sind, bei Annäherung des Punktes (s, α) an einen Punkt $\left(s, -\frac{\pi}{2}h\right)$ bzw. $\left(s, \frac{\pi}{2}h\right)$ der Randkurve C von E'' bzw. der Randkurve C_h von E_h'' gegen die entsprechenden Werte der Ableitungen konvergieren, die sich bei Annäherung an dieselben Randpunkte auf E'' bzw. E_h'' ergeben. Dazu beachte man, daß $\mathfrak{n}(s)$ auch Normalvektor von E_h'' ist, und daß

$$\left[\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s_\alpha}\right]_{\alpha=-\frac{\pi}{2}h} = \left[\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s}\frac{ds}{ds_\alpha}\right]_{\alpha=-\frac{\pi}{2}h} = \mathfrak{t}(s),$$

$$\left[\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s_\alpha}\right]_{\alpha=\frac{\pi}{2}h} = \left[\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s}\frac{ds}{ds_\alpha}\right]_{\alpha=\frac{\pi}{2}h} = \frac{\mathfrak{t}(s)+h\frac{d\,\mathfrak{n}(s)}{ds}}{\sqrt{\left(\mathfrak{t}(s)+h\frac{d\,\mathfrak{n}(s)}{ds}\right)^2}},$$

$$\left[\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \sigma_s}\right]_{\alpha=-\frac{\pi}{2}h} = \left[\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{d\sigma_s}\right]_{\alpha=-\frac{\pi}{2}h} = \mathfrak{t}(s)\times\mathfrak{n}(s),$$

$$\left[\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \sigma_s}\right]_{\alpha=\frac{\pi}{2}h} = \left[\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{d\sigma_s}\right]_{\alpha=\frac{\pi}{2}h} = -\,\mathfrak{t}(s)\times\mathfrak{n}(s)$$

ist.

Weiter werde gezeigt, daß sich dieses Flächenstück, wenn nur h und τ klein genug gewählt werden, nicht selbst überschneiden kann. Zum Beweise gehen wir von der Bemerkung aus, daß die durch

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s, n, r) = \mathfrak{x}(s) + n\,\mathfrak{n}(s) + r\,\mathfrak{t}(s)\times\mathfrak{n}(s)$$

gegebene, einmal stetig nach s, n, r partiell differenzierbare, dreiparametrige Vektormannigfaltigkeit im kleinen eindeutig auf die Parameter s, n, r

bezogen ist, da die Kolonnen der Funktionalmatrix aus den Komponenten der Vektoren

$$\mathfrak{t}(s) + n\frac{d\,\mathfrak{n}(s)}{ds} + r\frac{d}{ds}\left(\mathfrak{t}(s) \times \mathfrak{n}(s)\right),\ \mathfrak{n}(s),\ \mathfrak{t}(s) \times \mathfrak{n}(s)$$

bestehen und diese Vektoren bei hinreichend kleinem h und r_0 für alle s, n, r mit $0 \leqq s \leqq s_0$, $0 \leqq n \leqq h$, $0 \leqq r \leqq r_0$ linear unabhängig sind. Wir denken uns h, das den bereits genannten Einschränkungen genügt, und r_0 so gewählt, daß die letztere Voraussetzung zutrifft. Wir betrachten dann nur solche τ-Werte, für die $\tau\frac{h}{2} \leqq r_0$ ist. Würde nun für die Folgen $h_\nu \to 0$, $\tau_\nu \to 0$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) stets eine Überschneidung der Fläche eintreten, so würde es auf C zwei Punktfolgen $P_\nu^{(1)}$ und $P_\nu^{(2)}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) mit den zugehörigen Parametern $s_\nu^{(1)}$ und $s_\nu^{(2)}$ so geben, daß die Kurvenbogen $C^{(s_\nu^{(1)})}$ und $C^{(s_\nu^{(2)})}$ stets einen Schnittpunkt haben. Die Folge $P_\nu^{(1)}$ muß mindestens einen Häufungspunkt haben, den wir etwa $P^{(1)}$ nennen. Ebenso muß es für die Folge $P_\nu^{(2)}$ mindestens einen Häufungspunkt $P^{(2)}$ geben. Wegen $h_\nu \to 0$, $\tau_\nu \to 0$ muß $P^{(1)} = P^{(2)}$ sein. Da die Kurve C nach Voraussetzung einfach ist, gilt für die zugehörigen Parameterwerte $s^{(1)} = s^{(2)}$. Es gibt nun Teilfolgen $P_{\bar\nu}^{(1)}$ und $P_{\bar\nu}^{(2)}$ von $P_\nu^{(1)}$ bzw. $P_\nu^{(2)}$, die gegen $P^{(1)}$ konvergieren derart, daß $C^{(s_{\bar\nu}^{(1)})}$ und $C^{(s_{\bar\nu}^{(2)})}$ jeweils einen Schnittpunkt haben. Dazu müßte es aber Parameterwerte $s_{\bar\nu}^{(1)}$, $s_{\bar\nu}^{(2)}$, $n_{\bar\nu}^{(1)}$, $n_{\bar\nu}^{(2)}$, $r_{\bar\nu}^{(1)}$ und $r_{\bar\nu}^{(2)}$ mit

$$s_{\bar\nu}^{(1)} \to s^{(1)}, \quad s_{\bar\nu}^{(2)} \to s^{(1)}, \quad n_{\bar\nu}^{(1)} \to 0, \quad n_{\bar\nu}^{(2)} \to 0, \quad r_{\bar\nu}^{(1)} \to 0, \quad r_{\bar\nu}^{(2)} \to 0$$

geben, für die

$$\mathfrak{x}(s_{\bar\nu}^{(1)}) + n_{\bar\nu}^{(1)}\mathfrak{n}(s_{\bar\nu}^{(1)}) + r_{\bar\nu}^{(1)}\mathfrak{t}(s_{\bar\nu}^{(1)}) \times \mathfrak{n}(s_{\bar\nu}^{(1)})$$
$$= \mathfrak{x}(s_{\bar\nu}^{(2)}) + n_{\bar\nu}^{(2)}\mathfrak{n}(s_{\bar\nu}^{(2)}) + r_{\bar\nu}^{(2)}\mathfrak{t}(s_{\bar\nu}^{(2)}) \times \mathfrak{n}(s_{\bar\nu}^{(2)})$$

ist. Das widerspricht aber der einleitenden Bemerkung über die dreiparametrige Vektormannigfaltigkeit

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s, n, r).$$

Schließlich werde gezeigt, daß $F_{h,\tau}$, abgesehen von der Randkurve C, ganz in R liegt. Zunächst gibt es nach der Voraussetzung (c) über E zu E'' eine positive Zahl b, so daß eine Kugel mit dem Radius b um irgendeinen Punkt von E'' von S nur Punkte enthält, die gleichzeitig E angehören. Bezeichnet man nun mit ϱ die Entfernung des Randes der Projektion von E'' auf die Tangentialebene in einem Punkte von C vom Rande der Projektion von E, so muß b offenbar kleiner als ϱ sein, denn sonst gäbe es sicher eine Kugel vom Radius b um einen Punkt von E'', die Punkte von S enthielte, die nicht zu E gehören.

Bezeichnet nun a_2 die untere Grenze der Krümmungsradien aller Normalschnitte von E — auf Grund der Voraussetzungen über E ist $a_2 > 0$ —, so unterliege h außer den früheren Forderungen der Einschränkung, daß

$$h < \text{Min}\,(b, a_2) \tag{93}$$

ist. Weiter wähle man τ abgesehen von den früheren Forderungen so, daß

$$0 < \tau < 1 \tag{94}$$

gilt. Wegen (93) und (94) gehört dann jeder erzeugende Bogen $C^{(s)}$ von $F_{h,\tau}$ ganz der Kugel vom Radius b um den Punkt s von C an. In dieser Kugel kommen nach Voraussetzung von S nur Punkte vor, die auch E angehören. Nehmen wir nun an, daß $F_{h,\tau}$ abgesehen von C nicht ganz in R liegt, so müßte die Punktmenge $F_{h,\tau} - C$ mit E Punkte gemeinsam haben. Dann gibt es aber einen Bogen $C^{(s)}$, der mit E, abgesehen von dem Punkte s auf C, noch einen weiteren Punkt gemeinsam hat. Schneidet die $\mathfrak{e}_1(s)$, $\mathfrak{e}_3(s)$-Ebene E längs der Kurve $\mathfrak{C}^{(s)}$, deren Gleichung

$$\zeta^{(s)} = \zeta^{(s)}(\xi^{(s)})$$

laute, so müssen also $C^{(s)}$ und $\mathfrak{C}^{(s)}$, abgesehen von s, noch einen weiteren Punkt gemeinsam haben.

Versteht man nun unter $K^{(s)}$ den Halbkreisbogen

$$\xi^{(s)}(\alpha) = \frac{h}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{h}\right), \quad \zeta^{(s)}(\alpha) = \frac{h}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right) + 1\right),$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqq h \leqq \frac{\pi}{2}h,$$

so haben wegen der vorhin gemachten Bemerkung über b auch $\mathfrak{C}^{(s)}$ und $K^{(s)}$, abgesehen vom Punkte s von C, einen weiteren Punkt $P = (\xi_0^{(s)}, \zeta_0^{(s)})$ gemeinsam.

Versteht man nun unter $\beta_{\mathfrak{C}}(\xi^{(s)})$ bzw. $\beta_K(\xi^{(s)})$ die Winkel, die die Tangenten an $\mathfrak{C}^{(s)}$ bzw. $K^{(s)}$ mit der positiven $\xi^{(s)}$-Achse bilden, so muß es in $0 \leqq \xi^{(s)} \leqq \xi_0^{(s)}$ sicherlich $\xi^{(s)}$-Werte geben, für die

$$\beta_{\mathfrak{C}}(\xi^{(s)}) > \beta_K(\xi^{(s)})$$

ist, falls nicht dauernd

$$\beta_{\mathfrak{C}}(\xi^{(s)}) = \beta_K(\xi^{(s)}) \tag{95}$$

ist. Die untere Grenze dieser $\xi^{(s)}$-Werte sei mit $\xi_1^{(s)}$ bezeichnet, so daß

$$\beta_{\mathfrak{C}}(\xi_1^{(s)}) = \beta_K(\xi_1^{(s)})$$

gilt. Ist aber in $0 \leqq \xi^{(s)} \leqq \xi_0^{(s)}$ ständig (95) erfüllt, so setze man $\xi_1^{(s)} = 0$.

Wird mit $K_1^{(s)}$ der Kreis vom Radius $\frac{h}{2}$ bezeichnet, der $\mathfrak{C}^{(s)}$ im Punkte

$$P_1 = (\xi_1^{(s)}, \zeta^{(s)}(\xi_1^{(s)}))$$

berührt, so liegt die Kurve $\mathfrak{C}^{(s)}$ für $\xi^{(s)} > \xi_1^{(s)}$, falls $\xi^{(s)} - \xi_1^{(s)}$ hinreichend klein ist, entweder $K_1^{(s)}$ an, oder sie durchsetzt diesen Kreis. Ist nun t die Bogen-

länge auf $K_1^{(\varepsilon)}$ und besitzt $\mathfrak{C}^{(\varepsilon)}$ in einem ξ, ζ-Koordinatensystem, das in P_1 die Tangential-Normallage hat, die Gleichung

$$\zeta = \gamma(\xi),$$

so sind die zu derselben Abszisse

$$\xi = \frac{h}{2} \sin \frac{2t}{h}$$

gehörenden ζ-Ordinaten durch

$$\gamma\left(\frac{h}{2} \sin\left(\frac{2t}{h}\right)\right) \text{ bzw. } \frac{h}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2t}{h}\right)\right)$$

gegeben. Für alle hinreichend kleinen positiven t gilt also

$$\gamma\left(\frac{h}{2} \sin\left(\frac{2t}{h}\right)\right) - \frac{h}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2t}{h}\right)\right) \geqq 0.$$

Aus

$$\gamma\left(\frac{h}{2} \sin\left(\frac{2t}{h}\right)\right) = \frac{1}{2} \frac{d^2\gamma(\xi^*)}{d\xi^2} \left[\frac{h}{2} \sin\left(\frac{2t}{h}\right)\right]^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d^2\gamma(\xi^*)}{d\xi^2} \left[t - \frac{4t^3}{3!\,h^2} + \cdots\right]^2,$$

wobei ξ^* ein geeigneter Zwischenwert ist, und aus

$$\frac{h}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2t}{h}\right)\right) = \frac{t^2}{h} - \frac{t^4}{3h^3} + \cdots$$

folgt dann aber für die Krümmung $\varkappa$ von $\mathfrak{C}^{(\varepsilon)}$ in P_1

$$\varkappa = \frac{d^2\gamma(0)}{d\xi^2} \geqq \frac{2}{h} > \frac{2}{a_2},$$

da $\frac{d\gamma(0)}{d\xi} = 0$ ist.

Bezeichnet man mit ε den Winkel, den die Flächennormalen in p und P_1 miteinander einschließen, nach der Voraussetzung (a) über E ist $\cos\varepsilon > \frac{1}{2}$, so liefert die Formel von Meusnier für die Krümmung $\varkappa_n$ des ebenen Normalschnittes von E in P_1, dessen Ebene die ξ-Achse enthält,

$$\varkappa_n = \varkappa \cos\varepsilon > \frac{2\cos\varepsilon}{a_2} > \frac{1}{a_2}.$$

Die daraus resultierende Ungleichung

$$\frac{1}{\varkappa_n} < a_2$$

widerspricht aber der Bedeutung von a_2.

16. Das Innere des von der geschlossenen Fläche $\bar{S}$ berandeten Gebietes werde mit $\bar{R}$ bezeichnet, wobei also $\bar{R}$ ganz dem Gebiete R angehört. Bildet man alsdann, um den Satz 6 zu beweisen, mit den auf $\bar{S}$ angenommenen Werten der partiellen Ableitungen $\frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}, \frac{\partial U}{\partial \zeta}$ für das Gebiet $\bar{R}$ Funktionen

$$\bar{u}(P; -1), \quad \bar{v}(P; -1), \quad \bar{w}(P; -1)$$

der Gestalt (87), so kann man dem Beweis des Satzes 4 entnehmen, daß in $\bar{R} + \bar{S}$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} \equiv \bar{u}(P; -1), \quad \frac{\partial U}{\partial \eta} \equiv \bar{v}(P; -1), \quad \frac{\partial U}{\partial \zeta} \equiv \bar{w}(P; -1)$$

sein muß.

Es gibt nun sicher eine positive Zahl b_1 derart, daß eine Kugel mit dem Radius b_1 um irgendeinen Punkt von E' von $\bar{S}$ keine anderen Punkte enthält als solche, die gleichzeitig E'' angehören (vgl. die entsprechende Definition von a_1). Versteht man dann unter R' das Teilgebiet von $\bar{R}$, welches aus allen Punkten von $\bar{R}$ besteht, deren Abstand von einem beliebigen Punkte von E' kleiner als $\frac{b_1}{4}$ ist, so soll gezeigt werden, daß die Funktionen

$$\bar{u}(P; -1), \quad \bar{v}(P; -1), \quad \bar{w}(P; -1)$$

für alle Punkte von $R' + E'$ einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten μ genügen, womit Satz 6 bewiesen wäre.

Dazu beachte man zunächst, daß man den Hilfssatz 3 von § 3 in der folgenden modifizierten Gestalt beweisen kann: Ist $f(p)$ auf $\bar{S}$ eine integrable Funktion, die auf dem in $\bar{S}$ enthaltenen regulären Flächenelement E'' (Hölder-Konstanten: A, λ) einer gleichmäßigen H-Bedingung (Hölder-Konstanten: B, μ) genügt, so gilt für alle Punkte p und q von einem ganz in E'' enthaltenen regulären Flächenelement E' eine der drei Abschätzungen

$$\left.\begin{matrix} |V(q) - V(p)| \\ |W(q) - W(p)| \end{matrix}\right\} \leqq \begin{cases} KABt^{1+\mu} \\ KABt \\ KABt|\log t| \end{cases},$$

je nachdem

$$\mu + \lambda < 1, \quad \mu + \lambda > 1, \quad \mu + \lambda = 1$$

ist.

Aus dem Beweise des Hilfssatzes 7 von § 4 ist dann aber zu ersehen, daß die Funktionen $\bar{F}(p; \varkappa)$, $\bar{G}(p; \varkappa)$, $\bar{H}(p; \varkappa)$, die dem zu der Berandung $\bar{S}$ gehörigen Integralgleichungssystem (75) genügen, auf E' eine H-Bedingung mit dem Exponenten μ erfüllen.

Als Modifikation von Hilfssatz 11 in § 3 kann man weiterhin zeigen, daß für eine auf $\bar{S}$ definierte integrable Belegungsfunktion $f(p)$, die auf E'' einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten μ genügt, die Integrale $V(P)$ und $W(P)$ in $R' + E'$ eine gleichmäßige H-Bedingung mit demselben Exponenten μ erfüllen. Bei dem Beweise, der sonst genau wie der Beweis von Hilfssatz 11 in § 3 verläuft, ist nur die dort vorkommende Zahl ϱ_0 durch b_1 zu ersetzen. Damit folgt aber, daß die durch (76) nach Ersatz von $u^*(P; \varkappa)$, $v^*(P; \varkappa)$, $w^*(P; \varkappa)$ durch $\bar{u}^*(P; \varkappa)$, $\bar{v}^*(P; \varkappa)$, $\bar{w}^*(P; \varkappa)$ und von $F(p; \varkappa)$, $G(p; \varkappa)$, $H(p; \varkappa)$ bzw. durch $\bar{F}(p; \varkappa)$, $\bar{G}(p; \varkappa)$, $\bar{H}(p; \varkappa)$ gegebenen Funktionen

$\bar{u}^*$, v^*, $\bar{w}^*$ in $R' + E'$ einer gleichmäßigen H-Bedingung genügen, so daß dasselbe schließlich auch von

$$\bar{u}(P; -1) = \frac{\bar{u}^*(P; -1)}{\overline{D^{(m)}}(-1)}, \quad \bar{v}(P; -1) = \frac{\bar{v}^*(P; -1)}{\overline{D^{(m)}}(-1)},$$
$$\bar{w}(P; -1) = \frac{w^*(P; -1)}{\overline{D^{(m)}}(-1)},$$

und zwar sowohl für $\overline{D^{(m)}}(-1) \neq 0$ als auch für $\overline{D^{(m)}}(-1) = 0$ gilt.

§ 5.

Das äußere Problem im Raume.

1. Für das äußere Problem im Raume besteht folgender Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Hauptsatz II. *Ist R_a das Außengebiet eines einfach zusammenhängenden, ganz im Endlichen gelegenen Gebietes R, dessen Berandung S den in § 1 genannten Voraussetzungen genügt, und besitzen die auf S definierten Funktionen ϱ, σ, τ dort partielle Ableitungen erster Ordnung, die einer gleichmäßigen H-Bedingung genügen, und sind sie die auf S angenommenen Werte der partiellen Ableitungen erster Ordnung einer in R_a zweimal stetig differenzierbaren Funktion $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$, deren erste partielle Ableitungen im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}}$ verschwinden, so gibt es (bis auf eine additive Konstante) genau eine in R_a biharmonische Funktion U, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in $R_a + S$ stetig sind, auf S bzw. mit ϱ, σ, τ übereinstimmen und im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}}$ verschwinden, während die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung dort wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ gegen Null gehen*[45]).

Dem Problem (62), (63) des vorigen Paragraphen entsprechend gehen wir jetzt von dem auf das Gebiet R_a und seine Berandung S bezüglichen Problem

$$(96) \quad \Delta u - \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = 0, \quad \Delta v - \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = 0, \quad \Delta w - \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} = 0, \quad \Delta \vartheta = 0,$$

$$(97) \quad [u]_S = \varrho, \quad [v]_S = \sigma, \quad [w]_S = \tau$$

aus und können dafür den folgenden Satz beweisen:

---

[45]) Die im Text angegebenen Eigenschaften von U im Unendlichen folgen auch bereits aus den schwächeren Forderungen, daß für $r_{OP} \to \infty$

$$\lim D^1 U = 0, \qquad \lim (r_{OP} D^2 U) = 0$$

sein soll, wie man an den auf das Gebiet R_a angewandten Formeln (20) unmittelbar erkennen kann — eine Bemerkung, die sich auch auf die folgenden Sätze 7, 8 und 10 sinngemäß übertragen läßt.

Satz 7. *Sind die Funktionen ϱ, σ, τ die auf S angenommenen Werte der partiellen Ableitungen einer in R_a zweimal stetig differenzierbaren Funktion $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$, deren erste partielle Ableitungen im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}}$ verschwinden, und gibt es ein Lösungssystem u, v, w des Problems* (96), (97), *das im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}}$ verschwindet, und dessen partielle Ableitungen erster Ordnung in $R_a + S$ stetig sind und im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ verschwinden, so existiert eine biharmonische Funktion U derart, daß*

$$u = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad w = \frac{\partial U}{\partial \zeta}$$

ist.

Bedeuten die Flächen S_n^a eine im Gebiet R_a gelegene Folge von gegen S konvergierenden Näherungsflächen, die man aus den früher definierten im Gebiet R gelegenen Flächen S_n durch die Transformation durch reziproke Radien gewinnt, und wird das von ihnen begrenzte Außengebiet mit R_n^a bezeichnet, so lege man dem Beweise, der sonst genau wie der von Satz 1 geführt wird, eine Integralformel der Gestalt (68) zugrunde, bei der aber das Flächenintegral über die Fläche S_n^a und die Raumintegrale über das Außengebiet R_n^a erstreckt werden.

Satz 7 sichert alsdann zusammen mit den beiden folgenden, in den nächsten Abschnitten zu beweisenden Sätzen die Existenz einer im Gebiet R_a biharmonischen Funktion mit den im Hauptsatz behaupteten Eigenschaften:

Satz 8. *Bei beliebig vorgegebenen auf S stetigen Funktionen ϱ, σ, τ hat das Problem* (96), (97) *stets ein System von Lösungsfunktionen u, v, w, die im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}}$ verschwinden, während ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung dort wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ gegen Null gehen.*

Satz 9. *Besitzen die Funktionen ϱ, σ, τ auf S überdies partielle Ableitungen erster Ordnung, die einer gleichmäßigen H-Bedingung genügen, so sind die nach Satz 8 existierenden Lösungsfunktionen in $R_a + S$ einmal stetig partiell differenzierbar.*

Hinsichtlich der Einzigkeit der Lösung können wir folgenden allgemeinen Satz beweisen:

Satz 10. *Werden die Funktionen ϱ, σ, τ auf S lediglich als stetig vorausgesetzt, so kann es (bis auf eine additive Konstante) höchstens eine in R biharmonische Funktion U geben, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in $R_a + S$ stetig sind, bei Annäherung an S bzw. gegen die Funktionen ϱ, σ, τ*

konvergieren und im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}}$ *verschwinden, während die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung dort wie* $\frac{1}{r_{OP}^2}$ *gegen Null gehen.*

2. Indem wir statt des Problems (96), (97) gleich das allgemeinere Problem

$$\Delta u + k\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi} = 0, \quad \Delta v + k\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta} = 0, \quad \Delta w + k\frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta} = 0, \quad \Delta\vartheta = 0, \tag{98}$$

$$[u]_S = \varrho, \quad [v]_S = \sigma, \quad [w]_S = \tau \tag{99}$$

betrachten, bei dem k ein Parameter ist, gehen wir von dem mit Hilfe der durch (71) gegebenen Kerne gebildeten Integralgleichungssystem

$$\begin{aligned}
f(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)}\{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)\,f(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)\,g(p';\varkappa) + \\
+ K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)\,h(p';\varkappa)\}\,d\sigma = \varrho(p),\\
g(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)}\{K_{\eta\xi}(p,p';\varkappa)\,f(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(p,p';\varkappa)\,g(p';\varkappa) + \\
+ K_{\eta\zeta}(p,p';\varkappa)\,h(p';\varkappa)\}\,d\sigma = \sigma(p),\\
h(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)}\{K_{\zeta\xi}(p,p';\varkappa)\,f(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(p,p';\varkappa)\,g(p';\varkappa) + \\
+ K_{\zeta\zeta}(p,p';\varkappa)\,h(p';\varkappa)\}\,d\sigma = \tau(p)
\end{aligned} \tag{100}$$

aus, bei dem wieder

$$\varkappa = \frac{k}{2+k} \quad (k \neq -2)$$

gesetzt ist. Das dazugehörige homogene Integralgleichungssystem

$$\begin{aligned}
f_1(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)}\{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)\,f_1(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)\,g_1(p';\varkappa) + \\
+ K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)\,h_1(p';\varkappa)\}\,d\sigma = 0,\\
g_1(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)}\{K_{\eta\xi}(p,p';\varkappa)\,f_1(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(p,p';\varkappa)\,g_1(p';\varkappa) + \\
+ K_{\eta\zeta}(p,p';\varkappa)\,h_1(p';\varkappa)\}\,d\sigma = 0,\\
h_1(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)}\{K_{\zeta\xi}(p,p';\varkappa)\,f_1(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(p,p';\varkappa)\,g_1(p';\varkappa) + \\
+ K_{\zeta\zeta}(p,p';\varkappa)\,h_1(p';\varkappa)\}\,d\sigma = 0
\end{aligned} \tag{101}$$

besitzt nun für alle $\varkappa$-Werte, wie unmittelbar aus (24) und (25) zu ersehen ist, die drei linear unabhängigen Lösungssysteme

$$\begin{aligned}
&f_{11} = a, \quad g_{11} = 0, \quad h_{11} = 0,\\
&f_{12} = 0, \quad g_{12} = b, \quad h_{12} = 0,\\
&f_{13} = 0, \quad g_{13} = 0, \quad h_{13} = c,
\end{aligned} \tag{102}$$

wenn a, b, c drei beliebige nichtverschwindende Konstanten sind. Schreibt man nunmehr das System (101) nach der im Abschnitt 4 von § 4 angegebenen Methode als eine einzige homogene Integralgleichung

$$f_1^*(p) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p, p'; \varkappa) f_1^*(p')\, d\sigma = 0,$$

wobei die Variablen auf der dort angegebenen Fläche $\mathfrak{S}$ variieren, so müssen also die mit Hilfe der m-ten Iterierten (m hinreichend groß und ungerade) des Kerns

$$\frac{1}{2\pi} K(p, q; \varkappa)$$

gebildeten Fredholmschen Unterdeterminanten von niederer als der dritten Ordnung identisch in $\varkappa$ und ihren auf $\mathfrak{S}$ variierenden Variablen verschwinden. Wir behaupten aber, daß es für $\varkappa = 0$ (d. h. $k = 0$) eine Unterdeterminante dritter Ordnung geben muß, die ungleich Null ist, so daß also bei geeigneten auf $\mathfrak{S}$ gelegenen Punkten p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3

$$D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3 \end{pmatrix}; 0\Big) \neq 0 \tag{103}$$

gilt.

Denn wäre (103) nicht erfüllt, so müßte das aus (101) für $\varkappa = 0$ hervorgehende Integralgleichungssystem

$$f_1(p) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} f_1(p')\, d\sigma = 0,$$

$$g_1(p) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} g_1(p')\, d\sigma = 0,$$

$$h_1(p) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} h_1(p')\, d\sigma = 0$$

auch nach m-facher Iteration mehr als drei linear unabhängige Lösungssysteme besitzen. Dann wäre das aber auch der Fall für das System

$$f_1(p) - \frac{\eta u}{2\pi}\iint_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_p^2} f_1(p')\, d\sigma = 0,$$

$$g_1(p) - \frac{\eta u}{2\pi}\iint_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} g_1(p')\, d\sigma = 0,$$

$$h_1(p) - \frac{\eta u}{2\pi}\iint_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} h_1(p')\, d\sigma = 0,$$

wobei η_μ eine geeignet zu wählende m-te Einheitswurzel ($\eta_\mu^m = 1$) ist. Bereits im Abschnitt 4 von § 4 wurde aber erwähnt, daß für dieses System überhaupt nur dann nicht identisch verschwindende Lösungen existieren, wenn $\eta_\mu = 1$ ist. Dann besitzt es aber, wie in der Potentialtheorie bei der Behandlung des äußeren Problems bewiesen wird[46]), auch nur die drei in (102) angegebenen linear unabhängigen Lösungssysteme, so daß tatsächlich (103) zutrifft.

3. Die in $\varkappa$ ganze transzendente Funktion

$$D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa\Big) \tag{104}$$

kann also nur für in der komplexen $\varkappa$-Ebene diskret gelegene $\varkappa$-Werte verschwinden. Für $\varkappa$-Werte, für die die Determinante (104) nicht verschwindet. geben alsdann nach einem Ergebnis der FREDHOLMschen Theorie die Determinanten

$$\begin{gathered} f_{21}^*(p;\varkappa) = D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ p\;\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa\Big), \quad f_{22}^*(p;\varkappa) = D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, p\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa\Big), \\ f_{23}^*(p;\varkappa) = D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, p \end{pmatrix}; \varkappa\Big) \end{gathered} \tag{105}$$

drei linear unabhängige Lösungssysteme des m-fach iterierten zu (101) assoziierten Integralgleichungssystems

$$\begin{aligned} f_2(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p',p;\varkappa)\, f_2(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(p',p;\varkappa)\, g_2(p';\varkappa) + \\ + K_{\xi\zeta}(p',p;\varkappa)\, h_2(p';\varkappa)\}\, d\sigma = 0, \\ g_2(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p',p;\varkappa)\, f_2(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(p',p;\varkappa)\, g_2(p';\varkappa) + \\ + K_{\eta\zeta}(p',p;\varkappa)\, h_2(p';\varkappa)\}\, d\sigma = 0, \\ h_2(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \{K_{\zeta\xi}(p',p;\varkappa)\, f_2(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(p',p;\varkappa)\, g_2(p';\varkappa) + \\ + K_{\zeta\zeta}(p',p;\varkappa)\, h_2(p';\varkappa)\}\, d\sigma = 0 \end{aligned} \tag{106}$$

und damit auch von (106) selbst, da (106) mindestens drei linear unabhängige Lösungen hat. Diese durch (105) gegebenen Lösungen von (106) seien mit

$$\begin{matrix} f_{21}(p;\varkappa), & g_{21}(p;\varkappa), & h_{21}(p;\varkappa), \\ f_{22}(p;\varkappa), & g_{22}(p;\varkappa), & h_{22}(p;\varkappa), \\ f_{23}(p;\varkappa), & g_{23}(p;\varkappa), & h_{23}(p;\varkappa) \end{matrix} \tag{107}$$

---

[46]) Vgl. etwa W. STERNBERG, Potentialtheorie II, Berlin und Leipzig 1926, insbes. S. 108. Die dortigen Schlüsse gelten auch bei unseren Voraussetzungen über die Berandung.

bezeichnet. Für die betrachteten $\varkappa$-Werte lauten dann die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer Lösung der inhomogenen Gleichungen (100)

$$\begin{aligned}
&\iint_{(S)} \{f_{21}(p';\varkappa)\,\varrho(p') + g_{21}(p';\varkappa)\,\sigma(p') + h_{21}(p';\varkappa)\,\tau(p')\}\,d\sigma = 0,\\
&\iint_{(S)} \{f_{22}(p';\varkappa)\,\varrho(p') + g_{22}(p';\varkappa)\,\sigma(p') + h_{22}(p';\varkappa)\,\tau(p')\}\,d\sigma = 0,\\
&\iint_{(S)} \{f_{23}(p';\varkappa)\,\varrho(p') + g_{23}(p';\varkappa)\,\sigma(p') + h_{23}(p';\varkappa)\,\tau(p')\}\,d\sigma = 0,
\end{aligned} \tag{108}$$

die, wenn sie überhaupt erfüllt sind, natürlich identisch in $\varkappa$ gelten, da die Funktionen (107) in $\varkappa$ ganz transzendent sind.

Nehmen wir nunmehr zunächst an, daß die gegebenen Randfunktionen $\varrho(p)$, $\sigma(p)$, $\tau(p)$ auf S stetig sind und diese Bedingungen für alle $\varkappa$ erfüllen, so kann für $\varkappa$-Werte, für die die Determinante (104) nicht verschwindet, eine Lösung von (100) in der Form

$$f(p;\varkappa) = \frac{F(p;\varkappa)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1\,p_2\,p_3\\ q_1\,q_2\,q_3\end{matrix};\varkappa\right)},\qquad g(p;\varkappa) = \frac{G(p;\varkappa)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1\,p_2\,p_3\\ q_1\,q_2\,q_3\end{matrix};\varkappa\right)},$$

$$h(p;\varkappa) = \frac{H(p;\varkappa)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1\,p_2\,p_3\\ q_1\,q_2\,q_3\end{matrix};\varkappa\right)}$$

angegeben werden, wobei die jeweils im Zähler stehenden Funktionen in $\varkappa$ ganz transzendent sind und den Integralgleichungen

$$\begin{aligned}
&F(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)\,F(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)\,G(p';\varkappa) +\\
&\qquad + K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)\,H(p';\varkappa)\}\,d\sigma = D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1\,p_2\,p_3\\ q_1\,q_2\,q_3\end{matrix};\varkappa\right)\varrho(p),\\
&G(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p,p';\varkappa)\,F(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(p,p';\varkappa)\,G(p';\varkappa) +\\
&\qquad + K_{\eta\zeta}(p,p';\varkappa)\,H(p';\varkappa)\}\,d\sigma = D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1\,p_2\,p_3\\ q_1\,q_2\,q_3\end{matrix};\varkappa\right)\sigma(p),\\
&H(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\zeta\xi}(p,p';\varkappa)\,F(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(p,p';\varkappa)\,G(p';\varkappa) +\\
&\qquad + K_{\zeta\zeta}(p,p';\varkappa)\,H(p';\varkappa)\}\,d\sigma = D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1\,p_2\,p_3\\ q_1\,q_2\,q_3\end{matrix};\varkappa\right)\tau(p)
\end{aligned} \tag{109}$$

genügen.

Bildet man nämlich für den Kern $\frac{1}{2\pi}K(p,q;\varkappa)$ die Fredholmsche Unterdeterminante

$$D^{(m)}\left(\begin{matrix}p\,p_1\,p_2\,p_3\\ q\,q_1\,q_2\,q_3\end{matrix};\varkappa\right),$$

für die bekanntlich die Relation

$$(110)\quad \frac{D^{(m)}\begin{pmatrix} p\, p_1\, p_2\, p_3 \\ q\, q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa\Big)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa\Big)} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m K^{(m)}(p, q; \varkappa) -$$

$$- \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m K^{(m)}(p, q_1; \varkappa) \frac{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa\Big)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa\Big)} +$$

$$+ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m K^{(m)}(p, q_2; \varkappa) \frac{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q\, q_1\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa\Big)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa\Big)} -$$

$$- \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m K^{(m)}(p, q_3; \varkappa) \frac{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q\, q_1\, q_2 \end{pmatrix}; \varkappa\Big)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa\Big)} +$$

$$+ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int\int_{(\mathfrak{S})} K^{(m)}(p, p'; \varkappa) \frac{D^{(m)}\begin{pmatrix} p'\, p_1\, p_2\, p_3 \\ q\, q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa\Big)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa\Big)}\, d\sigma$$

besteht[47]), und setzt man

$$(111)\quad \Omega(p, q; \varkappa) = \frac{1}{2\pi} K(p, q; \varkappa) + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 K^{(2)}(p, q; \varkappa) + \cdots + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m K^{(m)}(p, q; \varkappa),$$

$$(112)\quad \Gamma^{(m)}(p, q; \varkappa) = \frac{D^{(m)}\begin{pmatrix} p\, p_1\, p_2\, p_3 \\ q\, q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa\Big)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa\Big)},$$

$$(113)\quad \Gamma(p, q; \varkappa) = \Omega(p, q; \varkappa) + \int\int_{(\mathfrak{S})} \Omega(p, p'; \varkappa)\, \Gamma^{(m)}(p', q; \varkappa)\, d\sigma,$$

so stellt die Funktion

$$(114)\quad f^*(p; \varkappa) = \varrho^*(p) + \int\int_{(\mathfrak{S})} \Gamma(p, p'; \varkappa)\, \varrho^*(p')\, d\sigma$$

eine Lösung der zu dem System (100) äquivalenten Integralgleichung

$$(115)\quad f^*(p; \varkappa) - \frac{1}{2\pi} \int\int_{(\mathfrak{S})} K(p, p'; \varkappa)\, f^*(p'; \varkappa)\, d\sigma = \varrho^*(p)$$

dar.

---

[47]) Vgl. E. GOURSAT, l. c., Anm. [35]), insbes. S. 376.

Beweis. Es ist zunächst

$$(116)\qquad \Omega(p,q;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)\,\Omega(p',q;\varkappa)\,d\sigma$$

$$= \frac{1}{2\pi}K(p,q;\varkappa) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)\,K^{(m)}(p',q;\varkappa)\,d\sigma.$$

Setzt man nun

$$\Psi(p,q;\varkappa) = \Gamma(p,q;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)\,\Gamma(p',q;\varkappa)d\sigma$$

$$= \Omega(p,q;\varkappa) + \iint_{(\mathfrak{S})}\Omega(p,p';\varkappa)\,\Gamma^{(m)}(p',q;\varkappa)\,d\sigma -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)\,\Omega(p,p';\varkappa)\,d\sigma -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{S})}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)\,\Omega(p',p'';\varkappa)\,\Gamma^{(m)}(p'',q;\varkappa)\,d\sigma_{p'}\,d\sigma_{p''},$$

so wird bei Zusammenfassung des ersten und dritten Summanden gemäß (116)

$$\Psi(p,q;\varkappa) = \frac{1}{2\pi}K(p,q;\varkappa) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)\,K^{(m)}(p',q;\varkappa)\,d\sigma +$$

$$+ \iint_{(\mathfrak{S})}\Omega(p,p';\varkappa)\,\Gamma^{(m)}(p',q;\varkappa)\,d\sigma -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{S})}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)\,\Omega(p',p'';\varkappa)\,\Gamma^{(m)}(p'',q;\varkappa)\,d\sigma_{p'}\,d\sigma_{p''}.$$

Daraus folgt aber ebenfalls bei Beachtung von (116)

$$\Psi(p,q;\varkappa) = \frac{1}{2\pi}K(p,q;\varkappa) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)\,K^{(m)}(p',q;\varkappa)\,d\sigma +$$

$$+ \iint_{(\mathfrak{S})}\left\{\frac{1}{2\pi}K(p,p';\varkappa) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p'';\varkappa)\,K^{(m)}(p'',p')d\sigma_{p''}\right\}\Gamma^{(m)}(p',q;\varkappa)d\sigma_{p'}$$

$$= \frac{1}{2\pi}K(p,q;\varkappa) + \frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)\left\{\Gamma^{(m)}(p',q;\varkappa) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m} K^{(m)}(p',q;\varkappa) -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m}\iint_{(\mathfrak{S})} K^{(m)}(p',p'';\varkappa)\,\Gamma^{(m)}(p'',q;\varkappa)\,d\sigma_{p''}\right\} d\sigma_{p'}.$$

Wegen (112), (110) und (105) erhält man alsdann

$$(117)\quad \Psi'(p,q;\varkappa) = \Gamma(p,q;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)\,\Gamma(p',q;\varkappa)\,d\sigma$$

$$= \frac{1}{2\pi}K(p,q;\varkappa) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1}\frac{f^*_{21}(q;\varkappa)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1p_2p_3\\q_1q_2q_3\end{matrix};\varkappa\right)}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)K^{(m)}(p',q_1;\varkappa)\,d\sigma +$$

$$+\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1}\frac{f^*_{22}(q;\varkappa)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1p_2p_3\\q_1q_2q_3\end{matrix};\varkappa\right)}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)\,K^{(m)}(p',q_2;\varkappa)\,d\sigma -$$

$$-\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1}\frac{f^*_{23}(q;\varkappa)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1p_2p_3\\q_1q_2q_3\end{matrix};\varkappa\right)}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)\,K^{(m)}(p',q_3;\varkappa)\,d\sigma$$

$$= \frac{1}{2\pi}K(p,q;\varkappa) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1} f^*_{21}(q;\varkappa)\frac{K^{(m+1)}(p,q_1;\varkappa)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1p_2p_3\\q_1q_2q_3\end{matrix};\varkappa\right)} +$$

$$+\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1} f^*_{22}(q;\varkappa)\frac{K^{(m+1)}(p,q_2;\varkappa)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1p_2p_3\\q_1q_2q_3\end{matrix};\varkappa\right)} - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1} f^*_{23}(q;\varkappa)\frac{K^{(m+1)}(p,q_3;\varkappa)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1p_2p_3\\q_1q_2q_3\end{matrix};\varkappa\right)}.$$

Für die durch (114) gegebene Funktion ist nun

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)f^*(p';\varkappa)d\sigma = \frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)\,\varrho^*(p')d\sigma +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{S})}\varrho^*(p')\left\{\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p'';\varkappa)\,\Gamma(p'',p';\varkappa)d\sigma_{p''}\right\}d\sigma_{p'},$$

oder mit (117)

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)f^*(p';\varkappa)d\sigma = \frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)\,\varrho^*(p')d\sigma +$$

$$+\iint_{(\mathfrak{S})}\varrho^*(p')\Big|\Gamma(p,p';\varkappa) - \frac{1}{2\pi}K(p,p';\varkappa) + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1}\frac{K^{(m+1)}(p,q_1;\varkappa)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1p_2p_3\\q_1q_2q_3\end{matrix};\varkappa\right)}f^*_{21}(p';\varkappa) -$$

$$-\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1}\frac{K^{(m+1)}(p,q_2;\varkappa)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1p_2p_3\\q_1q_2q_3\end{matrix};\varkappa\right)}f^*_{22}(p';\varkappa) + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1}\frac{K^{(m+1)}(p,q_3;\varkappa)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1p_2p_3\\q_1q_2q_3\end{matrix};\varkappa\right)}f^*_{23}(p';\varkappa)\Big|\,d\sigma$$

$$= \iint_{(\mathfrak{S})}\Gamma(p,p';\varkappa)\,\varrho^*(p')d\sigma +$$

$$+\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1}\frac{K^{(m+1)}(p,q_1;\varkappa)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1p_2p_3\\q_1q_2q_3\end{matrix};\varkappa\right)}\iint_{(\mathfrak{S})}\varrho^*(p')f^*_{21}(p';\varkappa)d\sigma -$$

$$-\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1}\frac{K^{(m+1)}(p,q_2;\varkappa)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1p_2p_3\\q_1q_2q_3\end{matrix};\varkappa\right)}\iint_{(\mathfrak{S})}\varrho^*(p')f^*_{22}(p';\varkappa)d\sigma +$$

$$+\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1}\frac{K^{(m+1)}(p,q_3;\varkappa)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1p_2p_3\\q_1q_2q_3\end{matrix};\varkappa\right)}\iint_{(\mathfrak{S})}\varrho^*(p')f^*_{23}(p';\varkappa)d\sigma.$$

Wegen (108) muß dann aber einfach

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p, p'; \varkappa) f^*(p'; \varkappa)\, d\sigma = \iint_{(\mathfrak{S})} \Gamma(p, p'; \varkappa)\, \varrho^*(p')\, d\sigma,$$

oder wegen (114)

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p, p'; \varkappa) f^*(p'; \varkappa) d\sigma = f^*(p; \varkappa) - \varrho^*(p)$$

sein, womit die Behauptung bewiesen ist.

4. Mit wörtlich den gleichen Methoden, die bei der Behandlung des inneren räumlichen Problems benutzt wurden, kann man zeigen, daß die Funktionen

$$(118) \qquad u(P; \varkappa) = \frac{u^*(P; \varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3 \end{pmatrix}}, \quad v(P; \varkappa) = \frac{v^*(P; \varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3 \end{pmatrix}},$$

$$w(P; \varkappa) = \frac{w^*(P; \varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3 \end{pmatrix}}$$

mit

$$u^*(P; \varkappa) = \frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{S})} \{K_{\xi\xi}(P, p'; \varkappa) F(p'; \varkappa) + K_{\xi\eta}(P, p'; \varkappa) G(p'; \varkappa) + K_{\xi\zeta}(P, p'; \varkappa) H(p'; \varkappa)\} d\sigma,$$

$$v^*(P; \varkappa) = \frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{S})} \{K_{\eta\xi}(P, p'; \varkappa) F(p'; \varkappa) + K_{\eta\eta}(P; p'; \varkappa) G(p'; \varkappa) + K_{\eta\zeta}(P, p'; \varkappa) H(p'; \varkappa)\} d\sigma,$$

$$w^*(P; \varkappa) = \frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{S})} \{K_{\zeta\xi}(P, p'; \varkappa) F(p'; \varkappa) + K_{\zeta\eta}(P, p'; \varkappa) G(p'; \varkappa) + K_{\zeta\zeta}(P, p'; \varkappa) H(p'; \varkappa)\} d\sigma$$

für $\varkappa = k = -1$, auch wenn die in ihnen vorkommende Nennerdeterminante dort verschwindet, das Problem (98), (99) lösen, womit also der Satz 8 für Funktionen ϱ, σ, τ, die für alle $\varkappa$ den Bedingungen (108) genügen, bewiesen ist[48]).

---

[48]) Die bei der Lösung des inneren Problems herangezogene GREENsche Formel (86) läßt sich hier beim äußeren Problem sinngemäß in der Form

$$\iiint_{(R_n^a)} (\Delta U^*)^2\, d\tau = \iint_{(S_n^a)} \left\{U^* \frac{\partial \Delta U^*}{\partial n} - \Delta U^* \frac{\partial U^*}{\partial n}\right\} d\sigma$$

benutzen, wo U^* durch

$$u^*(P; -1) = \frac{\partial U^*}{\partial \xi}, \quad v^*(P; -1) = \frac{\partial U^*}{\partial \eta}, \quad w^*(P; -1) = \frac{\partial U^*}{\partial \zeta}$$

gegeben ist, wenn auf S die Gleichungen

$$[u^*(P; -1)]_S = 0, \quad [v^*(P; -1)]_S = 0, \quad [w^*(P; -1)]_S = 0$$

bestehen, da ja im Unendlichen U^* sich beschränkt verhält, $\frac{\partial U^*}{\partial n}$ wie $\frac{1}{r_{0P}}$, ΔU^* wie $\frac{1}{r_{0P}^3}$ und $\frac{\partial \Delta U^*}{\partial n}$ wie $\frac{1}{r_{0P}^3}$ verschwindet.

5. Erfüllen aber die gegebenen Funktionen ϱ, σ, τ für alle $\varkappa$-Werte nicht die Bedingungen (108), so bilde man unter Benutzung der drei Lösungssysteme

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1+k}{2+k}\frac{1}{r_{OP}} - \frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial \xi^2} = \frac{1}{2r_{OP}} + \varkappa\left\{\frac{1}{2r_{OP}} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial \xi^2}\right\},\\
v_1 &= -\frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial \eta\,\partial \xi} = -\frac{\varkappa}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial \xi\,\partial \eta},\\
w_1 &= -\frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial \xi\,\partial \zeta} = -\frac{\varkappa}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial \xi\,\partial \zeta},\\
u_2 &= -\frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial \eta\,\partial \xi} = -\frac{\varkappa}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial \eta\,\partial \xi},\\
v_2 &= \frac{1+k}{2+k}\frac{1}{r_{OP}} - \frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial \eta^2} = \frac{1}{2r_{OP}} + \varkappa\left\{\frac{1}{2r_{OP}} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial \eta^2}\right\},\\
w_2 &= -\frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial \eta\,\partial \zeta} = -\frac{\varkappa}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial \eta\,\partial \zeta},\\
u_3 &= -\frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial \zeta\,\partial \xi} = -\frac{\varkappa}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial \zeta\,\partial \xi},\\
v_3 &= -\frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial \zeta\,\partial \eta} = -\frac{\varkappa}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial \zeta\,\partial \eta},\\
w_3 &= \frac{1+k}{2+k}\frac{1}{r_{OP}} - \frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{2r_{OP}} + \varkappa\left\{\frac{1}{2r_{OP}} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial \zeta^2}\right\}
\end{aligned}
\tag{119}
$$

von (98), bei denen r_{OP} der Abstand des nach Annahme im Gebiet R gelegenen Koordinatenursprungs O des-ξ, η, ζ-Systems von dem im Gebiet R_a liegenden Aufpunkt P ist, die neuen Randfunktionen

$$
\begin{aligned}
\bar{\varrho} &= \varrho - l_1[u_1]_S - l_2[u_2]_S - l_3[u_3]_S,\\
\bar{\sigma} &= \sigma - l_1[v_1]_S - l_2[v_2]_S - l_3[v_3]_S,\\
\bar{\tau} &= \tau - l_1[w_1]_S - l_2[w_2]_S - l_3[w_3]_S.
\end{aligned}
\tag{120}
$$

Setzt man sie in (108) statt ϱ, σ, τ ein, so ergibt sich zur Bestimmung der l_1, l_2, l_3 ein System von drei linearen inhomogenen Gleichungen, von dessen dreireihiger Koeffizientendeterminante $\Delta(\varkappa)$, die ja eine ganze transzendente Funktion in $\varkappa$ ist, wir in den nächsten Abschnitten zeigen werden, daß sie nicht identisch verschwindet.

Für alle Werte von $\varkappa$, für die weder die Fredholmsche Determinante (104) noch $\Delta(\varkappa)$ verschwindet, läßt sich eine Lösung der inhomogenen Integralgleichungen

$$\bar{f}(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)\bar{f}(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)\bar{g}(p';\varkappa) + K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)\bar{h}(p';\varkappa)\}\,d\sigma = \bar{\varrho}(p),$$

$$\bar{g}(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p,p';\varkappa)\bar{f}(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(p,p';\varkappa)\bar{g}(p';\varkappa) + K_{\eta\zeta}(p,p';\varkappa)\bar{h}(p';\varkappa)\}\,d\sigma = \bar{\sigma}(p),$$

$$\bar{h}(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\zeta\xi}(p,p';\varkappa)\bar{f}(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(p,p';\varkappa)\bar{g}(p';\varkappa) + K_{\zeta\zeta}(p,p';\varkappa)\bar{h}(p';\varkappa)\}\,d\sigma = \bar{\tau}(p)$$

in der Form

$$\bar{f}(p;\varkappa) = \frac{\overline{F}(p;\varkappa)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1 p_2 p_3\\ q_1 q_2 q_3\end{matrix};\varkappa\right)\Delta(\varkappa)}, \quad \bar{g}(p;\varkappa) = \frac{\overline{G}(p;\varkappa)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1 p_2 p_3\\ q_1 q_2 q_3\end{matrix},\varkappa\right)\Delta(\varkappa)},$$

$$\bar{h}(p;\varkappa) = \frac{\overline{H}(p;\varkappa)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1 p_2 p_3\\ q_1 q_2 q_3\end{matrix};\varkappa\right)\Delta(\varkappa)}$$

angeben, wobei wieder die jeweils im Zähler stehenden Funktionen in $\varkappa$ ganz transzendent sind und den Integralgleichungen

$$\overline{F}(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)\,\overline{F}(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)\,\overline{G}(p';\varkappa) + K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)\,\overline{H}(p';\varkappa)\}\,d\sigma = D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1 p_2 p_3\\ q_1 q_2 q_3\end{matrix};\varkappa\right)\Delta(\varkappa)\,\bar{\varrho}(p),$$

$$\overline{G}(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p,p';\varkappa)\,\overline{F}(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(p,p';\varkappa)\,\overline{G}(p';\varkappa) + K_{\eta\zeta}(p,p';\varkappa)\,\overline{H}(p';\varkappa)\}\,d\sigma = D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1 p_2 p_3\\ q_1 q_2 q_3\end{matrix};\varkappa\right)\Delta(\varkappa)\,\bar{\sigma}(p), \tag{121}$$

$$\overline{H}(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\zeta\xi}(p,p';\varkappa)\,\overline{F}(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(p,p';\varkappa)\,\overline{G}(p';\varkappa) + K_{\zeta\zeta}(p,p';\varkappa)\,\overline{H}(p';\varkappa)\}\,d\sigma = D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1 p_2 p_3\\ q_1 q_2 q_3\end{matrix};\varkappa\right)\Delta(\varkappa)\,\bar{\tau}(p)$$

genügen.

Mit den beim inneren Problem benutzten Methoden kann alsdann gezeigt werden, daß die Funktionen

$$u(P;\varkappa) = \frac{\bar{u}^*(P;\varkappa) + D^{(m)}\binom{p_1 p_2 p_3}{q_1 q_2 q_3};\varkappa\Big)\,\Delta(\varkappa)\{l_1(\varkappa)u_1(P;\varkappa) + l_2(\varkappa)u_2(P;\varkappa) + l_3(\varkappa)u_3(P;\varkappa)\}}{D^{(m)}\binom{p_1 p_2 p_3}{q_1 q_2 q_3};\varkappa\Big)\,\Delta(\varkappa)},$$

$$v(P;\varkappa) = \frac{\bar{v}^*(P;\varkappa) + D^{(m)}\binom{p_1 p_2 p_3}{q_1 q_2 q_3};\varkappa\Big)\,\Delta(\varkappa)\{l_1(\varkappa)v_1(P;\varkappa) + l_2(\varkappa)v_2(P;\varkappa) + l_3(\varkappa)v_3(P;\varkappa)\}}{D^{(m)}\binom{p_1 p_2 p_3}{q_1 q_2 q_3};\varkappa\Big)\,\Delta(\varkappa)}, \tag{122}$$

$$w(P;\varkappa) = \frac{\bar{w}^*(P;\varkappa) + D^{(m)}\binom{p_1 p_2 p_3}{q_1 q_2 q_3};\varkappa\Big)\,\Delta(\varkappa)\{l_1(\varkappa)w_1(P;\varkappa) + l_2(\varkappa)w_2(P;\varkappa) + l_3(\varkappa)w_3(P;\varkappa)\}}{D^{(m)}\binom{p_1 p_2 p_3}{q_1 q_2 q_3};\varkappa\Big)\,\Delta(\varkappa)}$$

mit

$$\bar{u}^*(P;\varkappa) = \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)}\{K_{\xi\xi}(P,p';\varkappa)\,\bar{F}(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(P,p';\varkappa)\,\bar{G}(p';\varkappa) + K_{\xi\zeta}(P,p';\varkappa)\,\bar{H}(p';\varkappa)\}\,d\sigma,$$

$$\bar{v}^*(P;\varkappa) = \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)}\{K_{\eta\xi}(P,p';\varkappa)\,\bar{F}(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(P,p';\varkappa)\,\bar{G}(p';\varkappa) + K_{\eta\zeta}(P,p';\varkappa)\,\bar{H}(p';\varkappa)\}\,d\sigma, \tag{123}$$

$$\bar{w}^*(P;\varkappa) = \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)}\{K_{\zeta\xi}(P,p';\varkappa)\,\bar{F}(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(P,p';\varkappa)\,\bar{G}(p';\varkappa) + K_{\zeta\zeta}(P,p';\varkappa)\,\bar{H}(p';\varkappa)\}\,d\sigma,$$

die für $\varkappa$-Werte, für welche die Determinanten (104) und $\Delta(\varkappa)$ nicht verschwinden, offenbar den Gleichungen (98) genügen, und deren Randwerte für solche $\varkappa$-Werte $\varrho(p)$, $\sigma(p)$ und $\tau(p)$ sind, stets in einer gewissen Umgebung der Stelle $\varkappa = k = -1$ regulär analytisch in $\varkappa$ sind. Bei dem Beweise beachte man, daß hier als Analogon zu (78) für die Randwerte der Zählerfunktionen in (122)

$$\bar{u}^*(p;\varkappa) + D^{(m)}\binom{p_1 p_2 p_3}{q_1 q_2 q_3};\varkappa\Big)\,\Delta(\varkappa)\{l_1(\varkappa)u_1(p;\varkappa) + l_2(\varkappa)u_2(p;\varkappa) + l_3(\varkappa)u_3(p;\varkappa)\} = D^{(m)}\binom{p_1 p_2 p_3}{q_1 q_2 q_3};\varkappa\Big)\,\Delta(\varkappa)\,\varrho(p)$$

und für die Randwerte ihrer partiellen Ableitungen nach $\varkappa$ als Analogon zu (82)

$$\lim_{P_n^a \to p} \frac{\partial^i}{\partial \varkappa^i}\Big[\bar{u}^*(P_n^a;\varkappa) + D^{(m)}\binom{p_1 p_2 p_3}{q_1 q_2 q_3}, \varkappa\Big) \Delta(\varkappa)\{l_1(\varkappa)u_1(P_n^a;\varkappa) + l_2(\varkappa)u_2(P_n^a;\varkappa) + l_3(\varkappa)u_3(P_n^a;\varkappa)\}\Big]$$

$$= \frac{\partial^i}{\partial \varkappa^i}\Big[D^{(m)}\binom{p_1 p_2 p_3}{q_1 q_2 q_3};\varkappa\Big) \Delta(\varkappa)\bar{\varrho}(p;\varkappa)\Big] +$$

$$+ \frac{\partial^i}{\partial \varkappa^i}\Big[D^{(m)}\binom{p_1 p_2 p_3}{q_1 q_2 q_3};\varkappa\Big) \Delta(\varkappa)\{l_1(\varkappa)u_1(p;\varkappa) + l_2(\varkappa)u_2(p;\varkappa) + l_3(\varkappa)u_3(p;\varkappa)\}\Big]$$

$$= \frac{\partial^i}{\partial \varkappa^i}\Big[D^{(m)}\binom{p_1 p_2 p_3}{q_1 q_2 q_3};\varkappa\Big) \Delta(\varkappa)\varrho(p)\Big] = \frac{\partial^i D^{(m)}\binom{p_1 p_2 p_3}{q_1 q_2 q_3};\varkappa\Big) \Delta(\varkappa)}{\partial \varkappa^i}\varrho(p)$$

und Entsprechendes für die Zählerfunktionen von $v(P;\varkappa)$ und $w(P;\varkappa)$ gilt.

Schreibt man aber

$$u(P;-1) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{u(P;\varkappa)}{\varkappa+1}d\varkappa, \quad v(P;-1) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{v(P;-1)}{\varkappa+1}d\varkappa,$$

(124)

$$w(P;-1) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{w(P;-1)}{\varkappa+1}d\varkappa,$$

wobei die Integrale über einen in der $\varkappa$-Ebene gelegenen Kreis mit dem Mittelpunkt $\varkappa = -1$ erstreckt werden, der so gewählt ist, daß in seinem Innern und auf seinem Rande eventuell mit Ausnahme des Punktes $\varkappa = -1$ keine Nullstelle von $D^{(m)}(\varkappa)$ mit $\Delta(\varkappa)$ liegt, so folgt

$$u(p;-1) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\varrho(p)}{\varkappa+1}d\varkappa = \varrho(p), \quad v(p;-1) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\sigma(p)}{\varkappa+1}d\varkappa = \sigma(p),$$

$$w(p;-1) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\tau(p)}{\varkappa+1}d\varkappa = \tau(p),$$

und man erkennt, daß die Funktionen

$$u(P;-1), \quad v(P;-1), \quad w(P;-1)$$

das Problem (96), (97) lösen, womit Satz 8 bewiesen ist. Die Behauptungen von Satz 9 und 10 lassen sich dann unmittelbar mit den beim inneren Problem benutzten Methoden unter Verwendung von (124) bestätigen[49]).

[49]) Man beachte dabei, daß die partiellen Ableitungen dritter Ordnung von U im Unendlichen wie $\frac{1}{r^3(p)}$ verschwinden, wie unmittelbar aus (30) zu erkennen ist.

6. Es ist noch der Beweis der Tatsache nachzutragen, daß $\Delta(\varkappa)$ nicht identisch in $\varkappa$ verschwinden kann. Wir werden dazu in mehreren Schritten den Hilfssatz beweisen: *Es gilt* $\Delta(0) \neq 0$.

Ist $f_2(p)$, $g_2(p)$, $h_2(p)$ eine beliebige nicht identisch verschwindende Lösung des Systems (106) für $\varkappa = k = 0$, d. h. liegen drei nicht sämtlich identisch verschwindende Funktionen vor, die den Integralgleichungen

$$
\begin{aligned}
f_2(p) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_p)}{r^2_{p'p}} f_2(p')\,d\sigma &= 0,\\
g_2(p) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_p)}{r^2_{p'p}} g_2(p')\,d\sigma &= 0,\\
h_2(p) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_p)}{r^2_{p'p}} h_2(p')\,d\sigma &= 0
\end{aligned}
\tag{125}
$$

genügen, so wird behauptet, daß die mit ihnen gebildeten Potentiale der einfachen Schicht

$$
\begin{aligned}
u'(P) &= \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \frac{1}{r_{p'P}} f_2(p')\,d\sigma, \quad v'(P) = \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \frac{1}{r_{p'P}} g_2(p')\,d\sigma,\\
w'(P) &= \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \frac{1}{r_{p'P}} h_2(p')\,d\sigma,
\end{aligned}
\tag{126}
$$

die ja bekanntlich im ganzen Raume stetig sind, in R durchweg konstant sein müssen. Es genügt, den Beweis für $u'(P)$ zu führen.

Wir gehen von der für eine beliebige Funktion $u'(P)$, für die in R die Potentialgleichung $\Delta u' = 0$ erfüllt ist, gültigen Integralformel

$$
\iiint_{(R)} \left\{\left(\frac{\partial u'}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial \zeta}\right)^2\right\} d\tau + \iint_{(S)} [u']_S \left[\frac{\partial u'}{\partial n_{p'}}\right]_S d\sigma = 0 \tag{127}
$$

aus, bei der vorausgesetzt wird, daß das in ihr vorkommende Flächenintegral $\iint_{(S)}$ als $\lim_{n\to\infty} \iint_{(S_n)}$ existiert. Die Gleichung (127) gilt offenbar auch für das Außengebiet R_a, wenn dort $\Delta u' = 0$ ist, und u' im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}}$ verschwindet, während die partiellen Ableitungen erster Ordnung dort wie $\frac{1}{r^2_{OP}}$ gegen Null gehen.

7. Ist nun P_n^i bzw. P_n^a eine in R bzw. in R_a gelegene Punktfolge, die längs n_p gegen p konvergiert, so bestehen für die durch (126) gegebene Funktion $u'(P)$

nach einem bekannten Satz der Potentialtheorie, der auch bei unseren Voraussetzungen über S zutrifft[50]), die Limesrelationen

$$(128)\quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial}{\partial n_p}\iint_{(S)}\frac{f_2(p')}{r_{p'P}}\,d\sigma\right]_{P=P_n^i} = -2\pi f_2(p)+\iint_{(S)} f_2(p')\frac{\cos(r_{p'p},n_p)}{r_{p'p}^2}\,d\sigma=0,$$

$$(129)\quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial}{\partial n_p}\iint_{(S)}\frac{f_2(p')}{r_{p'P}}\,d\sigma\right]_{P=P_n^a} = 2\pi f_2(p)+\iint_{(S)} f_2(p')\frac{\cos(r_{p'p},n_p)}{r_{p'p}^2}\,d\sigma.$$

Da die Konvergenz aber in bezug auf die Lage des Punktes p gleichmäßig erfolgt, so gelten diese Limesbeziehungen auch bei beliebiger Annäherung der Punktfolge P_n^i bzw. P_n^a an den Punkt p.

Wählt man nun die Punktfolge P_n^i derart, daß jeder Punkt P_n^i auch Punkt einer Fläche S_n der ganz in R gelegenen Folge von gegen S konvergierenden Approximationsflächen ist und als solcher mit p_n^i bezeichnet werde, so soll bewiesen werden, daß die Limesrelation

$$(130)\quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial}{\partial n_{p_n^i}}\iint_{(S)}\frac{f_2(p')}{r_{p'P}}\,d\sigma\right]_{P=p_n^i} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial}{\partial n_p}\iint_{(S)}\frac{f_2(p')}{r_{p'P}}\,d\sigma\right]_{P=p_n^i}$$

besteht. Da der rechts stehende Grenzwert existiert, so genügt es zu zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial}{\partial n_{p_n^i}}\iint_{(S)}\frac{f_2(p')}{r_{p'P}}\,d\sigma-\frac{\partial}{\partial n_p}\iint_{(S)}\frac{f_2(p')}{r_{p'P}}\,d\sigma\right]_{P=p_n^i}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\iint_{(S)} f_2(p')\,\frac{\cos(r_{p'p_n^i},n_p)-\cos(r_{p'p_n^i},n_{p_n^i})}{r_{p'p_n^i}^2}\,d\sigma$$

$$=0$$

ist. Versteht man aber unter s den Teil von S, dessen Projektion auf die Tangentialebene im Punkte p ein Kreis vom Radius ϱ_0 um p ist, und zerlegt man das letzte Flächenintegral $\iint_{(S)}$ in $\iint_{(s)}+\iint_{(S-s)}$, so ist klar, daß die behauptete Limesbeziehung für $\iint_{(S-s)}$ richtig ist. Um sie aber auch für $\iint_{(s)}$ nachzuweisen, schreiben wir, falls mit x, y, z ein im Punkte p lokales Koordinatensystem bezeichnet wird,

$$\begin{aligned}&\cos(r_{p'p_n^i},n_p)-\cos(r_{p'p_n^i},n_{p_n^i})\\&=\cos(r_{p'p_n^i},x)\{\cos(x,n_p)-\cos(x,n_{p_n^i})\}+\\&+\cos(r_{p'p_n^i},y)\{\cos(y,n_p)-\cos(y,n_{p_n^i})\}+\\&+\cos(r_{p'p_n^i},z)\{\cos(z,n_p)-\cos(z,n_{p_n^i})\}.\end{aligned}$$

[50]) Vgl. J. Schauder, l. c., Anm. [14]), insbes. S. 636.

Die Komponenten des Normalvektors im Punkte p bzw. p_n^i sind aber durch

$$\left\{-\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\omega}, -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\omega}, \frac{1}{\omega}\right\} \qquad \left(\omega = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}\right)$$

bzw.

$$\left\{-\frac{\frac{\partial \varphi_n}{\partial x}}{\omega_n}, -\frac{\frac{\partial \varphi_n}{\partial y}}{\omega_n}, \frac{1}{\omega_n}\right\} \qquad \left(\omega_n = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial y}\right)^2}\right)$$

gegeben, wobei z. B.

$$\frac{\partial \varphi(p)}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial G(p)}{\partial x}}{\frac{\partial G(p)}{\partial z}}, \quad \frac{\partial \varphi_n(p)}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial G(p_n^i)}{\partial x}}{\frac{\partial G(p_n^i)}{\partial z}} \qquad \left(\frac{\partial G(p)}{\partial z} \neq 0, \frac{\partial G(p_n^i)}{\partial z} \neq 0\right)$$

ist, wenn man unter $G(x, y, z)$ die bereits im § 4, Abschnitt 2 zur Definition der Flächen S_n benutzte GREENsche Funktion für das Gebiet R versteht. Da nun nach bekannten Sätzen über Potentialfunktionen bei unseren Voraussetzungen über die Berandung die partiellen Ableitungen erster Ordnung von $G(x, y, z)$ in $R + S$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügen [51]), so erhalten wir die Abschätzung

$$\left|\cos\left(r_{p'p_n^i}, n_p\right) - \cos\left(r_{p'p_n^i}, n_{p_n^i}\right)\right| < K r_{pp_n^i}^{\lambda}.$$

Für das abzuschätzende Integral ergibt sich also gleichmäßig für alle Punkte p von S die obere Schranke

$$\left|\iint_{(s)}\right| \leqq K r_{pp_n^i}^{\lambda} \iint_{(s)} \frac{1}{r_{p'p_n^i}^2}\, d\sigma.$$

Der rechts stehende Ausdruck muß für $n \to \infty$ gegen Null gehen. Denn ist für den Augenblick der Punkt p_n^i auf der Normalen im Punkte p gelegen und ist $h_n = r_{pp_n^i}$, so gilt nach (2)

$$\begin{aligned} r_{pp_n^i}^{\lambda} \iint_{(s)} \frac{1}{r_{p'p_n^i}^2}\, d\sigma &= h_n^{\lambda} \iint_{(s)} \left\{\frac{1}{t'^2 + h_n^2} + 0\left[\frac{1}{(t'^2 + h_n^2)^{1-\frac{\lambda}{2}}}\right]\right\} d\sigma \\ &= h_n^{\lambda}\left\{\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\varrho_0} \frac{\varrho\, d\varrho}{\varrho^2 + h_n^2} + 0[1]\right\} \\ &= h_n^{\lambda}\left\{\pi\left(\log\left(\varrho_0^2 + h_n^2\right) - \log h_n^2\right) + 0[1]\right\}. \end{aligned}$$

---

[51]) Vgl. J. SCHAUDER, l. c., Anm. [14]), insbes. S. 635, und O. D. KELLOG, l. c., Anm. [15]), insbes. S. 508.

Nach der bereits mehrfach benutzten Schlußweise muß dann aber auch der Ausdruck bei beliebiger Annäherung an den Punkt p gegen Null gehen.

Im Anschluß an (129) lassen sich entsprechende Betrachtungen anstellen, wenn man für die P_n^a eine Folge von Punkten wählt, die auf den in R_a gelegenen Approximationsflächen S_n^a liegen, so daß

$$(131)\quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial}{\partial n_{p_n^a}}\int\limits_{(S)}\int\frac{f_2(p')}{r_{p'P}}\,d\sigma\right]_{P=p_n^a} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial}{\partial n_p}\int\limits_{(S)}\int\frac{f_2(p')}{r_{p'P}}\,d\sigma\right]_{P=p_n^a}$$

ist.

N. B. Mit Sätzen aus der Theorie des Potentials der einfachen Schicht könnte man zeigen, daß die durch (125) und (126) gegebene Funktion $u'(P)$ in $R+S$ stetige erste partielle Ableitungen besitzt[52]), so daß (130) auch unmittelbar aus

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial u'(P)}{\partial n_{p_n^i}}\right]_{P=p_n^i}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{\partial u'(P)}{\partial \xi}\right]_{P=p_n^i}\cos(\xi, n_{p_n^i}) + \left[\frac{\partial u'(P)}{\partial \eta}\right]_{P=p_n^i}\cos(\eta, n_{p_n^i}) + \left[\frac{\partial u'(P)}{\partial \zeta}\right]_{P=p_n^i}\cos(\zeta, n_{p_n^i})\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{\partial u'(P)}{\partial \xi}\right]_{P=p_n^i}\cos(\xi, n_p) + \left[\frac{\partial u'(P)}{\partial \eta}\right]_{P=p_n^i}\cos(\eta, n_p) + \left[\frac{\partial u'(P)}{\partial \zeta}\right]_{P=p_n^i}\cos(\zeta, n_p)\right\}$$

folgen würde.

8. Wendet man nun (127) zunächst auf den Bereich $R_n + S_n$ an, so erhält man bei Beachtung von (130) und (128), wenn man zur Grenze $n\to\infty$ übergeht, daß in ganz R

$$(132)\quad u'(P) = a',\quad v'(P) = b',\quad w'(P) = c'$$

sein muß, wo a', b', c' drei Konstanten sind, von denen wir zunächst zeigen wollen, daß sie nicht sämtlich verschwinden können.

Aus $a' = b' = c' = 0$ würde nämlich, da die Funktionen $u'(P)$, $v'(P)$, $w'(P)$ im ganzen Raume stetig sind,

$$(133)\quad \lim_{n\to\infty} u'(p_n^a) = 0,\quad \lim_{n\to\infty} v'(p_n^a) = 0,\quad \lim_{n\to\infty} w'(p_n^a) = 0$$

folgen. Da jedoch nach (131) und (129) der in (131) auf der linken Seite stehende Grenzwert existiert und die Funktionen $u'(P)$, $v'(P)$, $w'(P)$ im Unendlichen

---

[52]) Vgl. J. SCHAUDER, l. c., Anm. [14]), insbes. S. 635–640.

wie $\frac{1}{r_{OP}}$ verschwinden, während ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung dort wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ gegen Null gehen, so folgt aus dem Integralsatz (127), wenn man ihn zunächst auf den Bereich $R_n^a + S_n^a$ anwendet, und dann zur Grenze $n \to \infty$ übergeht und (133) beachtet, daß im Gebiet R_a

$$u'(P) \equiv 0, \quad v'(P) \equiv 0, \quad w'(P) \equiv 0$$

und damit ebendort

$$\frac{\partial u'(P)}{\partial n_p} \equiv 0, \quad \frac{\partial v'(P)}{\partial n_p} \equiv 0, \quad \frac{\partial w'(P)}{\partial n_p} \equiv 0$$

sein müßte. Aus (129) könnte man dann aber auf

$$f_2(p) + \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} f_2(p') \frac{\cos(r_{p'p}, n_p)}{r_{p'p}^2} d\sigma = 0,$$

$$g_2(p) + \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} g_2(p') \frac{\cos(r_{p'p}, n_p)}{r_{p'p}^2} d\sigma = 0,$$

$$h_2(p) + \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} h_2(p') \frac{\cos(r_{p'p}, n_p)}{r_{p'p}^2} d\sigma = 0$$

schließen. Daraus würde jedoch wegen (125) im Widerspruch zur Annahme

$$f_2(p) \equiv 0, \quad g_2(p) \equiv 0, \quad h_2(p) \equiv 0$$

folgen.

9. Wählt man nunmehr für $f_2(p)$, $g_2(p)$, $h_2(p)$ der Reihe nach die drei linear unabhängigen Lösungssysteme (107) von (106) mit $\varkappa = 0$, so sind die mit ihnen gebildeten Funktionen (126), die bzw. mit u_1', v_1', w_1', u_2', v_2', w_2', u_3', v_3', w_3' bezeichnet seien nach dem vorhergehenden Abschnitt in R sämtlich konstant:

$$\begin{aligned} u_1' &= a_1, \quad v_1' = b_1, \quad w_1' = c_1, \\ u_2' &= a_2, \quad v_2' = b_2, \quad w_2' = c_2, \\ u_3' &= a_3, \quad v_3' = b_3, \quad w_3' = c_3. \end{aligned} \tag{134}$$

Es muß dann

$$D = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{135}$$

sein. Denn andernfalls würde es drei Zahlen $k_1, k_2, k_3 \neq 0, 0, 0$ derart geben, daß

$$\begin{aligned} k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 &= 0, \\ k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3 &= 0, \\ k_1 c_1 + k_2 c_2 + k_3 c_3 &= 0 \end{aligned}$$

ist. Bildet man dann mit

$$(136)\qquad \begin{aligned} f_2 &= k_1 f_{21} + k_2 f_{22} + k_3 f_{23}, \\ g_2 &= k_1 g_{21} + k_2 g_{22} + k_3 g_{23}, \\ h_2 &= k_1 h_{21} + k_2 h_{22} + k_3 h_{23} \end{aligned}$$

die Funktionen (126), so muß für sie offenbar in R

$$u' \equiv k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = 0, \quad v' \equiv k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3 = 0,$$
$$w' \equiv k_1 c_1 + k_2 c_2 + k_3 c_3 = 0$$

sein. Nach dem im vorhergehenden Abschnitt benutzten Schluß würde also

$$f_2(p) \equiv 0, \quad g_2(p) \equiv 0, \quad h_2(p) \equiv 0$$

folgen, was jedoch gemäß (136) im Widerspruch zu der Bedeutung von f_{21}, f_{22}, f_{23}, g_{21}, g_{22}, g_{23}, h_{21}, h_{22}, h_{23} zu der Aussage führt, daß diese Lösungssysteme von (106) linear abhängig wären.

10. Beachtet man nun, daß für die durch (119) gegebenen Funktionen

$$\begin{aligned} u_1(p;0) &= \frac{1}{2r_{p0}}, & v_1(p;0) &= 0, & w_1(p;0) &= 0, \\ u_2(p;0) &= 0, & v_2(p;0) &= \frac{1}{2r_{p0}}, & w_2(p;0) &= 0, \\ u_3(p;0) &= 0, & v_3(p;0) &= 0, & w_3(p;0) &= \frac{1}{2r_{p0}} \end{aligned}$$

gilt, und daß man infolgedessen wegen (134) für die Elemente der Determinante

$$\Delta(0) = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix}$$

in der ersten Zeile

$$\delta_{11} = \iint_{(S)} \{f_{21}(p';0)u_1(p';0) + g_{21}(p';0)v_1(p';0) + h_{21}(p';0)w_1(p';0)\}d\sigma = \pi a_1,$$

$$\delta_{12} = \iint_{(S)} \{f_{21}(p';0)u_2(p';0) + g_{21}(p';0)v_2(p';0) + h_{21}(p';0)w_2(p';0)\}d\sigma = \pi b_1,$$

$$\delta_{13} = \iint_{(S)} \{f_{21}(p';0)u_3(p';0) + g_{21}(p';0)v_3(p';0) + h_{21}(p';0)w_3(p';0)\}d\sigma = \pi c_1$$

und entsprechende Werte für δ_{21}, δ_{22}, δ_{23}, δ_{31}, δ_{32}, δ_{33} erhält, so ist unmittelbar aus (135) zu ersehen, daß

$$\Delta(0) = \pi^3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

ist, womit der im Abschnitt 6 dieses Paragraphen formulierte Hilfssatz bewiesen ist.

§ 6.

Das innere Problem in der Ebene.

1. Es handelt sich in diesem Paragraphen darum, den folgenden Existenz- und Eindeutigkeitssatz zu beweisen:

Hauptsatz III. *Genügt die Randkurve S des einfach zusammenhängenden, ganz im Endlichen gelegenen Gebietes R den in § 1 genannten Voraussetzungen, und sind die auf S definierten Funktionen ϱ und σ dort stetig und genügen sie der Relation*

$$\int_{(S)} \{\varrho(p') \cos(n'_p, \eta) - \sigma(p') \cos(n'_p, \xi)\}\, ds = 0, \tag{137}$$

dann gibt es (bis auf eine additive Konstante) genau eine in R biharmonische Funktion U, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in $R + S$ stetig sind und auf S bzw. mit ϱ und σ übereinstimmen.

Existiert eine biharmonische Funktion mit den verlangten Eigenschaften, so gilt mit

$$u = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial}, \quad \vartheta = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = \Delta U \tag{138}$$

offensichtlich in R

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \Delta\vartheta = 0 \tag{139}$$

und

$$[u]_S = \varrho, \quad [v]_S = \sigma, \tag{140}$$

und umgekehrt folgt aus dem Bestehen von (139), (140) und (137) die Existenz einer Funktion U, für die die Gleichungen (138) erfüllt sind, so daß sie das ursprüngliche Problem löst.

Die Bedingung (137) ist, damit das Problem überhaupt eine Lösung hat, wie man aus dem Gaussschen Satz erkennt, sicherlich notwendig, sie erweist sich aber auch zusammen mit den anderen Voraussetzungen als hinreichend. Indem wir uns daher lediglich mit dem Problem (139), (140) zusammen mit (137) beschäftigen, zeigen wir zunächst den

Satz 11. *Sind die Funktionen ϱ und σ auf S stetig und genügen sie der Relation* (137), *so existiert eine Lösung des Problems* (139), (140).

Den Beweisgang, für den die im räumlichen Fall benutzten Methoden versagen, können wir unter Ausfüllung einiger Lücken und Verallgemeinerung auf die von uns zugrunde gelegten Voraussetzungen über S einer Arbeit von G. Lauricella[53]) entnehmen.

---

[53]) G. Lauricella, l. c., Anm. [5]).

2. Mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$K_{\xi\xi}(P,p)=\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial\eta}\right)^2\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}=\frac{\cos^2(r_{pP},\eta)\cos(r_{pP},n_p)}{r_{pP}},$$

$$(141)\quad K_{\xi\eta}(P,p)=K_{\eta\xi}(P,p)=-\frac{\partial r_{pP}}{\partial\xi}\frac{\partial r_{pP}}{\partial\eta}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}$$
$$=-\frac{\cos(r_{pP},\xi)\cos(r_{pP},\eta)\cos(r_{pP},n_p)}{r_{pP}},$$

$$K_{\eta\eta}(P,p)=\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial\xi}\right)^2\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{pP}}\right)}{dn_p}=\frac{\cos^2(r_{pP},\xi)\cos(r_{pP},n_p)}{r_{pP}}$$

betrachte man das inhomogene System von Fredholmschen Integralgleichungen

$$(142)\quad\begin{aligned}f(p)+\frac{2}{\pi}\int_{(S)}\{K_{\xi\xi}(p,p')f(p')+K_{\xi\eta}(p,p')g(p')\}ds&=\varrho(p),\\ g(p)+\frac{2}{\pi}\int_{(S)}\{K_{\eta\xi}(p,p')f(p')+K_{\eta\eta}(p,p')g(p')\}ds&=\sigma(p).\end{aligned}$$

Von dem zu dem entsprechenden homogenen Gleichungssystem

$$(143)\quad\begin{aligned}f_1(p)+\frac{2}{\pi}\int_{(S)}\{K_{\xi\xi}(p,p')f_1(p')+K_{\xi\eta}(p,p')g_1(p')\}ds&=0,\\ g_1(p)+\frac{2}{\pi}\int_{(S)}\{K_{\eta\xi}(p,p')f_1(p')+K_{\eta\eta}(p,p')g_1(p')\}ds&=0\end{aligned}$$

gehörigen assoziierten Gleichungssystem

$$(144)\quad\begin{aligned}f_2(p)+\frac{2}{\pi}\int_{(S)}\{K_{\xi\xi}(p',p)f_2(p')+K_{\xi\eta}(p',p)g_2(p')\}ds&=0,\\ g_2(p)+\frac{2}{\pi}\int_{(S)}\{K_{\eta\xi}(p',p)f_2(p')+K_{\eta\eta}(p',p)g_2(p')\}ds&=0\end{aligned}$$

kann man durch direkte Rechnung zeigen, daß es die Lösung

$$f_2(p)=\cos(n_p,\eta),\quad g_2(p)=-\cos(n_p,\xi)$$

besitzt. Denn es wird nach (50) und (51)

$$\frac{2}{\pi}\int_{(S)}\{K_{\xi\xi}(p', p)\cos(n_p', \eta) - K_{\xi\eta}(p', p)\cos(n_p', \xi)\}\,ds$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{(S)}\frac{\partial r_{p'p}}{\partial \eta}\left\{\frac{\partial r_{p'p}}{\partial \eta}\cos(n_{p'}, \eta) + \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \xi}\cos(n_{p'}, \xi)\right\}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_p}\,ds$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{(S)}\frac{\partial r_{p'p}}{\partial \eta}\frac{\partial r_{p'p}}{\partial n_{p'}}\frac{1}{r_{p'p}}\frac{\partial r_{p'p}}{\partial n_p}\,ds = -\frac{2}{\pi}\int_{(S)}\frac{\partial r_{p'p}}{\partial \eta}\frac{\partial r_{p'p}}{\partial n_p}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_{(S)}\frac{\partial r_{p'p}}{\partial \eta}\left\{\frac{\partial r_{p'p}}{\partial \xi}\cos(n_p, \xi) + \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \eta}\cos(n_p, \eta)\right\}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds$$

$$= -\frac{2}{\pi}\cos(n_p, \xi)\int_{(S)}\frac{\partial r_{p'p}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{p'p}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds -$$

$$-\frac{2}{\pi}\cos(n_p, \eta)\int_{(S)}\left(\frac{\partial r_{p'p}}{\partial \eta}\right)^2\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds$$

$$= -\cos(n_p, \eta)$$

und ebenso

$$\frac{2}{\pi}\int_{(S)}\{K_{\eta\xi}(p', p)\cos(n_{p'}, \eta) - K_{\eta\eta}(p', p)\cos(n_{p'}, \xi)\}\,ds = \cos(n_p, \xi).$$

Damit besitzt auch (143) mindestens eine nicht triviale Lösung $f_1(p)$, $g_1(p)$, von der man mit denselben Betrachtungen wie in § 4, Abschnitt 6 unter Verwendung der in § 3, Abschnitt 12 gewonnenen ebenen Analoga der Hilfssätze 2 bis 6 von § 3 zeigen kann, daß sie eine Tangentialableitung besitzen, die auf S einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Kurvenexponenten λ genügt.

In den nächsten Abschnitten wollen wir in mehreren Schritten nachweisen, daß jede weitere Lösung $\bar{f}_1(p)$, $\bar{g}_1(p)$ von (143) ein Vielfaches von $f_1(p)$, $g_1(p)$ sein muß.

3. Als direkte Folgerung aus einer Greenschen Formel läßt sich für eine im Gebiet R existierende beliebige Lösung u, v von (139) der Integralsatz

$$(145)\quad \iint_{(R)}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2\right\}d\xi\,d\eta +$$

$$+\int_{(S)}\{[u]_S\,X_{u,v}(p', p') + [v]_S\,Y_{u,v}(p', p')\}\,ds = 0$$

ableiten, wenn man zu der durch (138) in R definierten Potentialfunktion ϑ eine konjugierte Potentialfunktion χ durch

$$(146)\quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = \frac{\partial \chi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = -\frac{\partial \chi}{\partial \xi}$$

einführt und

(147)

$$X_{u,v}(P,p) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u(P)}{\partial \xi} - \frac{\partial v(P)}{\partial \eta}\right)\cos(n_p, \xi) + \left(\frac{\partial u(P)}{\partial \eta} - \frac{1}{2}\chi(P)\right)\cos(n_p, \eta),$$

$$Y_{u,v}(P,p) = \left(\frac{\partial v(P)}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\chi(P)\right)\cos(n_p, \xi) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v(P)}{\partial \eta} - \frac{\partial u(P)}{\partial \xi}\right)\cos(n_p, \eta)$$

setzt, und wenn von dem auf der linken Seite in (145) stehenden Kurvenintegral vorausgesetzt wird, daß es als $\lim_{n\to\infty} \int_{(S_n^i)}$ existiert, wobei die S_n^i, analog wie beim räumlichen Fall, eine Folge von in R gelegenen, durch die zu R gehörige Greensche Funktion gegebenen, gegen S konvergierenden analytischen Approximationskurven sind. Die Formel (145) gilt auch für das Außengebiet R_a, falls die Funktionen u und v den Gleichungen (139) genügen, im Unendlichen beschränkt sind, und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung dort wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ verschwinden, und falls weiterhin das Kurvenintegral als $\lim_{n\to\infty} \int_{S_n^a}$ existiert.

Den Beweis von (145) erbringen wir, indem wir für zwei beliebige im Gebiet R existierende Lösungen u, v und $\bar{u}$, $\bar{v}$ von (139) die Richtigkeit des für spätere Zwecke benötigten allgemeineren Integralsatzes

$$(148)\quad \int\int_{(R)} \left\{\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\right)\right\} d\xi\, d\eta + \\ + \int_{(S)} \{[u]_S X_{\bar{u},\bar{v}}(p', p') + [v]_S Y_{\bar{u},\bar{v}}(p', p')\}\, ds = 0$$

aufzeigen, wobei das Kurvenintegral $\int_{(S)}$ wieder als $\lim_{n\to\infty} \int_{(S_n^i)}$ existieren soll. Ein entsprechender Integralsatz gilt für das Außengebiet R_a.

Das links auftretende Flächenintegral zerlege man nämlich in die beiden Integrale

$$\frac{1}{2}\int\int_{(R)} \left\{\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\right\} d\xi\, d\eta$$

und

$$\frac{1}{2}\int\int_{(R)} \left\{\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \eta}\right\} d\xi\, d\eta.$$

Für das erste Integral findet man nach einer GREENschen Formel

$$\frac{1}{2}\iint_{(R)}\left\{\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}+\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\right\}d\xi\,d\eta$$

$$=-\frac{1}{2}\iint_{(R)}\{u\,\Delta\bar{u}+v\,\Delta\bar{v}\}\,d\xi\,d\eta-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{(S)}\left\{u\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\cos(n_{p'},\xi)+\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\cos(n_{p'},\eta)\right)+\right.$$

$$\left.+\,v\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}\cos(n_{p'},\xi)+\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\cos(n_{p'},\eta)\right)\right\}ds.$$

Da nun

$$\Delta u-\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \xi}=0,\quad \Delta\bar{v}-\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}=0$$

ist, so erhält man nach dem GAUSSschen Integralsatz

$$\iint_{(R)}\{u\,\Delta\bar{u}+v\,\Delta\bar{v}\}\,d\xi\,d\eta=\iint_{(R)}\left\{u\left(\Delta\bar{u}-\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial\xi}\right)+v\left(\Delta\bar{v}-\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}\right)\right\}d\xi\,d\eta+$$

$$+\iint_{(R)}\left\{u\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial\eta}-v\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial\xi}\right\}d\xi\,d\eta=\int_{(S)}\{-u\bar{\chi}\cos(n_{p'},\eta)+v\bar{\chi}\cos(n_{p'},\xi)\}\,ds,$$

wenn man noch beachtet, daß

$$\bar{\chi}\frac{\partial u}{\partial\eta}-\bar{\chi}\frac{\partial v}{\partial\xi}=0$$

ist. Man hat also insgesamt für das erste Integral

$$(149)\quad \frac{1}{2}\iint_{(R)}\left\{\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta}+\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\xi}+\frac{\partial v}{\partial\eta}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\eta}\right\}d\xi\,d\eta$$

$$=\int_{(S)}\left\{u\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}\cos(n_{p'},\xi)+\left(\frac{1}{2}\bar{\chi}-\frac{1}{2}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta}\right)\cos(n_{p'},\eta)\right]+\right.$$

$$\left.+\,v\left[-\left(\frac{1}{2}\bar{\chi}+\frac{1}{2}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\xi}\right)\cos(n_{p'},\xi)-\frac{1}{2}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\eta}\cos(n_{p'},\eta)\right]\right\}ds.$$

Für das zweite Integral kann man aber bei Benutzung des GAUSSschen Integralsatzes

$$(150)\quad \frac{1}{2}\iint_{(R)}\left\{\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta}+\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\eta}-\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}\frac{\partial v}{\partial\eta}\right\}d\xi\,d\eta$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{(R)}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(u\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta}\right)-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(u\frac{\partial\bar{v}}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(v\frac{\partial\bar{v}}{\partial\xi}\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(v\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}\right)\right\}d\xi\,d\eta$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{(S)}\left\{u\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta}\cos(n_{p'},\eta)-\frac{\partial\bar{v}}{\partial\eta}\cos(n_{p'},\xi)\right)+\right.$$

$$\left.+\,v\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial\xi}\cos(n_{p'},\xi)-\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}\cos(n_{p'},\eta)\right)\right\}d\xi\,d\eta$$

schreiben, wenn man berücksichtigt, daß

$$u\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} - u\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0, \quad v\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \xi^2} - v\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0$$

ist. Mit (149) und (150) ist aber (148) bewiesen.

Subtrahiert man die durch Vertauschung von u mit $\bar{u}$ bzw. von v mit $\bar{v}$ aus (148) erhaltene Gleichung von (148), so findet man die für spätere Zwecke benötigte Relation

$$(151)\quad \int_{(S)} \{[u]_S X_{\bar{u},\bar{v}}(p', p') + [v]_S Y_{\bar{u},\bar{v}}(p', p') - [\bar{u}]_S X_{u,v}(p', p') - [\bar{v}]_S Y_{u,v}(p', p')\}\, ds = 0,$$

wobei das Integral als $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{(S_n^i)}$ zu verstehen ist. Geht man von dem (148) entsprechenden Integralsatz für das Gebiet R_a aus, so gelangt man durch dasselbe Vorgehen ebenfalls zu einer Relation der Form (151) mit dem einzigen Unterschied, daß jetzt das Kurvenintegral $\int\limits_{(S)}$ als $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{(S_n^a)}$ zu verstehen ist.

4. Mit Hilfe der Funktionen $f_1(p)$ und $g_1(p)$ bilde man nunmehr die folgenden Lösungen von (139)

$$(152)\quad \begin{aligned} u_1(P) &= \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(P, p')\, f_1(p') + K_{\xi\eta}(P, p')\, g_1(p')\}\, ds, \\ v_1(P) &= \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(P, p')\, f_1(p') + K_{\eta\eta}(P, p')\, g_1(p')\}\, ds, \end{aligned}$$

für die wegen (55), (57) und (143) die Limesrelationen

$$(153)\quad \lim_{n\to\infty} u_1(P_n^i) = u_1^i(p) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} v_1(P_n^i) = v_1^i(p) = 0$$

bestehen. Für diese Funktionen ist nun

$$(154)\quad \vartheta_1 = \frac{\partial u_1(P)}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1(P)}{\partial \eta} = \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi}\int_{(S)} f_1(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\, ds + \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \eta}\int_{(S)} g_1(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\, ds,$$

und damit kann im Gebiet R oder im Gebiet R_a gemäß (146)

$$(155)\quad \chi_1 = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \eta}\int_{(S)} f_1(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\, ds + \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi}\int_{(S)} g_1(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\, ds$$

gesetzt werden.

Bezeichnet man die Tangentialrichtung im Kurvenpunkt p von S, die zusammen mit der Normalenrichtung n_p dieselbe Orientierung wie das ξ, η-System hat, mit t_p, und beachtet man, daß

$$\frac{\partial K_{\xi\xi}(P,p)}{\partial \eta} = \frac{\partial K_{\xi\eta}(P,p)}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial K_{\xi\eta}(P,p)}{\partial \eta} = \frac{\partial K_{\eta\eta}(P,p)}{\partial \xi}$$

ist, so ergeben die Ausdrücke (147) für die Funktionen $u = u_1$, $v = v_1$ wegen (154) und (155)

$$X_{u_1,v_1}(P,p) = \left(\frac{1}{2}\vartheta_1 - \frac{\partial v_1}{\partial \eta}\right)\cos(n_p,\xi) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{1}{2}\chi_1\right)\cos(n_p,\eta)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\int\limits_{(S)} f_1(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds + \frac{\partial}{\partial \eta}\int\limits_{(S)} g_1(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds + \right.$$

$$+ 2\frac{\partial}{\partial \eta}\int\limits_{(S)} f_1(p')\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds -$$

$$\left. - 2\frac{\partial}{\partial \eta}\int\limits_{(S)} g_1(p')\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds\right\}\cos(n_p,\xi) +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\left\{- 2\frac{\partial}{\partial \eta}\int\limits_{(S)} f_1(p')\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds + \right.$$

$$+ 2\frac{\partial}{\partial \xi}\int\limits_{(S)} g_1(p')\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds +$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \eta}\int\limits_{(S)} f_1(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds - \frac{\partial}{\partial \xi}\int\limits_{(S)} g_1(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds\right\}\cos(n_p,\eta)$$

und daher

$$(156)\qquad X_{u_1,v_1}(P,p) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial n_p}\int\limits_{(S)} f_1(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds -$$

$$- \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t_p}\int\limits_{(S)} g_1(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds -$$

$$- \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial t_p}\int\limits_{(S)} f_1(p')\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial t_p}\int\limits_{(S)} g_1(p')\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds.$$

Ebenso erhält man

$$(157)\quad Y_{u_1, v_1}(P,p) = \left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\chi_1\right)\cos(n_p, \xi) + \left(\frac{1}{2}\vartheta_1 - \frac{\partial u_1}{\partial \xi}\right)\cos(n_p, \eta)$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial n_p}\int_{(S)} g_1(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds + \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t_p}\int_{(S)} f_1(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds -$$

$$- \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial t_p}\int_{(S)} f_1(p')\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\right)^2\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial t_p}\int_{(S)} g_1(p')\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds.$$

5. Da aber die Funktionen $f_1(p)$ und $g_1(p)$ auf S eine Tangentialableitung besitzen, die einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügt, so sind sowohl $\frac{\partial u_1}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u_1}{\partial \eta}$, $\frac{\partial v_1}{\partial \xi}$, $\frac{\partial v_1}{\partial \eta}$, ϑ_1, χ_1 als auch die Ausdrücke (156) und (157) in $R + S$ und in $R_a + S$ stetig, und aus (60) und (61) erkennt man unmittelbar, daß die letzteren sich auch stetig verhalten, wenn der Punkt P den Flächenpunkt p passiert.

Wendet man daher (145) auf den ganz in R gelegenen Bereich $R_n^i + S_n^i$ an und läßt n unbeschränkt wachsen, so folgt bei Beachtung von (153), daß in R

$$u_1(P) \equiv 0, \quad \vartheta_1(P) \equiv 0$$

und damit

$$\vartheta_1(P) \equiv 0$$

und also

$$\chi_1(P) \equiv c$$

sein muß, wobei c eine Konstante ist. In ganz R gilt infolgedessen

$$X_{u_1, r_1}(P, p) = -\tfrac{1}{2}c\cos(n_p, \eta),$$
$$Y_{u_1, v_1}(P, p) = \tfrac{1}{2}c\cos(n_p, \xi).$$

Nach der eben gemachten Bemerkung über das Verhalten der Ausdrücke (156) und (157) bei Annäherung an einen Randpunkt von S folgt dann aber für eine im Gebiet R_a gelegene Punktfolge P_n^a, die gegen p konvergiert,

$$\lim_{n\to\infty} X_{u_1, r_1}(P_n^a, p) = -\tfrac{1}{2}c\cos(n_p, \eta),$$
$$\lim_{n\to\infty} Y_{u_1, r_1}(P_n^a, p) = \tfrac{1}{2}c\cos(n_p, \xi).$$

Hieraus erkennt man, daß die Konstante c ungleich Null sein muß. Denn wenn r_{OP} unbeschränkt wächst, so gehen $u_1(P)$ und $v_1(P)$ wie $\frac{1}{r_{OP}}$ gegen Null, während ihre ersten partiellen Ableitungen und χ_1 wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ verschwinden. Man kann also (145) auf den Bereich $R_n^a + S_n^a$ anwenden. Wäre also $c = 0$, so erhielte man im Limes $n \to \infty$, das in R_a

$$u_1(P) \equiv 0, \quad v_1(P) \equiv 0$$

sein müßte. Da aber wegen (56), (58) und (143)

$$\lim_{n\to\infty} u_1(P_n^a) = u_1^a(p) = -f_1(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p,p')\, f_1(p') + K_{\xi\eta}(p,p')\, g_1(p')\}\, ds = -2 f_1(p),$$

$$\lim_{n\to\infty} v_1(P_n^a) = v_1^a(p) = -g_1(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p,p')\, f_1(p') + K_{\eta\eta}(p,p')\, g_1(p')\}\, ds = -2 g_1(p)$$

ist, so würde im Widerspruch zu der Bedeutung der Funktionen $f_1(p)$, $g_1(p)$

$$f_1(p) \equiv 0, \quad g_1(p) \equiv 0$$

folgen.

6. Nehmen wir nun an, daß die homogenen Gleichungen (143) neben $f_1(p)$, $g_1(p)$ die Funktionen $\bar{f}_1(p)$, $\bar{g}_1(p)$ als nicht identisch verschwindende Lösung besitzen. Bildet man mit ihnen analog zu (152) die Lösungsfunktionen $\bar{u}_1(P)$, $\bar{v}_1(P)$ von (139), so muß aus den gleichen Gründen wie eben in R

$$X_{\bar{u}_1, \bar{v}_1}(P, p) = -\tfrac{1}{2}\,\bar{c}\cos(n_p, \eta),$$
$$Y_{\bar{u}_1, \bar{v}_1}(P, p) = \tfrac{1}{2}\,\bar{c}\cos(n_p, \xi)$$

sein, wo $\bar{c}$ eine nichtverschwindende Konstante ist.

Wählt man nun eine weitere Konstante k so, daß

$$c + k\bar{c} = 0$$

ist, und bestimmt für die Lösungsfunktionen

$$\bar{\bar{f}}_1 = f_1 + k\bar{f}_1, \quad \bar{\bar{g}}_1 = g_1 + k\bar{g}_1$$

die zu (152) analogen Lösungsfunktionen $\bar{\bar{u}}_1(P)$, $\bar{\bar{v}}_1(P)$ von (139), so gilt offensichtlich in ganz R

$$X_{\bar{\bar{u}}_1, \bar{\bar{v}}_1}(P, p) = -\tfrac{1}{2}(c + k\bar{c})\cos(n_p, \eta) = 0,$$
$$Y_{\bar{\bar{u}}_1, \bar{\bar{v}}_1}(P, p) = \tfrac{1}{2}(c + k\bar{c})\cos(n_p, \xi) = 0.$$

Mit dem Schlußverfahren am Ende des letzten Abschnitts erkennt man dann aber, daß

$$f_1 = 0, \quad \bar{\bar{g}}_1 = 0$$

sein muß, so daß in der Tat eine beliebige Lösung $\bar{f}_1(p)$, $\bar{g}_1(p)$ von (143) ein Vielfaches der Lösung $f_1(p)$, $g_1(p)$ sein muß.

7. Da somit das assoziierte Gleichungssystem (144) die Funktionen

$$f_2(p) = \cos(n_p, \eta), \quad g_2(p) = -\cos(n_p, \xi)$$

als einzige linear unabhängige Lösung besitzt, so lautet die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das inhomogene System (142) eine Lösung besitzt:

$$\int_{(S)} \{\varrho(p') \cos(n_{p'}, \eta) - \sigma(p') \cos(n_{p'}, \xi)\} ds = 0.$$

Erfüllen die gegebenen Randfunktionen diese Bedingung, so existiert also eine Lösung $f(p)$, $g(p)$ von (142).

Die mit ihnen gebildeten Funktionen

$$\begin{aligned} u(P) &= \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(P, p') f(p') + K_{\xi\eta}(P, p') g(p')\} ds, \\ v(P) &= \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(P, p') f(p') + K_{\eta\eta}(P, p') g(p')\} ds \end{aligned} \tag{158}$$

lösen alsdann das Problem (139), (140), womit der Nachweis von Satz 11 erbracht ist.

8. Der Hauptsatz III ist alsdann in seinem vollen Umfange zugleich mit dem folgenden Eindeutigkeitssatz bewiesen:

Satz 12. *Sind die Funktionen ϱ und σ auf S stetig und genügen sie der Relation* (137), *so kann es höchstens eine Lösung des Problems* (139), (140) *geben.*

Den Beweis erbringen wir in mehreren Schritten, indem wir mit dem Hilfssatz beginnen: *Das durch Einführung eines Parameters $\varkappa$ ergänzte homogene Integralgleichungssystem* (143)

$$\begin{aligned} f_1(p) + \varkappa \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p, p') f_1(p') + K_{\xi\eta}(p, p') g_1(p')\} ds = 0, \\ g_1(p) + \varkappa \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p, p') f_1(p') + K_{\eta\eta}(p, p') g_1(p')\} ds = 0 \end{aligned} \tag{159}$$

besitzt für $\varkappa = -1$ die Lösung

$$f_1(p) = a_1 \xi(p) + b_1, \quad g_1(p) = a_1 \eta(p) + c_1, \tag{160}$$

wenn a_1, b_1, c_1 beliebige Konstanten sind.

Beweis. Ist $P_1 = (\xi_1, \eta_1)$ ein beliebiger Punkt im Innern von R, der der Mittelpunkt eines ganz in R gelegenen Kreises S_0 sei, und benutzt man die in dem von S und S_0 berandeten Gebiet R_0 definierten Lösungsfunktionen

$$\bar{u}(P) = -\log\frac{1}{r_{PP_1}} + \left(\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \xi}\right)^2, \quad \bar{v}(P) = \frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \eta}$$

von (139), für die

$$\bar{\vartheta} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} = -2\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{PP_1}}\right)}{\partial \xi}, \quad \bar{\chi} = 2\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{PP_1}}\right)}{\partial \eta}$$

und also

$$X_{\bar{u},\bar{v}}(P,p) = -2\left(\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \eta}\right)^2\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{PP_1}}\right)}{\partial n_p},$$

$$Y_{\bar{u},\bar{v}}(P,p) = 2\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{PP_1}}\right)}{\partial n_p}$$

zu setzen ist, so liefert die Formel (151) bei aus der Potentialtheorie bekanntem Vorgehen, wenn man die Kreisperipherie S_0 auf P_1 zusammenzieht,

$$\begin{aligned} u(\xi_1,\eta_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{(S)}\{&-[u]_S X_{\bar{u},\bar{v}}(p',p') - [v]_S Y_{\bar{u},\bar{v}}(p',p') + \\ &+ [\bar{u}]_S X_{u,v}(p',p') + [\bar{v}]_S Y_{u,v}(p',p')\}\,ds \\ = \frac{1}{\pi}\int_{(S)}&\{[u]_S K_{\xi\xi}(P_1,p') + [v]_S K_{\xi\eta}(P_1,p')\}\,ds + \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{(S)}\{[\bar{u}]_S X_{u,v}(p',p') + [\bar{v}]_S Y_{u,v}(p',p')\}\,ds. \end{aligned} \tag{161}$$

Ebenso findet man bei Benutzung der in dem von S und S_0 berandeten Gebiet definierten Lösungsfunktionen

$$\bar{\bar{u}}(P) = \frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \eta}\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \xi}, \quad \bar{\bar{v}}(P) = -\log\frac{1}{r_{PP_1}} + \left(\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \eta}\right)^2$$

von (139), für die

$$X_{\bar{\bar{u}},\bar{\bar{v}}}(P,p) = 2\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \eta}\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \xi}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{PP_1}}\right)}{\partial n_p},$$

$$Y_{\bar{\bar{u}},\bar{\bar{v}}}(P,p) = -2\left(\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{PP_1}}\right)}{\partial n_p}$$

ist

$$v(\xi_1, \eta_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \{ - [u]_S X^{=}_{u,v}(p', p') - [v]_S Y^{-}_{u,v}(p', p') + \\ + [\bar{\bar{u}}]_S X_{u,v}(p', p') + [\bar{\bar{v}}]_S Y_{u,v}(p', p')\} ds$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{(S)} \{[u]_S K_{\eta\xi}(P_1, p') + [v]_S K_{\eta\eta}(P_1, p')\} ds + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \{[\bar{u}] X_{u,v}(p', p') + [\bar{\bar{v}}]_S Y_{u,v}(p', p')\} ds. \tag{162}$$

Wählt man nunmehr die Lösungsfunktionen

$$u(\xi, \eta) = a_1 \xi + b_1, \quad v(\xi, \eta) = a_1 \eta + c_1$$

von (139), so ist

$$X_{u,v}(P, p) = -d \cos(n_p, \eta), \quad Y_{u,v}(P, p) = d \cos(n_p, \xi),$$

wenn d eine Konstante bedeutet. Dann muß aber nach dem Gaussschen Integralsatz

$$\int_{(S)} \{[\bar{u}]_S X_{u,v}(p', p') + [\bar{v}]_S Y_{u,v}(p', p')\} ds \\ = -d \int_{(S)} \{[\bar{u}]_S \cos(n_{p'}, \eta) - [\bar{v}]_S \cos(n_{p'}, \xi)\} ds = 0$$

und ebenso

$$\int_{(S)} \{[\bar{u}]_S X_{u,v}(p', p') + [\bar{\bar{v}}]_S Y_{u,v}(p', p')\} ds = 0$$

sein, da $\bar{u}(P)$ und $\bar{\bar{v}}(P)$ im Punkte P_1 von R nur eine logarithmische Singularität haben, während $\bar{v}(P)$ und $\bar{\bar{u}}(P)$ in ganz R stetig sind. Somit ergeben (161) und (162), wenn man beachtet, daß P_1 ein beliebiger Punkt von R war:

$$a_1 \xi + b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{(S)} \{(a_1 \xi(p') + b_1) K_{\xi\xi}(P, p') + (a_1 \eta(p') + c_1) K_{\xi\eta}(P, p')\} ds$$

und

$$a_1 \eta + c_1 = \frac{1}{\pi} \int_{(S)} \{(a_1 \xi(p') + b_1) K_{\eta\xi}(P, p') + (a_1 \eta(p') + c_1) K_{\eta\eta}(P, p')\} ds.$$

Läßt man daher den in R gelegenen Punkt (ξ, η) gegen einen Punkt p von S konvergieren, so erhält man

$$a_1 \xi(p) + b_1 = \frac{1}{2}(a_1 \xi(p) + b_1) + \frac{1}{\pi} \int_{(S)} \{(a_1 \xi(p') + b_1) K_{\xi\xi}(p, p') + \\ + (a_1 \eta(p') + c_1) K_{\xi\eta}(p, p')\} ds,$$

$$a_1 \eta(p) + c_1 = \frac{1}{2}(a_1 \eta(p) + c_1) + \frac{1}{\pi} \int_{(S)} \{(a_1 \xi(p') + b_1) K_{\eta\xi}(p, p') + \\ + (a_1 \eta(p') + c_1) K_{\eta\eta}(p, p')\} ds,$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

9. Weiter gilt der Hilfssatz: *Das Integralgleichungssystem* (159) *besitzt keinen komplexen Eigenwert.*

Beweis. Sei $\varkappa = \varkappa_1 + i\varkappa_2$ mit $\varkappa_2 \neq 0$ ein solcher Eigenwert; die zugehörigen nicht identisch verschwindenden Eigenfunktionen seien

$$f_1(p) = f_{11}(p) + i f_{12}(p),$$
$$g_1(p) = g_{11}(p) + i g_{12}(p).$$

Bildet man damit gemäß (152) die Lösungsfunktionen

$$u_1(P) = u_{11}(P) + i u_{12}(P),$$
$$v_1(P) = v_{11}(P) + i v_{12}(P)$$

von (139), so folgt aus

$$\begin{aligned}
u_1^i(p) &= f_1(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p,p')f_1(p') + K_{\xi\eta}(p,p')g_1(p')\}\,ds,\\
u_1^a(p) &= -f_1(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p,p')f_1(p') + K_{\xi\eta}(p,p')g_1(p')\}\,ds,\\
v_1^i(p) &= g_1(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p,p')f_1(p') + K_{\eta\eta}(p,p')g_1(p')\}ds,\\
v_1^a(p) &= -g_1(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p,p')f_1(p') + K_{\eta\eta}(p,p')g_1(p')\}ds,
\end{aligned} \tag{163}$$

indem man die erste bzw. dritte Gleichung mit $\frac{1+\varkappa}{2}$ multipliziert und sie jeweils zu der mit $-\frac{1-\varkappa}{2}$ multiplizierten zweiten bzw. vierten Gleichung hinzuaddiert.

$$\frac{1+\varkappa}{2}u_1^i - \frac{1+\varkappa}{2}u_1^a = f_1 + \varkappa\frac{2}{\pi}\int_{(S)}\{K_{\xi\xi}f_1 + K_{\xi\eta}g_1\}\,ds = 0,$$
$$\frac{1+\varkappa}{2}v_1^i - \frac{1+\varkappa}{2}v_1^a = g_1 + \varkappa\frac{2}{\pi}\int_{(S)}\{K_{\eta\xi}f_1 + K_{\eta\eta}g_1\}\,ds = 0$$

oder, indem man zu Real- und Imaginärteil übergeht,

$$\begin{aligned}
(1+\varkappa_1)u_{11}^i - (1-\varkappa_1)u_{11}^a - \varkappa_2 u_{12}^i - \varkappa_2 u_{12}^a &= 0,\\
(1+\varkappa_1)u_{12}^i - (1-\varkappa_1)u_{12}^a + \varkappa_2 u_{11}^i + \varkappa_2 u_{11}^a &= 0,\\
(1+\varkappa_1)v_{11}^i - (1-\varkappa_1)v_{11}^a - \varkappa_2 v_{12}^i - \varkappa_2 v_{12}^a &= 0,\\
(1+\varkappa_1)v_{12}^i - (1-\varkappa_1)v_{12}^a + \varkappa_2 v_{11}^i + \varkappa_2 v_{11}^a &= 0.
\end{aligned}$$

Beachtet man nun, daß die mit den Funktionen $u_{11}(P)$, $v_{11}(P)$ bzw. $u_{12}(P)$, $v_{12}(P)$ gebildeten Ausdrücke $X_{u_{11},v_{11}}(P,p)$, $Y_{u_{11},v_{11}}(P,p)$ bzw. $X_{u_{12},v_{12}}(P,p)$, $Y_{u_{12},v_{12}}(P,p)$ sich nach den Bemerkungen am Anfang des Abschnitts 5, falls der Punkt P den Kurvenpunkt p passiert, stetig verhalten, so folgt, in-

dem man die erste der zuletzt erhaltenen Gleichungen mit $X_{u_{12}, v_{12}}(p, p)$ multipliziert, sie zu der mit $Y_{u_{12}, v_{12}}(p, p)$ multiplizierten dritten Gleichung addiert und davon die mit $X_{u_{11}, v_{11}}(p, p)$ multiplizierte zweite Gleichung und die mit $Y_{u_{11}, v_{11}}(p, p)$ multiplizierte vierte Gleichung subtrahiert, und indem man alsdann über S integriert wegen (151)

$$
\begin{aligned}
&- \varkappa_2 \Big[\int_{(S)} \{ u^i_{12}(p') X_{u_{12}, v_{12}}(p', p') + v^i_{12}(p') Y_{u_{12}, v_{12}}(p', p') \}\, ds + \\
&\quad + \int_{(S)} \{ u^i_{11}(p') X_{u_{11}, v_{11}}(p', p') + v^i_{11}(p') Y_{u_{11}, v_{11}}(p', p') \}\, ds \Big] - \\
&- \varkappa_2 \Big[\int_{(S)} \{ u^a_{12}(p') X_{u_{12}, v_{12}}(p', p') + v^a_{12}(p') Y_{u_{12}, v_{12}}(p', p') \}\, ds + \\
&\quad + \int_{(S)} \{ u^a_{11}(p') X_{u_{11}, v_{11}}(p', p') + v^a_{11}(p') Y_{u_{11}, v_{11}}(p', p') \}\, ds \Big] = 0.
\end{aligned}
$$

Ebenso findet man

$$
\begin{aligned}
&(1 + \varkappa_1) \Big[\int_{(S)} \{ u^i_{11}(p') X_{u_{11}, v_{11}}(p', p') + v^i_{11}(p') Y_{u_{11}, v_{11}}(p', p') \}\, ds + \\
&\quad + \int_{(S)} \{ u^i_{12}(p') X_{u_{12}, v_{12}}(p', p') + v^i_{12}(p') Y_{u_{12}, v_{12}}(p', p') \}\, ds \Big] - \\
&- (1 - \varkappa_1) \Big[\int_{(S)} \{ u^a_{11}(p') X_{u_{11}, v^{11}}(p', p') + v^a_{11}(p') Y_{u_{11}, v_{11}}(p', p') \}\, ds + \\
&\quad + \int_{(S)} \{ u^a_{12}(p') X_{u_{12}, v_{12}}(p', p') + v^a_{12}(p') Y_{u_{12}, v_{12}}(p', p') \}\, ds \Big] = 0.
\end{aligned}
$$

Da die Determinante

$$
\begin{vmatrix} - \varkappa_2, & - \varkappa_2 \\ 1 + \varkappa_1, & - (1 - \varkappa_1) \end{vmatrix} = 2 \varkappa_2 \neq 0
$$

ist, so müssen die Ausdrücke in den eckigen Klammern verschwinden, d. h. es muß wegen (145)

$$
\begin{aligned}
&\iint_{(R)} \Big\{ \Big(\frac{\partial u_{11}}{\partial \eta} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial v_{11}}{\partial \xi} \Big)^2 + \frac{1}{2} \Big(\frac{\partial u_{11}}{\partial \xi} - \frac{\partial v_{11}}{\partial \eta} \Big)^2 \Big\}\, d\xi\, d\eta + \\
&+ \iint_{(R)} \Big\{ \Big(\frac{\partial u_{12}}{\partial \eta} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial v_{12}}{\partial \xi} \Big)^2 + \frac{1}{2} \Big(\frac{\partial u_{12}}{\partial \xi} - \frac{\partial v_{12}}{\partial \eta} \Big)^2 \Big\}\, d\xi\, d\eta = 0
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&\iint_{(R_a)} \Big\{ \Big(\frac{\partial u_{11}}{\partial \eta} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial v_{11}}{\partial \xi} \Big)^2 + \frac{1}{2} \Big(\frac{\partial u_{11}}{\partial \xi} - \frac{\partial v_{11}}{\partial \eta} \Big)^2 \Big\}\, d\xi\, d\eta + \\
&\iint_{(R_a)} \Big\{ \Big(\frac{\partial u_{12}}{\partial \eta} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial v_{12}}{\partial \xi} \Big)^2 + \frac{1}{2} \Big(\frac{\partial u_{12}}{\partial \xi} - \frac{\partial v_{12}}{\partial \eta} \Big)^2 \Big\}\, d\xi\, d\eta = 0
\end{aligned}
$$

sein.

Daraus entnimmt man aber, daß mit geeigneten Konstanten

$$a_{11},\ b_{11},\ c_{11};\quad a'_{11},\ b'_{11},\ c'_{11};\quad a_{12},\ b_{12},\ c_{12};\quad a'_{12},\ b'_{12},\ c'_{12}$$

die Gleichungen

$$u_{11}(P) = a_{11}\xi + b_{11},\quad v_{11}(P) = a_{11}\eta + c_{11} \text{ in } R,$$
$$u_{11}(P) = a'_{11}\xi + b'_{11},\quad v_{11}(P) = a'_{11}\eta + c'_{11} \text{ in } R_a$$

bzw.

$$u_{12}(P) = a_{12}\xi + b_{12}\quad v_{12}(P) = a_{12}\eta + c_{12} \text{ in } R,$$
$$u_{12}(P) = a'_{12}\xi + b'_{12}\quad v_{12}(P) = a'_{12}\eta + c'_{12} \text{ in } R_a$$

bestehen müssen. Da die Funktionen $u_{\mu\nu}(P)$ und $v_{\mu\nu}(P)$ aber im Unendlichen verschwinden, so ergibt sich

$$a'_{11} = b'_{11} = c'_{11} = a'_{12} = b'_{12} = c'_{12} = 0,$$

d. h.

$$u_1(P) \equiv 0,\quad v_1(P) \equiv 0 \text{ in } R_a.$$

Subtrahiert man alsdann in (163) die zweite Gleichung von der ersten und die vierte von der dritten, so findet man

$$2 f_1(p) = (a_{11} + i a_{12})\,\xi(p) + (b_{11} + i b_{12}),$$
$$2 g_1(p) = (a_{11} + i a_{12})\,\eta(p) + (c_{11} + i c_{12}).$$

Nach dem im vorhergehenden Abschnitt bewiesenen Hilfssatz ist dann aber

$$f_1(p) - \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p, p') f_1(p') + K_{\xi\eta}(p, p') g_1(p')\}\, ds = 0,$$
$$g_1(p) - \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p, p') f_1(p') + K_{\eta\eta}(p, p')\, g_1(p')\}\, ds = 0.$$

Wegen (159) mit $\varkappa = \varkappa_1 + i\varkappa_2$ $(\varkappa_2 \neq 0)$ ergibt sich somit

$$f_1(p)\,(1 + \varkappa) = 0,\quad g_1(p)\,(1 + \varkappa) = 0.$$

Da aber $f_1(p)$ und $g_1(p)$ nicht zugleich identisch verschwinden, so muß im Widerspruch zur Annahme

$$\varkappa_2 = 0$$

sein.

10. Wir können nunmehr den folgenden Hilfssatz beweisen: *Ist m eine ungerade Zahl, so besitzt das aus* (143) *durch m-fache Iteration hervorgehende homogene Integralgleichungssystem genau eine linear unabhängige Lösung, für die man eine beliebige nicht identisch verschwindende Lösung von* (143) *wählen kann.*

Beweis. Nach dem Vorgang von § 4, Abschnitt 4 schreibe man das System (143) zunächst als eine einzige Integralgleichung

$$f_1^*(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(\mathfrak{S})} K(p, p') f_1^*(p')\, ds = 0. \tag{164}$$

Die daraus durch m-fache Iteration hervorgehende Gleichung

$$f^{(m)}(p) + (-1)^{m-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{(m)} \int_{(\mathfrak{S})} K^{(m)}(p, p')\, f^{(m)}(p')\, ds = 0 \tag{165}$$

habe die nichtidentisch verschwindende Lösung $f^{(m)}$. Sind dann $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ die m-ten Einheitswurzeln, bei denen $\varepsilon_1 = 1$ die einzige reelle Wurzel sei, so setze man

$$\begin{aligned} &m\,\varphi_\mu(p) \\ &= f^{(m)}(p) - \varepsilon_\mu \frac{2}{\pi}\int_{(\mathfrak{S})} K(p, p')\, f^{(m)}(p')\, ds + \varepsilon_\mu^2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_{(\mathfrak{S})} K^{(2)}(p, p')\, f^{(m)}(p')\, ds + \\ &\quad \cdots + (-1)^{m-1}\varepsilon_\mu^{m-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{m-1}\int_{(\mathfrak{S})} K^{(m-1)}(p, p')\, f^{(m)}(p')\, ds. \end{aligned} \tag{166}$$

Die m-Funktionen $\varphi_\mu(p)$ können nicht sämtlich identisch verschwinden, da man sonst durch Addition bei Beachtung von

$$\sum_{\mu=1}^{m} \varepsilon_\mu^\varrho = 0 \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, m-1) \tag{167}$$

auf

$$f^{(m)}(p) \equiv 0$$

schließen könnte.

Verschwinde also für ein gewisses μ die Funktion $\varphi_\mu(p)$ nicht identisch. Es folgt

$$\begin{aligned} &m\,\frac{2}{\pi}\int_{(\mathfrak{S})} K(p, p')\, \varphi_\mu(p')\, ds \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{(\mathfrak{S})} K(p, p') f^{(m)}(p')\, ds - \varepsilon_\mu\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_{(\mathfrak{S})} K^{(2)}(p, p')\, f^{(m)}(p')\, ds + \\ &\quad \cdots + (-1)^{m-1}\varepsilon_\mu^{m-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)^m \int_{(\mathfrak{S})} K^{(m)}(p, p')\, f^{(m)}(p')\, ds \\ &= -\frac{m\,\varphi_\mu(p) + f^{(m)}(p)}{\varepsilon_\mu} + (-1)^{m-1}\varepsilon_\mu^{m-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)^m \int_{(\mathfrak{S})} K^{(m)}(p, p')\, f^{(m)}(p')\, ds \end{aligned}$$

und also bei Beachtung von (165)

$$\varphi_\mu(p) + \varepsilon_\mu \frac{2}{\pi}\int_{(\mathfrak{S})} K(p, p')\, \varphi_\mu(p')\, ds = 0. \tag{168}$$

Auf Grund des im Abschnitt 9 bewiesenen Hilfssatzes muß dann ε_μ reell, d. h. $\varepsilon_\mu = \varepsilon_1 = 1$ sein. Der einzige nichtverschwindende Ausdruck der Form (166) ist also der für $\mu = 1$, der wegen (168) gleich einem Vielfachen einer nichtidentisch verschwindenden Lösung $f_1^*(p)$ von (164) sein muß:

$$m\varphi_1(p) = f^{(m)}(p) - \frac{2}{\pi}\int_{(\mathfrak{S})} K(p,p')f^{(m)}(p')\,ds + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\int_{(\mathfrak{S})} K^{(2)}(p,p')f^{(m)}(p')\,ds +$$
$$\cdots + (-1)^{m-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{m-1}\int_{(\mathfrak{S})} K^{(m-1)}(p,p')f^{(m)}(p')\,ds = k_1 f_1^*(p).$$

Durch Addition der Gleichungen (166) erhält man also bei Beachtung von (167)

$$m f^{(m)}(p) = k_1 f_1^*(p),$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

11. Man wähle nun die ungerade Zahl m so groß, daß der iterierte Kern $K^{(m)}(p,q)$ auf seinem Definitionsbereich durchweg stetig ist. Nach dem eben bewiesenen Hilfssatz verschwindet die für den Kern

$$(169) \qquad (-1)^m\left(\frac{2}{\pi}\right)^m K^{(m)}(p,q)$$

gebildete Fredholmsche Unterdeterminante

$$D^{(m)}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

nicht identisch in den auf $\mathfrak{S}$ gelegenen Punkten p und q; es wird also ein solches Punktepaar p_1, q_1 geben, daß

$$(170) \qquad D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} \neq 0$$

ist.

Bildet man ebenfalls für den Kern (169) die Fredholmsche Unterdeterminante

$$D^{(m)}\begin{pmatrix} p\,p_1 \\ q\,q_1 \end{pmatrix},$$

und setzt man

$$\Omega(p,q) = -\frac{2}{\pi}K(p,q) + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 K^{(2)}(p,q) - + \cdots + (-1)^m\left(\frac{2}{\pi}\right)^m K(p,q),$$

$$(171) \qquad \Gamma^{(m)}(p,q) = \frac{D^{(m)}\begin{pmatrix} p,p_1 \\ q,q_1 \end{pmatrix}}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}},$$

$$\Gamma(p,q) = \Omega(p,q) + \int_{(\mathfrak{S})} \Omega(p,p')\,\Gamma^{(m)}(p',q)\,ds,$$

so beweist man mit der im Abschnitt 3 von § 5 benutzten Methode, daß die Funktion

$$f^*(p) = \varrho^*(p) + \int_{(S)} \Gamma(p, p')\, \varrho^*(p')\, ds \tag{172}$$

stets eine Lösung der dem inhomogenen System (142) äquivalenten Integralgleichung

$$f^*(p) + \frac{2}{\pi} \int_{(S)} K(p, p') f^*(p')\, ds = \varrho^*(p) \tag{173}$$

ist.

12. Wir sind nunmehr in der Lage, den im 8. Abschnitt bereits formulierten Satz 12 zu beweisen. Sind die S_n wieder die in R gelegenen, gegen S mit wachsendem n konvergierenden Approximationskurven, und stellt das Funktionenpaar $u(P)$, $v(P)$ eine beliebige Lösung des Problems (139), (140) dar, so verstehe man unter

$$u_{(n)}(P), \quad v_{(n)}(P)$$

die zu dem Gebiet R_n gehörigen Lösungsfunktionen der Gleichungen (139) von der Form (158), die bei Annäherung an die Berandung S_n von R_n gegen die dort von den Funktionen $u(P)$, $v(P)$ angenommenen Werte konvergieren, also

$$\begin{aligned} u_{(n)}(P) &= \frac{2}{\pi} \int_{(S_n)} \{K_{\xi\xi,n}(P, p') f_{(n)}(p') + K_{\xi\eta,n}(P, p') g_{(n)}(p')\}\, ds, \\ v_{(n)}(P) &= \frac{2}{\pi} \int_{(S_n)} \{K_{\eta\xi,\eta}(P, p') f_{(n)}(p') + K_{\eta\eta,n}(P, p') g_{(n)}(p')\}\, ds, \end{aligned} \tag{174}$$

wobei wir für die Funktionen $f_{(n)}(p)$, $g_{(n)}(p)$ die zu (172) analog gebauten, auf die Kurven $S_{(n)}$ bezüglichen Lösungen des Integralgleichungssystems

$$\begin{aligned} f_{(n)}(p) + \frac{2}{\pi} \int_{(S_n)} \{K_{\xi\xi,n}(p, p') f_{(n)}(p') + K_{\xi\eta,n}(p, p') g_{(n)}(p')\}\, ds &= [u]_{S_n}, \\ g_{(n)}(p) + \frac{2}{\pi} \int_{(S_n)} \{K_{\eta\xi,n}(p, p') f_{(n)}(p') + K_{\eta\eta,n}(p, p') g_{(n)}(p')\}\, ds &= [v]_{S_n} \end{aligned} \tag{175}$$

wählen.

Wir behaupten, daß innerhalb R_n

$$u_{(n)}(P) \equiv u(P), \quad v_{(n)}(P) \equiv v(P) \tag{176}$$

sein muß. Da nämlich $u_{(n)}(P)$ und $v_{(n)}(P)$ in $R_n + S_n$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen, so gilt dasselbe von den Differenzfunktionen

$$\bar{u}_{(n)}(P) = u_{(n)}(P) - u(P), \quad \bar{v}_{(n)}(P) = v_{(n)}(P) - v(P).$$

Wählt man zu der Potentialfunktion

$$\bar{\vartheta}_{(n)}(P) = \frac{\partial \bar{u}_{(n)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}_{(n)}}{\partial \eta} = \frac{\partial u_{(n)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_{(n)}}{\partial \eta} - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi}\int\limits_{(S_n)} f_{(n)}(p') \frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds + \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \eta}\int\limits_{(S_n)} g_{(n)}(p') \frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds - \vartheta$$

als konjugierte Potentialfunktion die Funktion

$$\bar{\chi}_{(n)}(P) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \eta}\int\limits_{(S_n)} f_{(n)}(p') \frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds + \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi}\int\limits_{(S_n)} g_{(n)}(p') \frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds -$$

$$- \int\limits_{(C)} \left\{\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} d\xi\right\},$$

wobei C eine in R_n gelegene Kurve bedeutet, die von einem beliebigen festen Punkt P_0 zu dem variablen Punkt P verläuft, so ist $\bar{\chi}_{(n)}(P)$ in $R_n + S_n$ stetig. Da aber die Randwerte der Funktionen $\bar{u}_{(n)}(P)$, $\bar{v}_{(n)}(P)$, die sich ergeben, wenn sich der in R_n gelegene Punkt P der Berandung S_n nähert, verschwinden, so folgt aus dem für den Bereich $R_n + S_n$ benutzten Integralsatz (145), daß in R_n, wie behauptet

$$\bar{u}_{(n)}(P) = u_{(n)}(P) - u(P) \equiv 0, \quad \bar{v}_{(n)}(P) = v_{(n)}(P) - v(P) \equiv 0$$

sein muß.

Sind nun die in (171) auftretenden, auf $\mathfrak{S}$ gelegenen Punkte p_1 und q_1 so gewählt, daß (170) gilt, und sind p_{1n}, q_{1n} zwei auf den $\mathfrak{S}_{(n)}$ gelegene Punktfolgen mit

$$p_{1n} \underset{(n)}{\longrightarrow} p_1, \quad q_{1n} \underset{(n)}{\longrightarrow} q_1,$$

so muß von einem gewissen n ab auch

$$D^{(n)}\begin{pmatrix} p_{1n} \\ q_{1n} \end{pmatrix} \neq 0$$

sein, und man erkennt, daß bei unbegrenzt wachsendem n die Funktionen $f_{(n)}(p)$, $g_{(n)}(p)$ gegen die durch (172) gegebenen Lösungen von (142) und damit die Funktionen (174) gegen die wohlbestimmten Lösungsfunktionen (158) des Problems (139), (140) konvergieren. Wegen (176) ist also eine beliebige Lösung $u(P)$, $v(P)$ mit der durch (158) gegebenen Lösung identisch und damit eindeutig bestimmt.

§ 7.

Das äußere Problem in der Ebene.

1. In diesem letzten Paragraphen beweisen wir den folgenden Existenz- und Eindeutigkeitssatz:

Hauptsatz IV. *Genügt die Randkurve des einfach zusammenhängenden, ganz im Endlichen gelegenen Gebietes R den in § 1 genannten Voraussetzungen, und sind die auf S definierten Funktionen ϱ und σ dort stetig und genügen sie der Relation*

$$\int_{(S)} \{\varrho(p') \cos(n_{p'}, \eta) - \sigma(p') \cos(n_{p'}, \xi)\}\, ds = 0, \tag{177}$$

dann gibt es (bis auf eine additive Konstante) genau eine im Außengebiet R_a von R eindeutige biharmonische Funktion U, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in $R_a + S$ stetig sind, auf S bzw. mit ϱ und σ übereinstimmen und im Unendlichen sich beschränkt verhalten, während die partiellen Ableitungen zweiter Ordnungen im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}^3}$ verschwinden[54]).

Existiert im Gebiet R_a eine biharmonische Funktion mit den verlangten Eigenschaften, so gilt wieder mit

$$u = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = \Delta U \tag{178}$$

offensichtlich

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \qquad \Delta\theta = 0 \tag{179}$$

und

$$[u]_S = \varrho, \quad [v]_S = \sigma. \tag{180}$$

Hinsichtlich des Problems (179), (180) besteht aber der in den nächsten Abschnitten zu beweisende

Satz 13. *Sind die Funktionen ϱ und σ auf S stetig, so gibt es eine Lösung u, v des Problems* (179), (180), *die im Unendlichen sich beschränkt verhält, während ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung wie $\frac{1}{r_{OP}^3}$ verschwinden.*

Beim Vergleich dieses Satzes mit dem entsprechenden Satz 11 für das innere Problem im ebenen Fall fällt auf, daß hier die Voraussetzung (177)

---

[54]) Es würde genügen vorauszusetzen, daß die partiellen Ableitungen erster Ordnung von U sich im Unendlichen beschränkt verhalten und daß für $r_{OP} \to \infty$

$$\lim (r_{OP}\, D^1 U) = 0$$

ist — eine Bemerkung, die sich sinngemäß auch auf die folgenden Sätze 13 und 14 übertragen läßt.

nicht benötigt wird. Will man aber umgekehrt von einer Lösung u, v von (179), (180) ausgehend eine in R_a eindeutige biharmonische Funktion U finden, für die (178) gilt, indem man

$$U(P) = \int_{(C)} \{u\,d\xi + v\,d\eta\}$$

setzt, wobei C eine ganz in R_a verlaufende Kurve darstellt, die einen beliebig gewählten, aber festen Punkt P_0 mit einem variablen Punkt P verbindet, so müssen die gegebenen Randfunktionen offenbar notwendig der Gleichung (177) genügen. Verzichtet man jedoch auf die Eindeutigkeit von U, so kann die Voraussetzung (177), die für das innere Problem immer gefordert werden mußte, entbehrt werden.

2. Mit den durch (141) gegebenen Kernen betrachte man das inhomogene Integralgleichungssystem

$$\begin{aligned} f(p) - \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p, p')f(p') + K_{\xi\eta}(p, p')g(p')\}ds &= \varrho(p), \\ g(p) - \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p, p')f(p') + K_{\eta\eta}(p, p')g(p')\}ds &= \sigma(p). \end{aligned} \tag{181}$$

Das zugehörige homogene System

$$\begin{aligned} f_1(p) - \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p, p')f_1(p') + K_{\xi\eta}(p, p')g_1(p')\}ds &= 0, \\ g_1(p) - \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p, p')f_1(p') + K_{\eta\eta}(p, p')g_1(p')\}ds &= 0 \end{aligned} \tag{182}$$

besitzt nach dem Hilfssatz im Abschnitt 8 von § 6 die drei linear unabhängigen Lösungen

$$\begin{aligned} f_{11}(p) &= \xi(p), & g_{11}(p) &= \eta(p), \\ f_{12}(p) &= k, & g_{12}(p) &= 0, \\ f_{13}(p) &= 0, & g_{13}(p) &= l. \end{aligned} \tag{183}$$

Als Hilfssatz wollen wir nunmehr beweisen: *Jede beliebige Lösung* $f_1(p), g_1(p)$ *von* (182) *ist von den durch* (183) *gegebenen Lösungen linear abhängig.*

Beweis. Mit Hilfe von $f_1(p)$ und $g_1(p)$ bilde man die durch

$$\begin{aligned} u_1(P) &= \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(P, p')f_1(p') + K_{\xi\eta}(P, p')g_1(p')\}ds, \\ v_1(P) &= \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(P, p')f_1(p') + K_{\eta\eta}(P, p')g_1(p')\}ds \end{aligned} \tag{184}$$

gegebenen Funktionen, die sowohl im Gebiet R als auch im Gebiet R_a Lösungen der Differentialgleichungen (179) darstellen. Für sie bestehen bei Beachtung von (55), (56), (57), (58) und (182) die Limesrelationen

$$\lim_{P_n^a \to p} u_1(P_n^a) = f_1(p) - \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p, p') f_1(p') + K_{\xi\eta}(p, p') g_1(p')\}\, ds = 0,$$

$$\lim_{P_n^a \to p} v_1(P_n^a) = g_1(p) - \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p, p') f_1(p') + K_{\eta\eta}(p, p') g_1(p')\}\, ds = 0,$$

(185)

$$\lim_{P_n^i \to p} u_1(P_n^i) = f_1(p) + \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p, p') f_1(p') + K_{\xi\eta}(p, p') g_1(p')\}\, ds = 2 f_1(p),$$

$$\lim_{P_n^i \to p} v_1(P_n^i) = g_1(p) + \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p, p') f_1(p') + K_{\eta\eta}(p, p') g_1(p')\}\, ds = 2 g_1(p).$$

Da die partiellen Ableitungen erster Ordnung von u_1, v_1 in $R + S$ als auch in $R_a + S$ stetig sind und zusammen mit der zu

$$\vartheta_1 = \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{(S)} f_1(p') \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\, ds + \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{(S)} g_1(p') \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\, ds$$

konjugierten Potentialfunktion

$$\chi_1 = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{(S)} f_1(p') \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\, ds + \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{(S)} g_1(p') \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\, ds$$

im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ verschwinden, und u_1 und v_1 dort ebenfalls verschwinden, so folgt aus der auf das Gebiet R_a bezüglichen Relation (145) bei Beachtung der ersten beiden Gleichungen (185), daß im Gebiet R_a

$$u_1(P) \equiv 0 \quad \text{und} \quad v_1(P) \equiv 0$$

sein muß. Da somit auch $\vartheta_1(P)$ in R_a identisch verschwindet, so gilt das auch für die konjugierte Potentialfunktion $\chi_1(P)$, die ja im Unendlichen von vornherein verschwindet.

Damit bekommt man für die durch (147) gegebenen Ausdrücke, die sich nach den Bemerkungen im Abschnitt 5 von § 6 beim Durchgang durch die Fläche stetig verhalten, zunächst

$$\lim_{P_n^a \to p} X_{u_1, v_1}(P_n^a, p) = 0,$$

$$\lim_{P_n^a \to p} Y_{u_1, v_1}(P_n^a, p) = 0$$

und also auch

$$\lim_{P_n^i \to p} X_{u_1, v_1}(P_n^i, p) = 0,$$

$$\lim_{P_n^i \to p} Y_{u_1, v_1}(P_n^i, p) = 0.$$

Aus (145) folgt dann aber unmittelbar, daß im Gebiet R

$$u_1(P) \equiv a_1 \xi + b_1, \quad v_1(P) \equiv a_1 \eta + c_1$$

sein muß, wo a_1, b_1, c_1 Konstanten sind. Wegen der beiden letzten Gleichungen von (185) hat man also

$$f_1(p) = \tfrac{1}{2}(a_1 \xi(p) + b_1), \quad g_1(p) = \tfrac{1}{2}(a_1 \eta(p) + c_1),$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

3. Das zu dem System (182) assoziierte Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_2(p) - \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p', p) f_2(p') + K_{\xi\eta}(p', p) g_2(p')\}\, ds = 0, \\ g_2(p) - \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p', p) f_2(p') + K_{\eta\eta}(p', p) g_2(p')\}\, ds = 0 \end{aligned} \tag{186}$$

besitzt dann ebenfalls genau drei linear unabhängige Lösungen

$$f_{21}(p),\ g_{21}(p); \quad f_{22}(p),\ g_{22}(p); \quad f_{23}(p),\ g_{23}(p),$$

so daß man als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das System (181) eine Lösung besitzt

$$\begin{aligned} \int_{(S)} \{\varrho(p') f_{21}(p') + \sigma(p') g_{21}(p')\}\, ds = 0, \\ \int_{(S)} \{\varrho(p') f_{22}(p') + \sigma(p') g_{22}(p')\}\, ds = 0, \\ \int_{(S)} \{\varrho(p') f_{23}(p') + \sigma(p') g_{23}(p')\}\, ds = 0 \end{aligned} \tag{187}$$

erhält.

Erfüllen die gegebenen Randfunktionen diese Bedingungen, so liefern die mit einer Lösung $f(p)$, $g(p)$ des Systems (181) gebildeten Funktionen

$$u(P) = \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(P, p') f(p') + K_{\xi\eta}(P, p') g(p')\}\, ds.$$

$$v(P) = \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(P, p') f(p') + K_{\eta\eta}(P, p') g(p')\}\, ds \tag{188}$$

offenbar eine Lösung des Problems (179), (180).

4. Der Fall, daß die Bedingungen (187) nicht erfüllt sind, erfordert eine ähnliche Sonderbetrachtung, wie sie beim äußeren Problem im Raume durchgeführt wurde. Liegt der Ursprung 0 des ξ, η-Koordinatensystems im Gebiet R, so genügen die Funktionen

$$u_0(P) = \frac{\xi}{r_{0P}^3}, \quad v_0(P) = \frac{\eta}{r_{0P}^3} \tag{189}$$

im Gebiet R_a den Differentialgleichungen (179). Wir behaupten, daß diese Funktionen sich nicht in der Form

$$u_0(P) = \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(P, p') f_0(p') + K_{\xi\eta}(P, p') g_0(p')\}\, ds,$$

$$v_0(P) = \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(P, p') f_0(p') + K_{\eta\eta}(P, p') g_0(p')\}\, ds \tag{190}$$

mit auf S stetigen Funktionen $f_0(p)$ und $g_0(p)$ darstellen lassen. Da nämlich nach (141) ausführlich geschrieben

$$K_{\xi\xi}(P, p) = \frac{\cos^2(r_{pP}, \eta) \cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}}$$

und

$$K_{\xi\eta}(P, p) = -\frac{\cos(r_{pP}, \xi) \cos(r_{pP}, \eta) \cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}}$$

ist, und gleichmäßig für alle Punkte p auf S, falls der Punkt P auf der positiven ξ-Achse ins Unendliche rückt, die Limesbeziehungen

$$\frac{r_{0P}}{r_{pP}} \to 1, \quad \cos(r_{pP}, \xi) \to 1, \quad \cos(r_{pP}, \eta) \to 0, \quad \cos(r_{pP}, n_p) \to \cos(\xi, n_p)$$

bestehen, so wird für die auf der rechten Seite von (190) gegebene Funktion $u_0(P)$ bei diesem Grenzübergang

$$r_{0P} u_0(P) \to 0,$$

im Gegensatz zu dem Limesverhalten der auf der rechten Seite von (189) gegebenen Funktion $u_0(P)$, für die

$$r_{0P} u_0(P) = \frac{\xi}{r_{0P}} \to 1$$

sein muß.

5. Verschwinden nun für die gegebenen Randfunktionen ϱ, σ die linken Seiten von (187) nicht gleichzeitig, so behaupten wir, daß sich drei Konstanten h, k, l so bestimmen lassen, daß die Bedingungen (187) für die neuen Randfunktionen

$$\bar{\varrho}(p) = \varrho(p) - h\frac{\xi(p)}{r_{Op}^3} - k, \quad \bar{\sigma}(p) = \sigma(p) - h\frac{\eta(p)}{r_{Op}^3} - l \tag{191}$$

erfüllt sind. Dazu müßten die drei Konstanten aus dem linearen inhomogenen Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
h\int_{(S)}\left\{\frac{\xi(p')}{r_{Op'}^3}f_{21}(p') + \frac{\eta(p')}{r_{Op'}^3}g_{21}(p')\right\}ds + k\int_{(S)}f_{21}(p')ds + l\int_{(S)}g_{21}(p')ds \\
= \int_{(S)}\{\varrho(p')f_{21}(p') + \sigma(p')\,g_{21}(p')\}\,ds, \\
h\int_{(S)}\left\{\frac{\xi(p')}{r_{Op'}^3}f_{22}(p') + \frac{\eta(p')}{r_{Op'}^3}g_{22}(p')\right\}ds + k\int_{(S)}f_{22}(p')ds + l\int_{(S)}g_{22}(p')\,ds \\
= \int_{(S)}\{\varrho(p')f_{22}(p') + \sigma(p')g_{22}(p')\}\,ds, \\
h\int_{(S)}\left\{\frac{\xi(p')}{r_{Op'}^3}f_{23}(p') + \frac{\eta(p')}{r_{Op'}^3}g_{23}(p')\right\}ds + k\int_{(S)}f_{23}(p')\,ds + l\int_{(S)}g_{23}(p')\,ds \\
= \int_{(S)}\{\varrho(p')f_{23}(p') + \sigma(p')g_{23}(p')\}ds
\end{aligned} \tag{192}$$

ermittelt werden. Die Koeffizientendeterminante dieses Gleichungssystems ist, wie alsbald gezeigt werden wird, ungleich Null, so daß eine solche Bestimmung stets eindeutig möglich ist.

Es existieren also zwei Funktionen $\bar{f}(p)$ und $\bar{g}(p)$ als Lösungen eines inhomogenen Integralgleichungssystems der Form (181), bei dem als inhomogene Bestandteile statt ϱ und σ die durch (191) gegebenen Funktionen gewählt sind. Die mit ihnen gebildeten Funktionen

$$\begin{aligned}
u(P) &= \frac{2}{\pi}\int_{(S)}\{K_{\xi\xi}(P, p')\,\bar{f}(p') + K_{\xi\eta}(P, p')\,\bar{g}(p')\}\,ds + h\frac{\xi}{r_{OP}^3} + k, \\
v(P) &= \frac{2}{\pi}\int_{(S)}\{K_{\eta\xi}(P, p')\,\bar{f}(p') + K_{\eta\eta}(P, p')\,\bar{g}(p')\}\,ds + h\frac{\eta}{r_{OP}^3} + l
\end{aligned} \tag{193}$$

lösen alsdann offenbar das Problem (178), (179), womit Satz 13 ganz allgemein bewiesen ist.

Die für den Fall der Gültigkeit von (187) durch (190) gegebene Lösung ist offenbar in (193) mitenthalten, da in diesem Fall die sich aus (192) ergebenden Konstanten h, k, l sämtlich verschwinden müssen.

6. Nehmen wir, um den Beweis zu vervollständigen, an, daß die erwähnte Koeffizientendeterminante gleich Null ist. Das zu (192) gehörige, für $\varrho = \sigma = 0$ sich ergebende homogene lineare Gleichungssystem besitzt dann eine nicht triviale Lösung h, k, l. Also gibt es zwei Funktionen $\bar{\bar{f}}(p)$ und $\bar{\bar{g}}(p)$, die einem inhomogenen Integralgleichungssystem der Form (181) genügen, dessen inhomogene Bestandteile die Funktionen

$$h\frac{\xi(p)}{r_{Op}^2} + k, \quad h\frac{\eta(p)}{r_{Op}^2} + l \tag{194}$$

sind. Die mit $\bar{\bar{f}}, \bar{\bar{g}}$ gebildeten Funktionen

$$\begin{aligned} \bar{\bar{u}}(P) &= \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(P,p')\,\bar{\bar{f}}(p') + K_{\xi\eta}(P,p')\,\bar{\bar{g}}(p')\}\,ds, \\ \bar{\bar{v}}(P) &= \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(P,p')\,\bar{\bar{f}}(p') + K_{\eta\eta}(P,p')\,\bar{\bar{g}}(p')\}\,ds \end{aligned} \tag{195}$$

von der Form (188) genügen im Gebiet R_a den Differentialgleichungen (179) und nehmen auf S die Randwerte

$$[\bar{\bar{u}}]_S = h\frac{\xi(p)}{r_{Op}^2} + k, \quad [\bar{\bar{v}}]_S = h\frac{\eta(p)}{r_{Op}^2} + l \tag{196}$$

an. Die Funktionen

$$u^*(P) = \bar{\bar{u}}(P) - \left(h\frac{\xi}{r_{OP}^2} + k\right), \quad v^*(P) = \bar{\bar{v}}(P) - \left(h\frac{\eta}{r_{OP}^2} + l\right) \tag{197}$$

sind dann im Gebiet R_a ebenfalls Lösungen der Gleichungen (179) und konvergieren bei Annäherung an S wegen (196) gegen die Randwerte

$$[u^*]_S = 0, \quad [v^*]_S = 0. \tag{198}$$

Da die Funktionen (194) auf S Tangentialableitungen besitzen, die einer gleichmäßigen H-Bedingung genügen, so gilt dasselbe von den Funktionen $\bar{\bar{f}}(p)$, $\bar{\bar{g}}(p)$, und damit existieren von den Funktionen (197) in $R_a + S$ die im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ verschwindenden ersten partiellen Ableitungen.

Wählt man als zu

$$\vartheta^* = \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \frac{\partial v^*}{\partial \eta} = \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi}\int_{(S)} \bar{\bar{f}}(p')\,\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds + \\ + \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \eta}\int_{(S)} \bar{\bar{g}}(p')\,\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds$$

konjugierte Potentialfunktion

$$\chi^* = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial\xi}\int_{(S)}\bar{\bar{f}}(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}ds + \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial\xi}\int_{(S)}\bar{\bar{g}}(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}ds,$$

so ist χ^* in $R_a + S$ stetig und verschwindet im Unendlichen ebenfalls wie $\frac{1}{r_{OP}^3}$. Da somit die mit diesem χ^* gebildeten Funktionen

$$X_{u^*,v^*}(P,p), \quad Y_{u^*,v^*}(P,p)$$

in $R_a + S$ stetig sind und im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ gegen Null gehen, während die Funktionen u^*, v^* selbst im Unendlichen sich beschränkt verhalten und auf S wegen (198) verschwindende Randwerte annehmen, so folgt aus dem auf $R_a + S$ angewandten Integralsatz (145), daß in R_a

$$u^*(P) \equiv 0, \quad v^*(P) \equiv 0,$$

d. h. wegen (197)

$$h\frac{\xi}{r_{OP}^3} + k \equiv \bar{\bar{u}}(P), \quad h\frac{\eta}{r_{OP}^3} + l \equiv \bar{\bar{v}}(P)$$

sein muß. Das ist aber nach dem im Abschnitt 4 Bewiesenen nicht möglich, so daß wir bei der zu Beginn dieses Abschnitts gemachten Annahme zu einem Widerspruch gelangt sind.

7. Schreibt man das Integralgleichungssystem für die Funktionen $\bar{f}(p)$, $\bar{g}(p)$ als eine einzige Integralgleichung in der Form

$$\bar{f}^*(p) - \frac{2}{\pi}\int_{(\mathfrak{S})} K(p,p')\bar{f}^*(p')\,ds = \bar{\varrho}^*(p), \tag{199}$$

so sei die ungerade Zahl m so gewählt, daß der iterierte Kern $K^{(m)}(p,q)$ auf seinem Definitionsbereich stetig ist. Man überlegt dann genau wie in § 6, daß der Kern

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^m K^{(m)}(p,q) \tag{200}$$

genau drei linear unabhängige Eigenfunktionen besitzt, so daß die für ihn gebildete Fredholmsche Determinante

$$D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}$$

nicht identisch in den auf $\mathfrak{S}$ variierenden Größen p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3 verschwindet. Wir wählen für diese sechs Größen ein spezielles Wertesystem, für das diese Determinante nicht verschwindet.

Bildet man weiter für den Kern (200) die Fredholmsche Unterdeterminante

$$D^{(m)}\begin{pmatrix} p & p_1 & p_2 & p_3 \\ q & q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}$$

und setzt man

$$\Omega(p,q) = \left(\frac{2}{\pi}\right) K(p,q) + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 K(p,q) + \cdots + \left(\frac{2}{\pi}\right)^m K^{(m)}(p,q),$$

$$\Gamma^{(m)}(p,q) = \frac{D^{(m)}\begin{pmatrix} p & p_1 & p_2 & p_3 \\ q & q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}},$$

$$\Gamma(p,q) = \Omega(p,q) + \int_{(\mathfrak{S})} \Omega(p,p')\Gamma^{(m)}(p',q)\,ds,$$

so wähle man für $\bar{f}^*(p)$ im Hinblick auf eine spätere Anwendung die durch

$$\bar{f}^*(p) = \bar{\varrho}^*(p) + \int_{(\mathfrak{S})} \Gamma(p,p')\,\bar{\varrho}^*(p')\,ds \tag{201}$$

gegebene Lösung der Integralgleichung (199).

Die drei linear unabhängigen Lösungen

$$f_{21}(p),\ g_{21}(p);\quad f_{22}(p),\ g_{22}(p);\quad f_{23}(p),\ g_{23}(p)$$

des assoziierten homogenen Systems (186) denke man sich ferner durch die drei linear unabhängigen Lösungen

$$f_{21}^*(p) = D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p & q_2 & q_3 \end{pmatrix},\ f_{22}^*(p) = D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & p & q_3 \end{pmatrix},\ f_{23}^*(p) = D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & p \end{pmatrix} \tag{202}$$

der zu (186) äquivalenten Integralgleichung

$$f_2^*(p) - \frac{2}{\pi}\int_{(\mathfrak{S})} K(p',p) f_2^*(p')\,ds = 0$$

gegeben.

8. Den Satz 13 ergänzen wir zum Schluß durch folgenden Eindeutigkeitssatz:

Satz 14. *Sind die Funktionen ϱ und σ auf S stetig, so kann es höchstens eine Lösung des Problems* (179), (180) *geben, die sich im Unendlichen beschränkt verhält, während ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ verschwinden.*

Genügen die gegebenen Randfunktionen ϱ und σ der Bedingung (177), so beweisen die Sätze 13 und 14 zusammengenommen den Hauptsatz IV.

Beweis von Satz 14. Sind die S_n^a wieder die in R_a gelegenen gegen S konvergierenden Approximationskurven, und stellt das Funktionenpaar $u(P)$,

$v(P)$ eine beliebige Lösung des Problems (179), (180) dar, so verstehe man unter

$$u_{(n)}(P), \quad v_{(n)}(P)$$

die zu dem Gebiet R_n^a gehörigen Lösungsfunktionen der Gleichungen (179) von der Form (193), die bei Annäherung an die Berandung S_n^a von R_n^a gegen die dort von den Funktionen $u(P)$, $v(P)$ angenommenen Werte konvergieren, also

$$u_{(n)}(P) = \frac{2}{\pi}\int_{(S_n^a)} \{K_{\xi\xi,n}(P, p')f_{(n)}(p') + K_{\xi\eta,n}(P, p')g_{(n)}(p')\}\,ds + \\ + h_n\frac{\xi}{r_{OP}^2} + k_n,$$

(203)

$$v_{(n)}(P) = \frac{2}{\pi}\int_{(S_n^a)} \{K_{\eta\xi,n}(P, p')f_{(n)}(p') + K_{\eta\eta,n}(P, p')g_{(n)}(p')\}ds + \\ + h_n\frac{\eta}{r_{OP}^2} + l_n,$$

wobei wir für die Funktionen $f_{(n)}(p)$, $g_{(n)}(p)$ die zu (201) analog gebauten, auf die Kurven S_n^a bezüglichen Lösungen des Integralgleichungssystems

$$f_{(n)}(p) - \frac{2}{\pi}\int_{(S_n^a)} \{K_{\xi\xi,n}(p, p')f_{(n)}(p') + K_{\xi\eta,n}(p, p')g_{(n)}(p')\}\,ds \\ = \left[u - h_n\frac{\xi(P)}{r_{OP}^2} - k_n\right]_{S_n^a},$$

$$g_{(n)}(p) - \frac{2}{\pi}\int_{(S_n^a)} \{K_{\eta\xi,n}(p, p')f_{(n)}(p') + K_{\eta\eta,n}(p, p')g_{(n)}(p')\}\,ds \\ = \left[v - h_n\frac{\eta(P)}{r_{OP}^2} - l_n\right]_{S_n^a}$$

wählen.

Wir behaupten, daß innerhalb R_n^a

$$u_{(n)}(P) \equiv u(P), \quad v_{(n)}(P) \equiv v(P) \tag{204}$$

sein muß. Da nämlich $u_{(n)}(P)$ und $v_{(n)}(P)$ in $R_n^a + S_n^a$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen, so gilt dasselbe von den Differenzfunktionen

$$\bar{u}_{(n)}(P) = u_{(n)}(P) - u(P), \quad \bar{v}_{(n)}(P) = v_{(n)}(P) - v(P).$$

Zu der Potentialfunktion

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta},$$

deren partielle Ableitungen erster Ordnung im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}^3}$ verschwinden, gehört nun die im Gebiet R_a eindeutige konjugierte Potentialfunktion

$$\chi(P) = \int_{(C)} \left\{\frac{\partial\chi}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial\chi}{\partial\eta}d\eta\right\} = \int_{(C)} \left\{\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}d\eta - \frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}d\xi\right\}, \tag{205}$$

wobei C eine ganz in R_a gelegene Kurve bedeutet, die von einem beliebigen festen Punkt P_0 zu dem variablen Punkt P verläuft. Daß $\chi(P)$ durch (205) in R_a wirklich als eindeutige Funktion erklärt wird, folgt daraus, daß

$$\oint_{(C)} \left\{\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} d\xi\right\} = 0 \tag{206}$$

ist, wenn über irgendeine in R_a gelegene geschlossene Kurve C integriert wird, auch dann, wenn C das Gebiet R in seinem Innern enthält. Denn versteht man im letzteren Falle unter K_0 einen Kreis um den in R gelegenen Ursprung 0 des Koordinatensystems, der C und damit auch R in seinem Innern enthält, so muß nach dem Gaussschen Integralsatz, da in dem zwischen C und K gelegenen Teilgebiet von R_a

$$\Delta \vartheta = 0$$

ist,

$$\oint_{C} \left\{\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} d\xi\right\} = \oint_{K_0} \left\{\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} d\xi\right\}$$

sein. Da aber das rechts stehende Integral, wenn der Radius von K_0 unbegrenzt wächst, gegen 0 konvergiert, so ist (206) bewiesen.

Die durch (205) gegebene Funktion $\chi(P)$ verschwindet im Unendlichen offenbar wie $\frac{1}{r_{0P}^2}$. Wählt man nun zu der Potentialfunktion

$$\overline{\vartheta}_{(n)}(P) = \frac{\partial \overline{u_{(n)}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \overline{v_{(n)}}}{\partial \eta} - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi}\int_{(S_n^a)} f_{(n)}(p') \frac{\partial\left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds + \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \eta}\int_{(S_n^a)} g_{(n)}(p') \frac{\partial\left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds - \vartheta$$

als in R_a eindeutige konjugierte Potentialfunktion die Funktion

$$\bar{\chi}_{(n)}(P) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \eta}\int_{(S_n^a)} f_{(n)}(p') \frac{\partial\left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds + \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi}\int_{(S_n^a)} g_{(n)}(p') \frac{\partial\left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds -$$

$$- \int_{(C)} \left\{\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} d\xi\right\},$$

so ist $\overline{\chi}_{(n)}(P)$ in $R_n^a + S_n^a$ stetig und verschwindet ebenso wie die ersten partiellen Ableitungen von $\overline{u_{(n)}}$ und $\overline{v_{(n)}}$ im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{0P}^2}$. Da aber die Randwerte der Funktionen $\overline{u_{(n)}}(P)$, $\overline{v_{(n)}}(P)$, die sich ergeben, wenn der in R_n^a gelegene Punkt P gegen die Berandung S_n^a konvergiert, verschwinden,

und die Funktionen selbst sich im Unendlichen beschränkt verhalten, so folgt aus dem auf $R_n^a + S_n^a$ angewandten Integralsatz (145), daß, wie behauptet,

$$\overline{u_{(n)}}(P) = u_{(n)}(P) - u(P) \equiv 0, \quad \overline{v_{(n)}}(P) = v_{(n)}(P) - v(P) \equiv 0$$

sein muß.

Sind nun $p_{1n}, p_{2n}, p_{3n}; q_{1n}, q_{2n}, q_{3n}$ sechs auf den $\mathfrak{S}_{(n)}$ gelegene Punktfolgen, für die die Limesbeziehungen

$$p_{1n} \underset{(n)}{\longrightarrow} p_1, \quad p_{2n} \underset{(n)}{\longrightarrow} p_2, \quad p_{3n} \underset{(n)}{\longrightarrow} p_3,$$
$$q_{1n} \underset{(n)}{\longrightarrow} q_1, \quad q_{2n} \underset{(n)}{\longrightarrow} q_2, \quad q_{3n} \underset{(n)}{\longrightarrow} q_3$$

bestehen, so muß von einem gewissen n ab

$$D_{(n)}^{(m)} \begin{pmatrix} p_{1n} & p_{2n} & p_{3n} \\ q_{1n} & q_{2n} & q_{3n} \end{pmatrix} \neq 0$$

sein, und man erkennt, daß bei unbegrenzt wachsendem n die Funktionen $f_{(n)}(p)$, $g_{(n)}(p)$ gegen die durch (201) gegebenen Funktionen $\overline{f}(p)$, $\overline{g}(p)$ konvergieren, wenn man noch beachtet, daß die Konstanten h_n, k_n, l_n, die mit Hilfe der durch (202) gegebenen Funktionen

$$f_{21,n}(p), \; g_{21,n}(p); \quad f_{22,n}(p), \; g_{22,n}(p); \quad f_{23,n}(p), \; g_{23,n}(p)$$

gewonnen werden, für $n \to \infty$ gegen die aus dem Gleichungssystem (192) zu bestimmenden Konstanten h, k, l konvergieren.

Damit konvergieren aber die Funktionen (203) gegen die durch (193) gegebenen Lösungsfunktionen des Problems (179), (180). Wegen (204) ist also eine beliebige Lösung $u(P)$, $v(P)$ mit der Lösung (193) identisch und damit eindeutig bestimmt.

(Eingegangen am 22. Mai 1942.)

Über die dichteste Kugellagerung.

Von

L. Fejes in Kolozsvár.

1. Wir betrachten einen hinreichend großen Würfel des gewöhnlichen euklidischen Raumes und legen in denselben in einer gewissen Anordnung eine Anzahl gleichgroßer Kugeln, etwa vom Halbmesser 1. Als Maß für die Dichte dieser Kugellagerung erklären wir den Gesamtinhalt der eingelagerten Kugeln geteilt durch den Inhalt des gegebenen Würfels. Weiter betrachten wir nun eine Folge von Würfeln $W_1, W_2, \ldots, W_i, \ldots$, deren Inhalte unbegrenzt zunehmen, und zugleich mit jedem Würfel W_i den Maximalwert $\overline{D}_i$ der Dichten aller möglichen Kugellagerungen. Die Zahlenfolge $\overline{D}_1, \overline{D}_2, \ldots, \overline{D}_i, \ldots$ strebt dann einem Grenzwert zu: $\overline{D}_i \to \overline{D}$. Wir wollen uns in diesem Aufsatz einer Abschätzung dieser Grenzdichte $\overline{D}$ zuwenden.

In dem Werke von Hilbert-Cohn-Vossen: Anschauliche Geometrie, § 7 (Berlin, Springer, 1932) wird das Problem der dichtesten gitterförmigen Kugellagerung behandelt. Es werden hier also nur derartige Kugelanordnungen zum Vergleich zugelassen, deren Mittelpunkte ein räumliches Gitter bilden. Als Lösung ergibt sich die „rhomboedrische Kugellagerung" mit einer Dichte

$$D_0 = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{6} = 0{,}7405.$$

Über das Problem der dichtesten Kugellagerung bei einer beliebigen Kugelanordnung steht dort S. 46: „... Andersartige Untersuchungen werden nötig, wenn man die Forderung nach regelmäßiger Anordnung der Kreise oder Kugeln fallen läßt und z. B. nur verlangt, daß möglichst viele gleichgroße Kreise (Kugeln) in jedem hinreichend großen Gebiet der Ebene (des Raumes) enthalten sind. Für den Fall der Ebene ist bewiesen worden, daß die Kreise dann von selbst gitterförmig angeordnet sein müssen. Im drei- und mehrdimensionalen Raum ist die Frage noch nicht geklärt."

Die Frage, ob es eine Kugellagerung mit einer Dichte $D > D_0$ gibt, ist daher noch nicht gelöst. Wir wollen jedoch zeigen, daß *die Dichte einer beliebigen*[1] *Kugellagerung stets kleiner ist als der Inhalt einer Kugel geteilt durch den Inhalt des umbeschriebenen regulären Dodekaeders*:

$$\overline{D} < \frac{4\pi}{3} : 10\sqrt{2\,(65-29\sqrt{5})} = 0{,}7546. \tag{1}$$

Die rechtsstehende Konstante liegt nur weniger als 2% oberhalb D_0.

[1]) In dem Beweis haben wir uns teilweise lediglich auf die Anschauung gestützt. Der Beweis bezieht sich daher ganz strenggenommen nur auf derartige Kugellagerungen,

Wir können unser Ergebnis auch etwas anders aussprechen: Ein räumliches Gebiet mit einem hinreichend großen Inhalt J enthält angenähert höchstens $\frac{3}{4\pi}\overline{D}J = 0{,}1802\,J$ Einheitskugeln. Wir wissen dabei bereits, daß diese Konstante nicht unter $\frac{\sqrt{2}}{8} = 0{,}1768$ gedrückt werden kann.

2. Vor dem Beweis wenden wir uns zunächst dem entsprechenden Problem in der Ebene zu[2]): Es seien demnach in einem Quadrat vom Flächeninhalt T n Kreise mit dem gemeinsamen Halbmesser 1 vorhanden, die sich teilweise berühren können, aber nie überdecken. Bezeichnen wir die Kreismittelpunkte mit $P_1, P_2, \ldots, P_n$, so gilt für ein beliebiges Punktpaar $\overline{P_i P_k} \geqq 2$ ($i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq k$).

Wir greifen einen beliebigen Punkt, etwa P_i, heraus und errichten auf sämtlichen Strecken P_iP_1, $P_iP_2, \ldots, P_iP_n$ in ihren Mittelpunkten die Lote. Wir betrachten ferner von den Halbebenen, die durch diese Lote bestimmt werden, diejenigen, die P_i enthalten, fassen die Durchschnittsmenge T_i dieser Halbebenen ins Auge und bezeichnen den Flächeninhalt von T_i, falls er endlich ist, ebenfalls mit T_i. Wir behaupten, daß

$$T_i \geqq 2\sqrt{3}$$

ausfällt und daß das Gleichheitszeichen nur in dem Falle gelten kann, wenn T_i ein dem um P_i geschlagenen Einheitskreis k_i umbeschriebenes reguläres Sechseck ist.

Zum Beweis betrachten wir den um P_i mit dem Halbmesser $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ geschlagenen Kreis K_i, d. h. den Umkreis des erwähnten Sechsecks. Wir zeigen, daß unsere Ungleichung schon für den Inhalt des in K_i liegenden Teiles von T_i gilt.

Wir stehen daher folgender Aufgabe gegenüber: Wir betrachten eine Anzahl von Punkten $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$, die in dem von k_i und K_i begrenzten Kreisring liegen und voneinander einen Abstand $\geqq 1$ besitzen. Wir zeichnen die durch Q_j gelegten, auf P_iQ_j ($j = 1, 2, \ldots, m$) senkrechten Sekanten von K_i und betrachten den Gesamtinhalt t_i der von diesen Sekanten bestimmten Kreisabschnitte. Dann haben wir zu zeigen, daß t_i sein Maximum im Falle eines regulären Sechsecks erreicht.

---

bei denen eine, mit einer beliebigen Einheitskugel konzentrische Kugel eines Halbmessers von etwa 2,5 von den übrigen Kugelmittelpunkten höchstens zwölf enthält. Wir erhalten sicherlich eine derartige Kugellagerung, falls jede Kugel von zwölf anderen berührt wird.

[2]) Der Grundgedanke des hier folgenden Beweises stimmt mit demjenigen, den ich in meinem Aufsatz: Über einen Geometrischen Satz. Math. Zeitschr. 46 (1940), S. 83 – 85 mitgeteilt habe, überein. Einige Änderungen im Beweis werden uns die Betrachtung des räumlichen Problems erleichtern.

Wir bemerken vor allem, daß in unserem Kreisring höchstens 7 Punkte vom kürzesten Abstand $\geqq 1$ liegen können. Man rechnet aber leicht nach, daß in diesem Fall sämtliche Punkte sehr nahe an K_i liegen müssen; die Sekanten schneiden mithin nur einen überaus kleinen Teil von K_i ab.

Zur Untersuchung verbleibt daher nur noch der Fall $n \leqq 6$. In diesem ist aber unsere Behauptung trivial!

Weiterhin bemerken wir, daß die soeben bewiesene Ungleichung noch richtig bleibt, wenn wir T_i durch den ins Quadrat T fallenden Teil T_i' von T_i ersetzen. Um dies in Evidenz zu setzen, genügt es, sämtliche Kreise an den Quadratseiten zu spiegeln und im Beweis auch diese Spiegelbilder in Betracht zu ziehen.

Addieren wir die Ungleichungen $T_i' \geqq 2\sqrt{3}$, so erhalten wir auf der linken Seite den Quadratinhalt $T \geqq 2\sqrt{3}\, n$,

$$n \leqq \frac{\sqrt{3}}{6} T.$$

Damit haben wir aber die zu beweisende Abschätzung der Anzahl der Einheitskreise, die in einem Quadrat vom Inhalt T eingelagert werden können, mit dem genauen Wert der Konstanten bestimmt. Die bestmögliche Kreislagerung wird verwirklicht, wenn wir die Ebene mit regulären Sechsecken auspflastern und die Kreise in diese legen. Diese Kreislagerung ist gitterförmig: die Kreismittelpunkte gehören dem „gleichseitigen Dreiecksgitter" an.

3. Im Raume läßt sich die angedeutete Abschätzung (1) analog zum Vorigen auf folgende Extremalaufgabe zurückführen: Wir betrachten eine endliche Anzahl von Punkten $P_0, P_1, \ldots, P_n$, deren Abstand voneinander $\geqq 1$ ist, errichten im Punkt P_i die auf P_0P_i senkrechte Ebene e_i und betrachten von den durch e_i bestimmten beiden Halbräumen derjenigen, der P_0 enthält. Wir fassen den Durchschnitt S dieser Halbräume ($i = 1, 2, \ldots, n$) ins Auge und wollen das Minimum des Inhalts von S bestimmen.

Hinsichtlich der Lösung dieser Aufgabe ergibt sich nun gegenüber der Lösung in der Ebene ein wesentlicher Unterschied. Bei der dichtesten gitterförmigen Kugellagerung wird jede Kugel von zwölf anderen berührt. Von den Berührungspunkten liegen sechs auf einem Großkreis, je drei auf den verschiedenen Seiten desselben Großkreises (Hilbert, Anschauliche Geometrie, S. 41, Abb. 47c). Der Inhalt von S erreicht jedoch sein Minimum nicht für diese Punktekonfiguration. Bei der extremalen Anordnung liegen von den Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ebenfalls zwölf auf der um P_0 geschlagenen Einheitskugel k, aber in den Eckpunkten eines regulären Ikosaeders. In diesem Falle ist also S ein reguläres Dodekaeder.

Ließe sich der Raum durch reguläre Dodekaeder auspflastern, so wäre das Problem der dichtesten Kugellagerung völlig gelöst. Dies trifft aber, wie

bekannt, nicht zu! Wir können uns darüber z. B. schon dadurch überzeugen, daß der Flächenwinkel des Dodekaeders $\omega = 116^0 34'$ kein Teiler von 360^0 ist. In (1) muß daher tatsächlich das $<$-Zeichen stehen.

Zum Beweis der Extremaleigenschaft des Dodekaeders umschreiben wir ihm eine Kugel K. Wir zeigen analog zum Problem in der Ebene, daß schon der Inhalt des in K liegenden Teiles von S sein Minimum im Falle eines regulären Dodekaeders erreicht.

Wir haben verschiedene Fälle zu unterscheiden je nach der Anzahl m der Punkte, die in der von k und K begrenzten Kugelschale enthalten sind. Wir beginnen mit dem anziehendsten Fall $m = 12$.

Wir nehmen zunächst an, daß sämtliche Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ auf k liegen. Um über das Problem, welchem wir gegenüberstehen, größere Klarheit zu gewinnen, schicken wir eine Bemerkung voraus.

In der Ebene gehören sechs Punkte mit dem kürzesten Abstand $\geqq 1$, die auf einem Einheitskreis liegen, den Ecken eines regulären Sechsecks an. Auf einer Einheitskugel können höchstens zwölf Punkte mit dem kürzesten Abstand $\geqq 1$ liegen. Dieselben sind aber durch diese Bedingungen noch keineswegs bestimmt: sie können vielmehr ganz verschiedenartig verteilt sein. Außer den beiden Verteilungen, die in HILBERT, Anschauliche Geometrie, S. 41. Abb. 47 a, c veranschaulicht sind, ist uns bereits die ikosaedrische bekannt. Da aber die Kantenlänge des der Einheitskugel einbeschriebenen Ikosaeders

$$a = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}} = 1{,}0515, \tag{2}$$

also größer als 1 ist, so haben die Punkte bei dieser Verteilung noch einen kleinen Spielraum. All dies zeigt schon die Mannigfaltigkeit, die uns bei dem räumlichen Problem begegnet.

Betrachten wir nach dieser Bemerkung den Kugelabschnitt v_i, den e_i von K abschneidet! Den Inhalt von v_i bezeichnen wir mit v. Die zu v_i gehörige Kugelkalotte sei t_i; ihr Flächeninhalt $\bar{t}$.

Es seien t_i und t_k zwei Kugelkalotten, die sich teilweise überdecken; bezeichnen wir mit t_{ik} ihren Durchschnitt sowie den Flächeninhalt derselben. Wir bezeichnen ferner mit $v(t_{ik})$ den Inhalt des Durchschnitts von v_i und v_k.

Nun können sich aber auch drei Kugelkalotten t_i, t_k, t_l teilweise überdecken. Ihr Durchschnitt sei t_{ikl}; der Inhalt des Durchschnitts von v_i v_k, v_l sei $v(t_{ikl})$. Letztere hängt nicht nur vom Inhaltsmaß t_{ikl} ab, sondern auch von der Gestalt des Gebietes t_{ikl}. Sie ist eine Funktionale! Dagegen ist $v(t_{ik})$ eine gewöhnliche Funktion des Inhaltsmaßes t_{ik}.

Bezeichnen wir den Halbmesser von K mit R, so wird der Inhalt V des in K liegenden Teiles von S:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} - 12\bar{v} + \sum v(t_{ik}) - \sum v(t_{ikl}), \tag{3}$$

wobei die Summation auf sämtliche Zahlenpaare bzw. Zahlentripel ($i \leqq 12$, $k \leqq 12$, $l \leqq 12$; $i \neq k$, $k \neq l$, $l \neq i$) zu erstrecken ist.

Bei der ikosaedrischen Anordnung verschwinden sämtliche t_{ikl}, und die t_{ik} besitzen einen gemeinsamen Wert $\overline{\overline{t}}$. Der Dodekaederinhalt ist daher

$$V_D = \frac{4\pi R^3}{3} - 12\bar{v} + 30v(\overline{\overline{t}}). \tag{4}$$

Wir müssen zeigen, daß $V \geqq V_D$, d. h.

$$\Sigma v(t_{ik}) - \Sigma v(t_{ikl}) \geqq 30v(\overline{\overline{t}}) \tag{5}$$

ausfällt.

Es sei zunächst festgestellt, daß

$$\Sigma t_{ik} - \Sigma t_{ikl} \geqq 30\overline{\overline{t}} \tag{6}$$

ist. Der von den Kugelkalotten t_i bedeckte Teil der Kugeloberfläche K ist nämlich $12\bar{t} - \Sigma t_{ik} + \Sigma t_{ikl}$. Im ikosaedrischen Fall wird aber K von den Kugelkalotten völlig bedeckt. Es gilt folglich

$$12\bar{t} - \Sigma t_{ik} + \Sigma t_{ikl} \leqq 12\bar{t} - 30\overline{\overline{t}},$$

womit (6) bewiesen ist.

Es läßt sich ferner leicht zeigen, daß $v(t)$ für $0 \leqq t \leqq \bar{t}$ eine monoton zunehmende, von unten konvexe Funktion von t ist[3]): Wir können daher die

---

[3]) Legen wir durch den Kugelmittelpunkt P_0 eine Ebene e, die von der vorgegebenen Kugelkalotte t_i einen Teil s abschneidet. Die Zentralprojektion von s auf e_i sei s^*. Die behauptete Konvexität von $v(t)$ ist mit der Behauptung gleichwertig, daß der Flächeninhalt s für $s \leqq \frac{\bar{t}}{2}$ eine von unten konvexe Funktion des Inhalts s^* ist. Um diese Behauptung einzusehen, bezeichnen wir die Schnittpunkte von e mit dem Begrenzungskreis von t_i mit A und B; der Mittelpunkt von t_i sei P_i'. Im sphärischen Dreieck $\Delta P_i' AB$ sei $\sphericalangle\, AP_i'B = 2\varphi$, $\sphericalangle\, P_i'AB = \sphericalangle\, P_i'BA = \psi$ und schließlich $\sphericalangle\, P_i'P_0A = \sphericalangle\, P_i'P_0B = c$. Dann gilt $\operatorname{cotg}\psi = \cos c \cdot \operatorname{tg}\varphi$ und demzufolge

$$s = R^2(1-\cos c)\,\varphi - R^2(2\varphi + 2\psi - \pi) = R^2[\pi - 2\operatorname{arc\,cotg}(\cos c \cdot \operatorname{tg}\varphi) - 2\varphi\cos c],$$

$$s^* = \tfrac{1}{2} R^2 \sin^2 c\,(2\varphi - \sin 2\varphi).$$

Es ergibt sich daraus

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{2R^2\cos c \cdot \sin^2 c \cdot \sin^2\varphi}{1 - \sin^2 c \cdot \sin^2\varphi}, \quad \frac{ds^*}{d\varphi} = 2R^2 \sin^2 c \cdot \sin^2\varphi,$$

$$\frac{ds}{ds^*} = \frac{\cos c}{1 - \sin^2 c \cdot \sin^2\varphi}.$$

Letztere ist für $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ eine monoton zunehmende Funktion von φ und folglich auch von s^*, womit alles bewiesen ist.

Jensensche Ungleichung[4]) anwenden. Dazu sei nur noch bemerkt, daß ein beliebiges konvexes Zwölfflach höchstens $3 \cdot 12 - 6 = 30$ Kanten hat. Die Anzahl der t_{ik} beträgt daher ebenfalls höchstens 30. Wir erhalten mithin:

$$(7) \quad \frac{1}{30}\sum v(t_{ik}) \geqq v\left(\frac{\Sigma t_{ik}}{30}\right) \geqq v\left(\bar{\bar{t}} + \frac{1}{30}\sum t_{ikl}\right) \geqq v(\bar{\bar{t}}) + \frac{1}{30}v'(\bar{\bar{t}})\sum t_{ikl}.$$

Alles ist daher auf dem Beweis der Ungleichung

$$(8) \qquad v'(\bar{\bar{t}})\,\Sigma t_{ikl} \geqq \Sigma\, v(t_{ikl})$$

zurückgeführt. Dieser Beweis gelingt aber schon durch eine ganz grobe Abschätzung. Es genügt zu zeigen, daß für jedes t_{ikl}

$$(9) \qquad \frac{v(t_{ikl})}{t_{ikl}} \leqq \frac{v(\bar{\bar{t}})}{\bar{\bar{t}}}$$

gilt. Die rechtsstehende Konstante ist nämlich wegen der Konvexität von $v(t)$ kleiner als $v'(\bar{\bar{t}})$. In (9) lassen sich aber die auf beiden Seiten vorkommenden Größen leicht abschätzen bzw. berechnen. Betrachten wir zunächst $\frac{v(t_{ikl})}{t_{ikl}}$.

Vor allem bemerken wir, daß der Durchschnitt von v_i, v_k, v_l sich in erster Annäherung als ein Tetraeder mit der Grundfläche t_{ikl} auffassen läßt. Ist h die zur Grundfläche t_{ikl} gehörige Höhe dieses Tetraeders, so gilt

$$(10) \qquad \frac{v(t_{ikl})}{t_{ikl}} \sim \frac{1}{3}h.$$

Wir müssen daher h abschätzen. Die Höhe h erreicht ihr Maximum, falls $\Delta P_i P_k P_l$ in ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 1 übergeht. In diesem Fall wird das „Dreieck" t_{ikl} ebenfalls gleichseitig. Wir bestimmen den Halbmesser ϱ seines Inkreises.

Es sei $\Delta P_i P_k P_l$ eine Fläche des k einbeschriebenen Ikosaeders ($\overline{P_i P_k} = \overline{P_k P_l} = \overline{P_l P_i} = a$); der Mittelpunkt dieser Fläche sei Q. Wir projizieren Q vom Kugelmittelpunkt P_0 auf die Kugeloberfläche K; die Projektion sei Q'. Der sphärische Abstand zwischen Q' und P_i ist

$$(11) \qquad \widehat{Q' P_i} = u(a) = R \arcsin\frac{\sqrt{3}\,a}{3}.$$

Dies ist genau der sphärische Radius des Begrenzungskreises der betrachteten Kugelkalotten t_i. Mit Rücksicht auf den Wert

$$(12) \qquad R = \sqrt{3\,(5 - 2\sqrt{5})} = 1,2584$$

---

[4]) Ist $f(x)$ eine in (a, b) von unten konvexe Funktion, so gilt für die in (a, b) liegenden Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geqq f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)$. Jensen: Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. Acta Math. 30 (1906), S. 175—193.

gilt nun

$$\varrho = u(a) - u(1) \sim u'(1)(a-1) = \frac{\sqrt{2}}{2} R(a-1) = 0{,}046. \tag{13}$$

Für den auf t_{ikl} ruhenden Flächenwinkel α des Tetraeders gilt: $\cos\alpha = \frac{1}{R}$. Die Höhe h des Tetraeders beträgt daher

$$h \sim \varrho \operatorname{tg}\alpha = \varrho\sqrt{R^2-1} \sim 0{,}035. \tag{14}$$

Mithin bleibt der Quotient $\frac{v(t_{ikl})}{t_{ikl}}$ unter einer Schranke, dessen Näherungswert $\frac{1}{3}h \sim 0{,}012$ beträgt.

Nun ist noch $\frac{v(\bar{\bar{t}})}{\bar{\bar{t}}}$ abzuschätzen. Dieser Quotient läßt sich aber leicht genau berechnen. Es gilt zunächst

$$\bar{v} = \frac{\pi}{3}(R-1)^2(2R+1) = 0{,}2460, \quad \bar{t} = 2\pi R(R-1) = 2{,}0431, \tag{15}$$

$$V_D = 10\sqrt{2(65-29\sqrt{5})} = 5{,}5508.$$

Mit Rücksicht auf diese Zahlenwerte ergibt sich aus (4) $30\,v(\bar{t}) = 0{,}15$. Es gilt ferner $12\,\bar{t} - 30\,\bar{\bar{t}} = 4\pi R^2$, woraus wir $30\,\bar{\bar{t}} = 4{,}62$ erhalten. Folglich gilt

$$\frac{v(\bar{\bar{t}})}{\bar{\bar{t}}} = 0.032 > \frac{v(t_{ikl})}{t_{ikl}},$$

womit alles bewiesen ist[5]).

Jetzt können wir uns von der Annahme, daß die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ auf k liegen, freimachen. Nehmen wir an, daß ein Punkt vom Mittelpunkt P_0 der Kugel K den Abstand r besitzt ($1 < r < R$). Der Inhalt des zugehörigen Kugelabschnitts ist $\frac{\pi}{3}(R-r)^2(2R+r)$. Bei einer extremalen Anordnung ist aber sicherlich

$$\frac{\pi}{3}(R-r)^2(2R+r) + 11\bar{v} > \frac{4\pi R^3}{3} - V_D.$$

Es ergibt sich daraus, daß r nicht etwa die Größe 1,1 überschreiten kann. Damit ist der Fall $m < 12$ ebenfalls mit erledigt!

Wir wollen jetzt eine untere Schranke für den Winkel $\sphericalangle P_iP_0P_k$ bestimmen. Im $\Delta P_0P_iP_k$ sei $\overline{P_0P_i} = 1$, $\overline{P_0P_k} = 1{,}1$, $\overline{P_iP_k} = 1$. Dann ist $\sphericalangle P_iP_0P_k = \beta = \arccos 0{,}55 = 56^0\,38'$ und dies ist die gesuchte untere

[5]) Damit wurde z. B. bewiesen, daß unter denjenigen Zwölfflachen, die einer gegebenen Kugel umbeschrieben sind, der Inhalt des regulären Zwölfflachs ein lokales Minimum besitzt. Es ist anzunehmen, daß dieses Minimum ein absolutes ist. Bemerken wir dazu, daß unter den konvexen Polyedern mit der Eckenzahl 20, die einer Kugel einbeschrieben sind, der Inhalt für das reguläre Dodekaeder nicht einmal sich als ein lokales Maximum erweist; s. L. Fejes, Über zwei Maximumaufgaben bei Polyedern. Tôhoku Math. Journ. **46** (1939), S. 79–83.

Schranke. Nimmt nämlich P_0P_i um Δh zu, so muß $\overline{P_0P_k}$ um mehr als Δh abnehmen, damit die Summe der Kugelabschnitte nicht weiter abnimmt. Der Winkel $\sphericalangle P_iP_0P_k$ nimmt daher stets zu, bis $\overline{P_0P_i} = \overline{P_0P_k}$ wird.

Ersetzen wir nun die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ durch ihre Zentralprojektionen $P_1', P_2', \ldots, P_{12}'$ auf k, so wird der zu untersuchende Inhalt V verkleinert. Der kürzeste Abstand der Punkte $P_1', P_2', \ldots, P_{12}'$ ist sicherlich größer als $2 \sin \frac{\beta}{2} = 0{,}95$. Die Differenz $a - 0{,}95$ ist aber etwa doppelt so groß als $a - 1$. Folglich ist auch $\frac{v(t_{ikl})}{t_{ikl}}$ angenähert doppelt so groß wie früher, d. h. noch immer wesentlich kleiner als $\frac{v(\bar{t})}{\bar{t}}$.

Die obige Überlegung ist nur als eine erste Orientierung zu betrachten. Wir können uns aber damit begnügen, da wir ja die Feinheit unserer Abschätzung durch eine Reihe grober Vernachlässigungen verdorben haben.

Und nun gelangen wir zu dem in Fußnote [1]) angedeuteten Teil des Beweises, wobei wir uns statt durch strenge Überlegungen von der Anschauung führen lassen. Dieses Verfahren scheint uns darum berechtigt zu sein, da es uns im wesentlichen nur auf eine grobe Abschätzung ankommt, die sich aber exakt nur schwierig verfolgen läßt. Es handelt sich um den Fall $m > 12$.

Wir gehen von der nach der Anschauung naheliegenden Tatsache aus, daß von den Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_n$ höchstens zwölf sich auf der um P_0 geschlagenen Einheitskugel k befinden können[6]) oder vielmehr, daß im Falle $\overline{P_0P_1} = \overline{P_0P_2} = \cdots = \overline{P_0P_{12}} = 1$ für den 13. Punkt $\overline{P_0P_{13}} > R \sim 1{,}26$ gilt[7]). Nähern wir P_{13} dem Punkte P_0, so müssen sich mehrere der Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ von P_0 entfernen[8]) und der Inhalt V des in K liegenden Teiles von S nimmt bei dieser Operation sicherlich zu, bis für irgendeinen Punkt (etwa für P_i) $\overline{P_0P_i} = \overline{P_0P_{13}}$ wird.

Diese Betrachtungen zeigen, daß, wenn wir in die von k und K begrenzte Kugelschale noch weitere Punkte $P_{14}, P_{15}, \ldots$ hineindrängen, der zu untersuchende Inhalt V den neuen Punkten entsprechend stets zunimmt.

4. Wir wollen nun in der ikosaedischen Anordnung der Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ den gemeinsamen Inhalt der zu denselben Punkten gehörigen Polyeder $S_1, S_2, \ldots, S_{12}$ unte suchen.

---

[6]) Dies nachzuweisen ist an und für sich schon keine allzuleichte Aufgabe. Es läßt sich dagegen zeigen, daß sich auf einer Kugel mit dem Halbmesser $\frac{1}{a} \sim 0{,}95$ — die also einem Ikosaeder mit der Kantenlänge 1 umbeschrieben ist — genau zwölf Punkte mit dem kürzesten Abstand $\geqq 1$ befinden können, und zwar in einer einzigen möglichen Anordnung.

[7]) Es gilt auf Grund eines groben Experiments etwa $\overline{P_0P_{13}} > 1{,}38$.

[8]) Vermutlich ist $\sum_{i=1}^{13} \overline{P_0P_i} > 12 + 1{,}38$ woraus unmittelbar alles folgen würde.

Die um P_1 mit dem Halbmesser R geschlagene Kugel K_1 enthält von $P_2, \ldots, P_{12}$ 5 Punkte, deren Abstand von P_1 gleich a ist. Die zu diesen Punkten gehörigen Kugelabschnitte von K_1 besitzen den Inhalt

$$\frac{\pi}{3}(R-a)^2(2R+a) = 0{,}1601.$$

Mithin gilt für den Inhalt V_1 des in K_1 liegenden Teiles von S_1

$$V_1 > \frac{4\pi R^3}{3} - 5 \cdot 0{,}1601 - 7 \cdot 0{,}2460 = 5{,}8258.$$

Folglich ist der Mittelwert M der Inhalte von $S, S_1, S_2, \ldots, S_{12}$

$$M > \frac{5{,}5492 + 12 \cdot 5{,}8258}{13} = 5{,}8045,$$

eine Zahl, die schon erheblich größer ist als der Inhalt des einer Einheitskugel umbeschriebenen Rombendodekaeders, der den mit S bezeichneten Polyedern in der dichtesten gitterförmigen Kugellagerung entspricht.

Diese Bemerkung bietet uns eine Möglichkeit für eine weitere Verschärfung der im vorigen bewiesenen Abschätzung von $\overline{D}$, ja vielleicht sogar für den Beweis der Vermutung: $\overline{D}$ wäre D_0 gleich. Jedenfalls kann obige Bemerkung als eine Begründung dieser Vermutung angesehen werden.

(Eingegangen am 4. Mai 1942.)

Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques d'une variable entière et leur application à l'étude de l'itération des transformations continues.

Par

Ky Fan à Paris.

Introduction.

Dans ses publications récentes, M. FRÉCHET[1]) a montré qu'il y a un lien étroit, à la fois analytique et dans la forme des énoncés, entre la théorie ergodique et celle des probabilités en chaîne. Il a utilisé dans la théorie ergodique des procédés qu'il avait ingénieusement employés dans la théorie des probabilités en chaîne[2]). Dans cet ordre d'idées, M. FRÉCHET a introduit les fonctions asymptotiquement presque-périodiques qui sont définies sur une demi-droite positive (c'est-à-dire définies pour les nombres réels $\geqq$ un certain nombre). Il en a fait usage pour obtenir des résultats nouveaux concernant les propriétés moyennes des transformations ponctuelles dépendant du paramètre de temps.

Dans le présent Mémoire, notre but primitif était d'étudier les propriétés moyennes de l'itération des transformations ponctuelles continues dans un espace distancié. De sorte que le paramètre duquel dépend l'itération est un nombre entier positif. Pour employer des méthodes analogues à celles de M. FRÉCHET, il est donc d'abord nécessaire de traiter les fonctions presque-périodiques et les fonctions asymptotiquement presque-périodiques qui sont définies respectivement pour tous les nombres entiers (positifs, négatifs et nul) ou pour tous les entiers positifs et qui prennent leurs valeurs dans un espace distancié[3]). C'est ce qui constituera la première et la seconde sections

---

[1]) M. FRÉCHET, a) Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques. C. R. Acad. Sci. 213 (1941), p. 520–522; b) Sur le théorème ergodique de BIRKHOFF. C. R. Acad. Sci. 213 (1941), p. 607–609; c) Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques. Revue Scientifique, 79e année (1941), p. 341–354; d) Une application des fonctions asymptotiquement presque-périodiques à l'étude des familles de transformations ponctuelles et au problème ergodique. Revue Scientifique, 79e année (1941), p. 407–417.

[2]) M. FRÉCHET, e) Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités. Second Livre, Paris, 1938; f) Sur l'allure asymptotique des densités itérées dans le problème des probabilités en chaîne. Bull. Soc. Math. France 62 (1934), p. 68–83.

[3]) Il faut noter que M. J. v. NEUMANN [Almost periodic functions in a group, I. Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), p. 106] a défini, en généralisant la définition donnée par S. BOCHNER des fonctions presque-périodiques de H. BOHR, les fonctions presque-périodiques, dont les valeurs sont des nombres complexes et dont l'argument est un élément d'un groupe quelconque. Voir aussi M. W. MAAK, Eine neue Definition der fastperiodischen Funktionen. Abhandl. Math. Sem. Hans. Univ. XI (1936), p. 240–244.

de ce travail. Dans la troisième section, nous nous occuperons de l'application de la presque-périodicité et de la presque-périodicité asymptotique à l'étude de l'itération des transformations continues.

En 1939, M. K. YOSIDA[4]) a déjà appliqué les fonctions asymptotiquement presque-périodiques d'une variable entière à l'étude de l'itération des transformations. Cependant M. YOSIDA n'a considéré que les transformations linéaires dans un espace de BANACH, tandis que nos résultats principaux contenus dans la troisième section s'appliquent à toute transformation continue dans un espace distancié.

Nous remercions bien vivement M. le Professeur M. FRÉCHET pour ses précieux conseils.

I. Les fonctions presque-périodiques d'une variable entière[5]).

1. *Définition.* Soit $x = p(n)$ une fonction définie pour tous les nombres entiers n, positifs, négatifs et nul, et prenant ses valeurs x dans un espace distancié $\mathcal{E}$. Nous dirons que $x = p(n)$ est une *fonction presque-périodique de la variable entière* n, lorsqu' à tout nombre $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un entier positif $l = l(\varepsilon)$, appelé *longueur d'inclusion*, tel que parmi $l + 1$ entiers consécutifs quelconques, il existe au moins un entier τ, appelé *presque-période de* $p(n)$ *relative à* ε, pour lequel la distance $(p(n), p(n + \tau)) < \varepsilon$, quel que soit n.

Il est clair que toute fonction périodique de n est une fonction presque-périodique de n. Nous verrons plus loin qu'il existe des fonctions presque-périodiques de n sans être périodiques.

De la définition suit immédiatement qu'avec $p(n)$, la fonction $p(n + n_0)$, où n_0 désigne un nombre entier fixe, est aussi presque-périodique.

2. *Quelques propriétés immédiates.* Etant donnée une fonction presque-périodique $x = p(n)$, soit l une longueur d'inclusion relative à un nombre donné $\varepsilon > 0$. Pour tout entier n_1 et pour tout intervalle $(n_0, n_0 + l)$ de longueur l et à extrémités entières, il y a au moins un entier n_2 compris dans cet intervalle et tel que $(p(n_1), p(n_2)) < \varepsilon$. En effet, on peut trouver dans l'intervalle $(n_0 - n_1, n_0 - n_1 + l)$ une presque-période τ de $p(n)$ relative à ε. En

---

[4]) K. YOSIDA, Asymptotic almost periodicities and ergodic theorems. Proc. Imp. Acad. Japan XV (1939), p. 255—259.

[5]) Dans une lettre à l'auteur, du 6 août 1942, M. KNOPP a eu l'obligeance de nous signaler que A. WALTHER a déjà étudié en 1928 les fonctions presque-périodiques d'une variable entière et de valeurs réelles ou complexes. Voir A. WALTHER, a) Fastperiodische Folgen und Potenzreihen mit fastperiodischen Koeffizienten, Abhandl. Math. Sem. Hamburg. Univ., VI. (1928), p. 217—234; b) Fastperiodische Folgen und ihre FOURIERsche Analyse, Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna (1928), II, p. 289—298).

prenant $n_2 = n_1 + \tau$, on voit que n_2 se trouve dans l'intervalle $(n_0, n_0 + l)$ et que $(p(n_1), p(n_2)) < \varepsilon$.

Désignons maintenant par $X(p, -\infty < n < +\infty)$ l'ensemble des valeurs x de $p(n)$ quand n varie de $-\infty$ à $+\infty$. D'une façon analogue, nous désignons par $X(p, n_0 \leqq n < +\infty)$ l'ensemble des valeurs x de $p(n)$ quand n prend toutes les valeurs entières $\geqq n_0$. En outre, on désigne comme d'habitude, par $\bar{X}$ la fermeture de l'ensemble X. Nous avons alors, d'après ce qui précède, la proposition suivante:

Pour toute fonction presque-périodique $x = p(n)$ d'une variable entière n, on a

$$\bar{X}(p, -\infty < n < +\infty) = \bar{X}(p, n_0 \leqq n < +\infty), \tag{1}$$

quel que soit l'entier n_0. Et de plus, l'ensemble $X(p, -\infty < n < +\infty)$ est totalement borné[6]).

Comme tout ensemble totalement borné dans un espace distancié complet est compact, on a donc:

Si l'espace distancié auquel appartiennent les valeurs x de la fonction presque-périodique $x = p(n)$, est complet, l'ensemble des valeurs x de $p(n)$ quand n varie de $-\infty$ à $+\infty$, est compact.

Supposons maintenant qu'une fonction presque-périodique $p(n)$ tende vers un point x_0 quand n tend vers $+\infty$. A tout $\varepsilon > 0$ donné on peut déterminer un entier $n_0 = n_0(\varepsilon)$ assez grand tel que

$$(p(n), x_0) < \varepsilon \qquad \text{pour } n \geqq n_0.$$

On a alors, d'après (1),

$$(p(n), x_0) \leqq \varepsilon, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Or, ε peut être pris aussi petit que l'on veut, on a donc $p(n) \equiv x_0$. Ainsi, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction presque-périodique de n, $x = p(n)$, soit une constante abstraite x_0 est que $p(n)$ tende vers x_0 quand n tend vers $+\infty$.*

Considérons à présent une suite de fonctions presque-périodiques $p_1(n)$, $p_2(n), \ldots, p_m(n), \ldots$ qui converge vers une fonction limite $p(n)$ et cela uniformément sur l'ensemble des entiers n. A tout $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un entier positif M tel que

$$(p(n), p_m(n)) < \varepsilon. \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

---

[6]) Un ensemble X dans un espace distancié est dit *totalement borné*, si pour tout $\varepsilon > 0$ donné, X peut être décomposé en une somme d'un nombre fini de sous-ensembles de diamètres $\leqq \varepsilon$. Cf. HAUSDORFF, Mengenlehre, 3e édition, Berlin-Leipzig, 1935, p. 108.

dès que $m \geqq M$. Dès lors, si τ est une presque-période de $p_M(n)$ relative à ε, on a, quel que soit n,

$$(p(n+\tau),\ p(n)) \leqq (p(n+\tau),\ p_M(n+\tau)) + (p_M(n+\tau),\ p_M(n)) + \\ + (p_M(n),\ p(n)) < 3\varepsilon.$$

C'est-à-dire que τ est une presque-période de $p(n)$ relative à 3ε. Donc: *la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions presque-périodiques est elle-même une fonction presque-périodique.*

On démontre facilement la proposition suivante: *Soient $\mathfrak{E}_1$ et $\mathfrak{E}_2$ deux espaces distanciés. Soit $x = p(n)$ une fonction presque-périodique de n et prenant ses valeurs dans $\mathfrak{E}_1$. Si $y = g(x)$ est une fonction définie et uniformément continue sur l'ensemble $X(p, -\infty < n < +\infty)$, prenant ses valeurs dans $\mathfrak{E}_2$, alors $y = g(p(n))$ est presque-périodique.*

On a aussi la proposition suivante: *Soient $\mathfrak{E}_1$ et $\mathfrak{E}_2$ deux espaces distanciés, dont le premier est complet. Soit $x = p(n)$ une fonction presque-périodique de n et prenant ses valeurs x dans $\mathfrak{E}_1$. Si $y = g(x)$ est une fonction définie et continue sur l'ensemble $\overline{X}(p, -\infty < n < +\infty)$ et prenant ses valeurs y dans $\mathfrak{E}_2$, $y = g(p(n))$ est presque-périodique.*

3. *Relations avec les fonctions normales d'une variable entière.* Appelons *fonction normale* une fonction $x = f(n)$, définie pour tous les nombres entiers n, prenant ses valeurs x dans un espace distancié et telle que de toute suite

$$f(n+h_1),\ f(n+h_2),\ \ldots,\ f(n+h_m),\ \ldots,$$

où les h sont des nombres entiers arbitraires, on puisse extraire une suite

$$f(n+k_1),\ f(n+k_2),\ \ldots,\ f(n+k_m),\ \ldots,$$

qui converge uniformément (c'est-à-dire que la convergence est uniforme relativement à l'argument n) vers une fonction limite.

Cette définition est tout à fait analogue à celle des fonctions continues normales d'une variable réelle. Il est bien connu que toute fonction continue normale d'une variable réelle est continue presque-périodique au sens de H. Bohr. Inversement, si l'espace distancié auquel appartiennent les valeurs x d'une fonction continue presque-périodique $x = p(t)$ d'une variable réelle, est complet, $p(t)$ est une fonction continue normale[7]). En suivant dans leurs grandes lignes les démonstrations connues de ces théorèmes, on peut démontrer le théorème suivant:

Toute fonction normale d'une variable entière est presque-périodique. Inversement, si l'espace distancié auquel appartiennent les valeurs x d'une fonction

[7]) Cf. J. Favard, Leçons sur les fonctions presque-périodiques, Paris, 1933, p. 77—80.

presque-périodique $x = p(n)$, est complet, $p(n)$ est une fonction normale de la variable entière n.

Soit maintenant $x = p(t)$ une fonction continue normale d'une variable réelle t. Si l'on ne considère que les valeurs entières de t, on obtient une fonction $p(n)$ définie pour tous les nombres entiers. Il est clair que $p(n)$ est une fonction normale de la variable n. Il en résulte donc la proposition suivante: *Soient $\mathfrak{E}$ un espace distancié complet et $x = p(t)$ une fonction continue presque-périodique d'une variable réelle t et prenant ses valeurs x dans $\mathfrak{E}$. Si l'on ne considère que les valeurs entières de t, la fonction $p(n)$ est une fonction presque-périodique de la variable entière n.*

On a ainsi un moyen de former un grand nombre d'exemples de fonctions presque-périodiques d'une variable entière. Par exemple, la fonction $x = \cos t$ est une fonction continue presque-périodique de la variable réelle t, $x = \cos n$ est donc une fonction presque-périodique de la variable entière n. On observe que $\cos n$ n'est pas une fonction périodique de la variable entière n. bien que $\cos t$ soit une fonction périodique de la variable réelle t.

4. *Cas où les valeurs de la fonction appartiennent à un espace de* Banach. Supposons maintenant que l'espace distancié $\mathfrak{E}$ auquel appartiennent les valeurs x d'une fonction presque-périodique $x = p(n)$, soit un espace de Banach. On voit qu'avec $p(n)$, la fonction $r \cdot p(n)$, où r désigne un nombre réel fixe, est aussi presque-périodique; il en est de même de la fonction $p(n) + x_0$, où x_0 est un point fixe dans $\mathfrak{E}$ et aussi de la fonction de valeurs numériques $\|p(n)\|$. Cette dernière assertion se démontre en remarquant que

$$\left| \|p(n+\tau)\| - \|p(n)\| \right| \leqq \|p(n+\tau) - p(n)\| = (p(n+\tau), p(n)).$$

Notons encore que la somme et la différence de deux fonctions presque-périodiques sont encore presque-périodiques, car la somme et la différence de deux fonctions normales sont évidemment des fonctions normales.

Soient $p_1(n)$, $p_2(n)$ deux fonctions presque-périodiques prenant leurs valeurs dans un même espace de Banach. *S'il existe un entier N tel qu'on ait*

$$p_1(n) = p_2(n) \quad \textit{pour } n \geqq N,$$

les deux fonctions $p_1(n)$ et $p_2(n)$ sont nécessairement identiques. En effet, la différence $p_1(n) - p_2(n)$ est une fonction presque-périodique et l'on a $\lim_{n \to +\infty} [p_1(n) - p_2(n)] = 0$. Alors, d'après une proposition donnée au n° 2. $p_1(n) - p_2(n)$ est identiquement égale au point 0.

Ainsi, une fonction presque-périodique $p(n)$ dont les valeurs appartiennent à un espace de Banach, est complètement déterminée par ses valeurs pour les entiers $\geqq N$, quel que soit N.

5. *Théorème de la moyenne.* Nous allons établir le théorème suivant qui est d'une importance fondamentale:

Théorème de la moyenne. Si $x = p(n)$ est une fonction presque-périodique de n et prend ses valeurs x dans un espace de BANACH, *la moyenne arithmétique*

$$\frac{p(1) + p(2) + \ldots + p(n)}{n} \tag{2}$$

converge vers une limite déterminée quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration. D'après une proposition donnée au n^0 2, l'ensemble des valeurs x de $p(n)$ quand n varie sur l'ensemble des entiers, est compact. Dès lors, la norme $||p(n)||$ est bornée sur l'ensemble des entiers. Soit B une borne supérieure de $||p(n)||$. Soient $\varepsilon > 0$ donné, $l(\varepsilon)$ une longueur d'inclusion de $p(n)$ relative à ε et M un entier > 1. Soit τ_k $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ une presque-période de $p(n)$ relative à ε et telle que

$$kM < \tau_k \leqq kM + l.$$

On a

$$\sum_{i=kM+1}^{(k+1)M} p(i) = \sum_{i=kM+1-\tau_k}^{(k+1)M-\tau_k} p(i+\tau_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{M} p(i+\tau_k) + \sum_{i=kM+1-\tau_k}^{0} p(i+\tau_k) - \sum_{i=(k+1)M-\tau_k+1}^{M} p(i+\tau_k).$$

Pour les deux derniers termes, on a

$$\left\| \sum_{i=kM+1-\tau_k}^{0} p(i+\tau_k) \right\| \leqq B(\tau_k - kM) \leqq Bl,$$

$$\left\| \sum_{i=(k+1)M-\tau_k+1}^{M} p(i+\tau_k) \right\| \leqq B(\tau_k - kM) \leqq Bl.$$

D'autre part, nous avons

$$\left\| \sum_{i=1}^{M} p(i+\tau_k) - \sum_{i=1}^{M} p(i) \right\| < M\varepsilon,$$

puisque τ_k est une presque-période de $p(n)$ relative à ε. De là

$$\left\| \frac{1}{nM} \sum_{i=kM+1}^{(k+1)M} p(i) - \frac{1}{nM} \sum_{i=1}^{M} p(i) \right\|$$

$$\leqq \frac{1}{nM} \left\| \sum_{i=kM+1}^{(k+1)M} p(i) - \sum_{i=1}^{M} p(i+\tau_k) \right\| + \frac{1}{nM} \left\| \sum_{i=1}^{M} p(i+\tau_k) - \sum_{i=1}^{M} p(i) \right\|$$

$$= \frac{1}{nM} \left\| \sum_{i=kM+1-\tau_k}^{0} p(i+\tau_k) - \sum_{i=(k+1)M-\tau_k+1}^{M} p(i+\tau_k) \right\| +$$

$$+ \frac{1}{nM} \left\| \sum_{i=1}^{M} p(i+\tau_k) - \sum_{i=1}^{M} p(i) \right\|$$

$$\leqq \frac{2Bl}{nM} + \frac{\varepsilon}{n} = \frac{1}{n}\left(\varepsilon + \frac{2Bl}{M}\right),$$

et par conséquent

$$(3)\quad \left\| \frac{1}{nM}\sum_{i=1}^{nM} p(i) - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} p(i) \right\| \leqq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \frac{1}{nM}\sum_{i=kM+1}^{(k+1)M} p(i) - \frac{1}{nM}\sum_{i=1}^{M} p(i) \right\| \leqq \varepsilon + \frac{2Bl}{M}.$$

Soit maintenant M' un entier compris entre nM et $(n+1)M$:

$$nM < M' \leqq (n+1)M.$$

Nous avons

$$(4)\quad \left\| \frac{1}{M'}\sum_{i=1}^{M'} p(i) - \frac{1}{nM}\sum_{i=1}^{nM} p(i) \right\| \leqq \left\| \frac{1}{M'}\sum_{i=1}^{M'} p(i) - \frac{1}{M'}\sum_{i=1}^{nM} p(i) \right\| + \left\| \frac{1}{M'}\sum_{i=1}^{nM} p(i) - \frac{1}{nM}\sum_{i=1}^{nM} p(i) \right\|$$

$$\leqq \frac{BM}{M'} + \frac{1}{n}\left\| \frac{1}{nM}\sum_{i=1}^{nM} p(i) \right\| \leqq \frac{B}{n} + \frac{1}{n}\left\| \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} p(i) \right\| + \frac{\varepsilon}{n} + \frac{2Bl}{nM}$$

$$\leqq \frac{2B}{n} + \frac{\varepsilon}{n} + \frac{2Bl}{nM}.$$

De (3) et (4):

$$\left\| \frac{1}{M'}\sum_{i=1}^{M'} p(i) - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} p(i) \right\| \leqq \left\| \frac{1}{M'}\sum_{i=1}^{M'} p(i) - \frac{1}{nM}\sum_{i=1}^{nM} p(i) \right\| + \left\| \frac{1}{nM}\sum_{i=1}^{nM} p(i) - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} p(i) \right\|$$

$$\leqq \frac{2B}{n} + \frac{\varepsilon}{n} + \frac{2Bl}{nM} + \varepsilon + \frac{2Bl}{M}$$

$$= \frac{2B}{n} + \left(\varepsilon + \frac{2Bl}{M}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqq \frac{2B}{n} + 2\left(\varepsilon + \frac{2Bl}{M}\right).$$

Si nous considérons deux entiers M_1 et M_2, le premier dans l'intervalle $(n_1 M, (n_1+1)M)$, le deuxième dans l'intervalle $(n_2 M, (n_2+1)M)$,

les deux entiers n_1, n_2 étant tous les deux plus grands que n, nous aurons alors

$$\left\| \frac{1}{M_1} \sum_{i=1}^{M_1} p(i) - \frac{1}{M_2} \sum_{i=1}^{M_2} p(i) \right\|$$

$$\leqq \left\| \frac{1}{M_1} \sum_{i=1}^{M_1} p(i) - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} p(i) \right\| + \left\| \frac{1}{M_2} \sum_{i=1}^{M_2} p(i) - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} p(i) \right\|$$

$$\leqq \frac{4B}{n} + 4\left(\varepsilon + \frac{2Bl}{M}\right).$$

Ceci étant, lorsque ε est donné, nous pouvons choisir tout d'abord M suffisamment grand pour que $\frac{2Bl}{M} \leqq \varepsilon$, puis un entier positif n tel que $\frac{4B}{n} \leqq \varepsilon$, on aura alors

$$\left\| \frac{1}{M_1} \sum_{i=1}^{M_1} p(i) - \frac{1}{M_2} \sum_{i=1}^{M_2} p(i) \right\| \leqq 9\varepsilon,$$

pourvu que M_1 et M_2 soient tous les deux supérieurs à nM. La moyenne arithmétique (2) converge donc vers une limite déterminée quand n tend vers $+\infty$. C. q. f. d.

La limite de la moyenne arithmétique (2) est appelée *la moyenne de la fonction* $p(n)$ et sera désignée par $\mathfrak{M}(p)$.

Si, dans la formule (3), nous faisons croître n indéfiniment, nous obtenons

$$\left\| \mathfrak{M}(p) - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} p(i) \right\| \leqq \varepsilon + \frac{2Bl}{M}, \tag{5}$$

inégalité valable quel que soit l'entier positif M.

Les deux fonctions $p(n)$ et $p(n+n_0)$, où n_0 désigne un entier fixe quelconque, sont presque-périodiques en même temps et l'on a

$$\mathfrak{M}(p(n)) = \mathfrak{M}(p(n+n_0)). \tag{6}$$

En effet, on a

$$\frac{p(1+n_0) + p(2+n_0) + \ldots + p(n+n_0)}{n}$$

$$= \frac{n+n_0}{n} \cdot \frac{p(1) + p(2) + \ldots + p(n+n_0)}{n+n_0} - \frac{p(1) + p(2) + \ldots + p(n_0)}{n}$$

et au second membre les deux termes tendent respectivement vers $\mathfrak{M}(p)$ et 0 quand n tend vers $+\infty$.

Comme $p(n+n_0)$ admet les mêmes presque-périodes de $p(n)$ relativement à un même nombre et avec la même longueur d'inclusion, on a, en vertu de (5):

$$\left\| \mathfrak{M}(p(n)) - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} p(i+n_0) \right\| \leqq \varepsilon + \frac{2Bl}{M},$$

quel que soit l'entier n_0. En prenant $n_0 = -(M+1)$, nous avons en particulier

$$\left\| \mathfrak{M}(p(n)) - \frac{1}{M}(p(-1) + p(-2) + \cdots + p(-M)) \right\| \leqq \varepsilon + \frac{2Bl}{M}.$$

Donc:

$$(7)\quad \mathfrak{M}(p) = \lim_{n \to +\infty} \frac{p(1)+p(2)+\ldots+p(n)}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{p(-1)+p(-2)+\ldots+p(-n)}{n}.$$

II. Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques d'une variable entière.

6. *Définition et quelques propriétés immédiates.* Nous dirons qu'une fonction $x = f(n)$ définie pour les entiers positifs et prenant ses valeurs x dans un espace distancié $\mathfrak{E}$ est *asymptotiquement presque-périodique*, si elle possède la propriété suivante:

Propriété P. *A tout $\varepsilon > 0$ donné correspondent deux entiers positifs l, N tels que parmi $l+1$ entiers positifs consécutifs quelconques se trouve au moins un entier τ pour lequel*

$$(8)\quad (f(n), f(n+\tau)) < \varepsilon \quad \text{quand } n \geqq N.$$

Nous dirons que τ est une *presque-période asymptotique de $f(n)$ relative à ε et N.*

On peut mettre la propriété P sous une forme équivalente:

Propriété P bis. *A tout $\varepsilon > 0$ donné correspondent deux entiers positifs l, N tels que parmi $l+1$ entiers consécutifs quelconques (non nécessairement positifs) il y ait au moins un entier τ pour lequel*

$$(9)\quad (f(n), f(n+\tau)) < \varepsilon \quad \text{quand } n \geqq N \text{ et } n+\tau \geqq N.$$

La propriété P bis entraîne évidemment P. Inversement, soit $x = f(n)$ une fonction possédant la propriété P. Si $\varepsilon > 0$ est donné, choisissons l, N suivant la propriété P. Soient $n_0, n_0+1, \ldots, n_0+l$ $l+1$ entiers consécutifs qui ne sont pas tous positifs. Dans le cas où zéro figure parmi ces $l+1$ entiers, on pourra évidemment prendre $\tau = 0$ pour vérifier (9). Dans le cas contraire, ces $l+1$ entiers seront tous négatifs, on pourra d'abord prendre τ' parmi les $l+1$ entiers positifs $-(n_0+l), \ldots, -(n_0+1), -n_0$ de façon à vérifier (8). Posons $\tau = -\tau'$ et $m = n+\tau$, τ sera dans l'intervalle (n_0, n_0+l). On a

$$(f(m), f(m+\tau')) < \varepsilon \quad \text{quand } m \geqq N;$$

d'où

$$(f(n+\tau), f(n)) < \varepsilon \quad \text{quand } n+\tau \geqq N \text{ et par suite } n \geqq N.$$

Ainsi, la propriété P entraîne la propriété P bis. Les deux propriétés P et P bis sont donc équivalentes.

Etant donnée une fonction asymptotiquement presque-périodique $x = f(n)$, soient l, N deux entiers positifs correspondant à un nombre $\varepsilon > 0$ donné suivant la propriété P bis. Alors, quels que soient les entiers $n_0 \geqq N$ et $n_1 \geqq N$, il existe au moins un entier positif n_2 tel que

$$n_0 \leqq n_2 \leqq n_0 + l \quad \text{et} \quad (f(n_1), f(n_2)) < \varepsilon. \tag{10}$$

En effet, on peut trouver, d'après la propriété P bis, un entier τ (non nécessairement positif) tel que

$$n_0 - n_1 \leqq \tau \leqq n_0 - n_1 + l \quad \text{et} \quad (f(n_1), f(n_1 + \tau)) < \varepsilon,$$

puisque $n_1 \geqq N$ et $n_1 + \tau \geqq n_0 \geqq N$. En posant $n_2 = n_1 + \tau$, on voit que (10) est vérifié.

De ce fait, on conclut que *l'ensemble* $X(f, 0 < n < +\infty)$ *des valeurs d'une fonction asymptotiquement presque-périodique* $f(n)$, *quand* n *varie sur l'ensemble des entiers positifs, est totalement borné.* Par conséquent, *si l'espace distancié* $\mathfrak{E}$ *auquel appartiennent les valeurs de* $f(n)$, *est complet, l'ensemble* $X(f, 0 < n < +\infty)$ *est compact.*

On établit facilement les propositions suivantes:

Soit une suite de fonctions asymptotiquement presque-périodiques $f_1(n)$, $f_2(n), \ldots, f_m(n), \ldots$ *qui converge vers une fonction limite* $f(n)$ *et cela uniformément sur l'ensemble des entiers positifs* n. $f(n)$ *est elle-même asymptotiquement presque-périodique.*

Soient $\mathfrak{E}_1$ *et* $\mathfrak{E}_2$ *deux espaces distanciés. Soit* $x = f(n)$ *une fonction asymptotiquement presque-périodique de* n *et prenant ses valeurs* x *dans* $\mathfrak{E}_1$. *Si* $y = g(x)$ *est une fonction définie et uniformément continue sur l'ensemble* $X(f, 0 < n < +\infty)$, *prenant ses valeurs dans* $\mathfrak{E}_2$, *alors* $y = g(f(n))$ *est asymptotiquement presque-périodique.*

Soient $\mathfrak{E}_1$ *et* $\mathfrak{E}_2$ *deux espaces distanciés, dont le premier est complet. Soit* $x = f(n)$ *une fonction asymptotiquement presque-périodique de* n *et prenant ses valeurs* x *dans* $\mathfrak{E}_1$. *Si* $y = g(x)$ *est une fonction définie et continue sur l'ensemble* $\overline{X}(f, 0 < n < +\infty)$ *et prenant ses valeurs* y *dans* $\mathfrak{E}_2$, $y = g(f(n))$ *est asymptotiquement presque-périodique.*

7. *Les fonctions asymptotiquement normales d'une variable entière.* Une *fonction asymptotiquement normale* est une fonction $x = f(n)$ définie pour tous les entiers positifs n, prenant ses valeurs x dans un espace distancié et vérifiant la propriété suivante:

Propriété N. *De toute suite d'entiers positifs* h_m, *on peut extraire une suite* k_m, *pour laquelle la suite des fonctions* $f(n + k_m)$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ *converge uniformément sur l'ensemble des entiers positifs.*

On peut mettre la propriété N sous la forme suivante:

Propriété N bis. *De toute suite d'entiers positifs h_m tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite k_m, pour laquelle la suite des fonctions $f(n+k_m)$ $(m=1,2,3,\ldots)$ converge uniformément sur l'ensemble des entiers positifs.*

Il est facile de voir que les propriétés N et N bis sont équivalentes.

Théorème 1. *Toute fonction asymptotiquement normale d'une variable entière est asymptotiquement presque-périodique.*

Démonstration. Soit $f(n)$ une fonction asymptotiquement normale. Si elle n'était pas asymptotiquement presque-périodique, il y aurait un nombre $\varepsilon_0 > 0$ auquel ne correspondrait aucun couple l, N. C'est-à-dire que pour tout couple d'entiers positifs l, N, il existerait un intervalle $L_{l,N}$ de longueur l, à extrémités entières positives et ne contenant aucune presque-période asymptotique de $f(n)$ relative à ε_0 et N.

Prenons un entier h_1 dans l'intervalle $L_1' = L_{1,1}$ et un entier h_2 tel que $h_2 - h_1$ soit dans l'intervalle $L_2' = L_{2,2}$. Puis choisissons un intervalle $L_3' = L_{\nu_3,\nu_3}$ tel que $\nu_3 > 2(h_2 - h_1)$; il est dès lors possible de déterminer un entier h_3 de façon que $h_3 - h_1$ et $h_3 - h_2$ soient dans L_3'. En général nous choisissons $L_{m+1}' = L_{\nu_{m+1},\nu_{m+1}}$ tel que $\nu_{m+1} > \underset{1<\lambda\leqq m}{\text{Max.}} 2(h_\lambda - h_1)$, $\nu_{m+1} > \nu_m$ et h_{m+1} de façon que les différences $h_{m+1} - h_\lambda$ $(1 \leqq \lambda \leqq m)$ se trouvent dans L_{m+1}'[8]).

Considérons alors la suite des fonctions

$$f(n+h_1), f(n+h_2), \ldots, f(n+h_m), \ldots, \tag{11}$$

où les h sont les entiers positifs déterminés précédemment. La fonction $f(n)$ étant asymptotiquement normale, on peut extraire de (11) une suite uniformément convergente:

$$f(n+h_{\lambda_1}), f(n+h_{\lambda_2}), \ldots, f(n+h_{\lambda_m}), \ldots.$$

Dès lors, on peut trouver un entier R tel que

$$(f(n+h_{\lambda_{r+s}}), f(n+h_{\lambda_r})) < \varepsilon_0, \quad \text{quand } r \geqq R;\ s = 1,2,3,\ldots,$$

quel que soit $n = 1,2,3,\ldots$ Donc: pour $r \geqq R$, $s = 1,2,3,\ldots$ et $n > h_{\lambda_r}$, on a

$$(f(n+h_{\lambda_{r+s}} - h_{\lambda_r}),\ f(n)) < \varepsilon_0.$$

Autrement dit, pour $r \geqq R$ et $s = 1,2,3,\ldots$, la différence $h_{\lambda_{r+s}} - h_{\lambda_r}$ est une presque-période asymptotique de $f(n)$ relative à ε_0 et à tout $N > h_{\lambda_r}$.

[8]) Il suffit, par exemple, de déterminer h_{m+1} en prenant pour $h_{m+1} - h_1$ l'un des entiers immédiatement voisins du milieu de L_{m+1}'.

La différence $h_{\lambda_{r+s}} - h_{\lambda_r}$ se trouve dans l'intervalle $L'_{\lambda_{r+s}}$. Laissons $r \geqq R$ fixe, nous pouvons prendre s assez grand tel que l'indice N de l'intervalle $L_{N,N} = L'_{\lambda_{r+s}}$ soit plus grand que h_{λ_r}. Pour ce choix de r, s, l'intervalle $L_{N,N} = L'_{\lambda_{r+s}}$ contient une presque-période asymptotique, à savoir $h_{\lambda_{r+s}} - h_{\lambda_r}$, de $f(n)$ relative à ε_0 et N. Nous arrivons ainsi à une contradiction. La fonction $f(n)$ est donc asymptotiquement presque-périodique. C. q. f. d.

Lemme 1. *Soient $f(n)$ une fonction asymptotiquement presque-périodique et*

$$h_1, h_2, \ldots, h_m, \ldots \tag{12}$$

une suite d'entiers positifs tendant vers $+\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver un entier $l^* > 0$ et extraire de (12) une suite

$$h_{r_1}, h_{r_2}, \ldots, h_{r_m}, \ldots$$

de façon que

$$(f(n + h_{r_m}),\ f(n + l^*)) < \varepsilon, \qquad m = 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots$$

Démonstration. La fonction $f(n)$ étant asymptotiquement presque-périodique, soient l, N deux entiers positifs correspondant à ε suivant la propriété P. Comme h_m tend vers $+\infty$, on peut supposer

$$h_m > N + l, \quad \text{pour } m \geqq M.$$

Il existe alors une presque-période asymptotique τ_m $(m = M, M+1, \ldots)$ telle que

$$h_m - N - l \leqq \tau_m \leqq h_m - N, \qquad m \geqq M$$

et

$$(f(n),\ f(n + \tau_m)) < \varepsilon, \qquad m \geqq M;\ n \geqq N.$$

En posant

$$l_m = h_m - \tau_m, \qquad m \geqq M,$$

nous avons

$$(f(n + h_m),\ f(n + l_m)) < \varepsilon, \qquad m \geqq M;\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Or, les entiers l_m sont tous $\geqq N$ et $\leqq N + l$, une infinité d'entre eux sont nécessairement égaux. Soit

$$l_{r_1} = l_{r_2} = \cdots = l_{r_m} = \cdots = l^*.$$

On a alors

$$(f(n + h_{r_m}),\ f(n + l^*)) < \varepsilon, \quad m = 1, 2, 3, \ldots;\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

C. q. f. d.

Théorème 2. *Si l'espace distancié $\mathfrak{E}$ auquel appartiennent les valeurs x d'une fonction asymptotiquement presque-périodique $x = f(n)$, est complet, $f(n)$ est une fonction asymptotiquement normale.*

Démonstration. Considérons une suite infinie

$$f(n+h_1), f(n+h_2), \ldots, f(n+h_m), \ldots, \tag{13}$$

où les h sont des entiers positifs tendant vers $+\infty$. Soit $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_k > \cdots$ une suite de nombres positifs tendant vers zéro. D'après le lemme précédent, on peut trouver un entier $l^{(1)}$ et extraire de (13) une suite

$$S_1: \quad f(n+h_{r_1}^{(1)}), f(n+h_{r_2}^{(1)}), \ldots, f(n+h_{r_m}^{(1)}), \ldots$$

de façon que

$$\left(f(n+h_{r_m}^{(1)}), \quad f(n+l^{(1)})\right) < \varepsilon_1, \qquad m, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Puis, on peut trouver un entier $l^{(2)}$ et extraire de la suite S_1 une suite

$$S_2: \quad f(n+h_{r_1}^{(2)}), f(n+h_{r_2}^{(2)}), \ldots, f(n+h_{r_m}^{(2)}), \ldots$$

de façon que

$$\left(f(n+h_{r_m}^{(2)}), \quad f(n+l^{(2)})\right) < \varepsilon_2, \qquad m, n = 1, 2, 3, \ldots$$

et ainsi de suite: on peut trouver un entier $l^{(k)}$ et extraire de la suite S_{k-1} une suite

$$S_k: \quad f(n+h_{r_1}^{(k)}), f(n+h_{r_2}^{(k)}), \ldots, f(n+h_{r_m}^{(k)}), \ldots$$

de façon que

$$\left(f(n+h_{r_m}^{(k)}), \quad f(n+l^{(k)})\right) < \varepsilon_k, \qquad m, n = 1, 2, 3, \ldots \tag{14}$$

Considérons maintenant la suite des fonctions

$$f(n+h_{r_1}^{(1)}), f(n+h_{r_2}^{(2)}), \ldots, f(n+h_{r_k}^{(k)}), \ldots \tag{15}$$

Elle converge uniformément sur l'ensemble des entiers positifs n vers une fonction limite. En effet, soit $\varepsilon > 0$ donné et supposons que l'on ait choisi k assez grand tel que $\varepsilon_k < \frac{\varepsilon}{2}$; on a alors, en vertu de (14),

$$\left(f(n+h_{r_{k_1}}^{(k_1)}), \quad f(n+h_{r_{k_2}}^{(k_2)})\right) < \varepsilon, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

dès que $k_1, k_2 \geqq k$. L'espace $\mathcal{E}$ étant complet, la suite (15) converge donc uniformément sur l'ensemble des entiers positifs. Ainsi, $f(n)$ est une fonction asymptotiquement normale. C. q. f. d.

8. *Cas où les valeurs de la fonction appartiennent à un espace de* Banach. D'après la définition donnée dans la première section, toute fonction presque-périodique d'une variable entière est définie pour tous les nombres entiers, positifs, négatifs et nul. Soit maintenant $x = p(n)$ une fonction *définie seulement pour les entiers positifs* n. Nous conviendrons de dire que $p(n)$ est presque-périodique, si elle possède la propriété suivante: A tout $\varepsilon > 0$ donné correspond un entier positif l tel que parmi $l+1$ entiers *positifs* consécutifs quelconques se trouve au moins un entier τ pour lequel

$$\left(p(n), \quad p(n+\tau)\right) < \varepsilon, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

On peut démontrer que *toute fonction presque-périodique sur l'ensemble des entiers positifs peut être prolongée d'une façon unique par une fonction presque-périodique sur l'ensemble de tous les nombres entiers.*

Cela étant admis, nous pouvons démontrer le théorème suivant:

Théorème 3. *Toute fonction asymptotiquement presque-périodique $f(n)$, qui prend ses valeurs dans un espace de* BANACH, *est une somme de deux fonctions*

$$f(n) = p(n) + \omega(n), \tag{16}$$

où $p(n)$ est presque-périodique et où $\omega(n)$ tend vers le point 0 quand n tend vers $+\infty$. D'ailleurs, la décomposition (16) *de $f(n)$ est unique.*

Inversement, toute fonction $f(n)$ de la forme (16) *est asymptotiquement presque-périodique.*

Démonstration. Etant donnée une fonction asymptotiquement presque-périodique $f(n)$ qui prend ses valeurs dans un espace de BANACH, soit $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_k > \cdots$ une suite de nombres positifs tendant vers zéro. A tout ε_k correspondent deux entiers positifs l_k, N_k tels que l'intervalle $(k, k + l_k)$ contienne un entier τ_k pour lequel

$$\|f(n + \tau_k) - f(n)\| < \varepsilon_k, \qquad \text{quand } n \geqq N_k.$$

La fonction $f(n)$ étant asymptotiquement presque-périodique, elle est asymptotiquement normale, puisque tout espace de BANACH est complet. On peut donc extraire de la suite des fonctions $f(n + \tau_k)$ une suite $f(n + \tau_{\nu_k})$ convergeant uniformément vers une fonction $p(n)$.

Posons $\omega(n) = f(n) - p(n)$. Je dis que $\omega(n)$ tend vers le point 0 quand n augmente indéfiniment. Soit en effet $\varepsilon > 0$ donné, on peut prendre k assez grand de façon que

$$\varepsilon_{\nu_k} < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ et } \operatorname*{borne\,sup.}_{0 < n < +\infty} \left\| f(n + \tau_{\nu_k}) - p(n) \right\| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

On aura alors

$$\|\omega(n)\| \leqq \|f(n) - f(n + \tau_{\nu_k})\| + \|f(n + \tau_{\nu_k}) - p(n)\| < \varepsilon \text{ pour } n \geqq N_{\nu_k}.$$

Montrons ensuite que $p(n)$ est presque-périodique. D'après la propriété P, à tout $\varepsilon > 0$ correspondent deux entiers positifs l, N tels que sur tout intervalle de longueur l et à extrémités entières positives se trouve un entier τ pour lequel

$$\|f(n + \tau) - f(n)\| < \varepsilon \qquad \text{quand } n \geqq N.$$

On a donc

$$\|f(n + \tau_{\nu_k} + \tau) - f(n + \tau_{\nu_k})\| < \varepsilon \quad \text{quand } n + \tau_{\nu_k} \geqq N. \tag{17}$$

Laissons n fixe; pour k assez grand, $n + \tau_{\nu_k}$ sera $\geqq N$ et quand k tend vers $+\infty$, l'inégalité (17) deviendra

$$\|p(n+\tau) - p(n)\| \leqq \varepsilon \quad \text{quel que soit l'entier positif } n.$$

Ainsi, $p(n)$ est presque-périodique.

Nous avons ainsi démontré que toute fonction asymptotiquement presque-périodique (dont les valeurs se trouvent dans un espace de Banach) est représentable sous la forme (16).

De plus, la décomposition (16) de $f(n)$ est unique. S'il en existait une autre $f(n) = p_1(n) + \omega_1(n)$ satisfaisant aux mêmes conditions, la différence $p(n) - p_1(n)$ serait une fonction presque-périodique qui tendrait vers 0 quand n augmente indéfiniment. Cette différence est donc identiquement 0.

Reste à montrer que toute fonction $f(n)$ de la forme (16) est asymptotiquement presque-périodique. On a

$$\|f(n+\tau) - f(n)\| \leqq \|p(n+\tau) - p(n)\| + \|\omega(n+\tau)\| + \|\omega(n)\|.$$

Or, à tout $\varepsilon > 0$ donné correspond un entier positif l tel que parmi $l+1$ entiers positifs consécutifs quelconques, il y ait au moins un entier τ vérifiant l'inégalité

$$\|p(n+\tau) - p(n)\| < \tfrac{\varepsilon}{3}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

D'autre part, il existe un entier positif N tel que

$$\|\omega(n)\| < \tfrac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{pour } n \geqq N.$$

Dès lors,

$$\|f(n+\tau) - f(n)\| < \varepsilon, \qquad \text{pour } n \geqq N.$$

$f(n)$ est donc asymptotiquement presque-périodique. C. q. f. d.

L'unicité de la décomposition (16) d'une fonction asymptotiquement presque-périodique $f(n)$ permet d'appeler $p(n)$ son *terme principal* et $\omega(n)$ son *terme correctif*.

D'après les théorèmes 1—3, nous avons, dans le cas où l'espace considéré est un espace de Banach, trois définitions équivalentes des fonctions asymptotiquement presque-périodiques: on peut les définir soit comme les fonctions possédant la propriété P (ou P bis), soit comme les fonctions asymptotiquement normales, soit comme les fonctions de la forme (16). Cependant les deux premières définitions présentent sur la dernière l'avantage de garder un sens dans le cas général où l'espace considéré est seulement supposé distancié (au lieu d'être un espace de Banach). D'ailleurs ces deux premières définitions sont équivalentes dans le cas où l'espace en question est distancié complet.

D'après le théorème 3 et le théorème de la moyenne pour les fonctions presque-périodiques, on déduit immédiatement le théorème de la moyenne pour les fonctions asymptotiquement presque-périodiques:

Théorème 4. *Si $f(n) = p(n) + \omega(n)$ est une fonction asymptotiquement presque-périodique qui prend ses valeurs dans un espace de* Banach, *la moyenne arithmétique*

$$\frac{f(1) + f(2) + \ldots + f(n)}{n}$$

converge vers une limite déterminée $\mathfrak{M}(f)$ qui est égale à la moyenne $\mathfrak{M}(p)$ du terme principal $p(n)$ de $f(n)$.

Cette limite $\mathfrak{M}(f)$ sera appelée la *moyenne* de la fonction asymptotiquement presque-périodique $f(n)$. La formule (6) établie pour les fonctions presque-périodiques restera évidemment valable pour les fonctions asymptotiquement presque-périodiques, pourvu que n_0 soit un entier positif.

Restons toujours dans le cas où l'espace auquel appartiennent les valeurs de la fonction, est un espace de Banach. On voit aisément qu'avec $f(n) = p(n) + \omega(n)$, les fonctions $f(n + n_0)$, $r \cdot f(n)$ et $f(n) + x_0$, où n_0 désigne un entier positif fixe, r un nombre réel fixe, x_0 un point fixe dans l'espace considéré, sont aussi asymptotiquement presque-périodiques, dont les termes principaux sont respectivement $p(n + n_0)$, $r \cdot p(n)$ et $p(n) + x_0$. Il en est de même de la fonction de valeurs numériques $\|f(n)\|$, qui a $\|p(n)\|$ pour son terme p incipal. La somme $f_1(n) + f_2(n)$ de deux fonctions asymptotiquement presque-périodiques $f_i(n) = p_i(n) + \omega_i(n)$ $(i = 1, 2)$ est encore asymptotiquement presque-périodique, avec $p_1(n) + p_2(n)$ comme son terme principal.

On peut démontrer sans peine les propositions suivantes qui sont des précisions de deux propositions données au n° 6, où l'espace considéré était seulement supposé distancié:

Soit $\mathcal{E}$ un espace de Banach. *Si une suite de fonctions $f_1(n)$, $f_2(n)$, ..., $f_m(n)$, ..., asymptotiquement presque-périodiques et prenant leurs valeurs dans $\mathcal{E}$, converge uniformément sur l'ensemble des entiers positifs n, la limite est une fonction asymptotiquement presque-périodique et son terme principal ainsi que son terme correctif sont respectivement les limites uniformes sur l'ensemble des entiers positifs des termes principaux $p_m(n)$ et des termes correctifs $\omega_m(n)$ de $f_m(n)$.*

Soient $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux espaces de Banach. *Soit $x = f(n) = p(n) + \omega(n)$ une fonction asymptotiquement presque-périodique qui prend ses valeurs x dans $\mathcal{E}_1$. Si $y = g(x)$ est une fonction définie et continue sur l'ensemble $\overline{X}(f, 0 < n < +\infty)$ et prenant ses valeurs y dans $\mathcal{E}_2$, alors $y = g(f(n))$ est une fonction asymptotiquement presque-périodique, dont le terme principal est $g(p(n))$*[9]).

[9]) On peut démontrer la formule

$$X(p, 0 < n < +\infty) \subset \overline{X}(f, 0 < n < +\infty),$$

a fonction $g(p(n))$ est donc bien définie.

III. Application à l'étude de l'itération des transformations continues.

9. *Itération des homéomorphies.* Enonçons d'abord le théorème suivant:

Théorème 5. *Soient E un ensemble compact et fermé de points d'un espace distancié $\mathfrak{E}$ et H une homéomorphie de E en lui-même. En désignant pour tout point x de E, par $H^n x$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) l'image de x par la $n^{ième}$ itérée de H*[10]*, supposons que les $H^n x$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) considérées comme fonctions de x, soient également continues sur E*[11]*. Alors, pour tout point x_0 de E, $H^n x_0$ est une fonction presque-périodique de n.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $H^n x_0$ est une fonction normale de n. Soit $h_1, h_2, \ldots, h_m, \ldots$ une suite d'entiers arbitraires. Les points $H^{h_m} x_0$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$) restent dans l'ensemble compact et fermé E. On peut donc en extraire une suite de points $H^{k_m} x_0$ convergeant vers un point x^* de E. On a

$$(H^{n+k_m} x_0,\ H^n x^*) = (H^n (H^{k_m} x_0),\ H^n x^*). \tag{18}$$

D'après l'hypothèse de la continuité égale, à tout $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\eta > 0$ tel que

$$(H^n x,\ H^n y) < \varepsilon, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

quand x, y sont deux points de E tels que $(x, y) < \eta$. Or, pour m assez grand, $m \geqq M$, on aura $(H^{k_m} x_0,\ x^*) < \eta$. Donc, le premier membre de (18) sera, comme le second, $< \varepsilon$ pour $m \geqq M$. Ce nombre M, comme η, a été choisi indépendamment de n. Ainsi la suite des fonctions de n, $H^{n+k_m} x_0$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$) converge vers la fonction $H^n x^*$, et cela uniformément sur l'ensemble des entiers $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Dès lors, $H^n x_0$ est une fonction normale de n et par conséquent, est une fonction presque-périodique. C. q. f. d.

Corollaire 1. *Sous les hypothèses du théorème 5, si x_0 est un point de E tel que*

$$H^n x_0 \neq x_0$$

pour tout nombre entier $n > 0$[12]*, l'ensemble des points $H^n x_0$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) est homéomorphe à l'ensemble des nombres rationnels.*

Démonstration. Si x_0 est un point de E tel que $H^n x_0 \neq x_0$ pour tout entier positif n, $H^n x_0$ est une fonction presque-périodique telle que ses valeurs correspondant à deux nombres entiers distincts soient toujours distinctes.

---

[10]) On désigne comme d'habitude par H^0 la transformation identique et par H^{-1} l'inverse de H.

[11]) C'est-à-dire qu'à tout $\varepsilon > 0$ donné correspond un nombre $\eta > 0$ tel que, pour tout $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $(H^n x, H^n y) < \varepsilon$ dès que les points x, y dans E vérifient l'inégalité $(x, y) < \eta$.

[12]) Autrement dit, $H^n x_0$ n'est pas une fonction périodique de n.

Dès lors, d'après la définition des fonctions presque-périodiques, on voit immédiatement que l'ensemble des points $H^n x_0$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) est dense en soi. On sait que tout ensemble dénombrable, dense en soi et appartenant à un espace distancié est homéomorphe à l'ensemble des nombres rationnels[13]), l'ensemble des points $H^n x_0$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) est donc homéomorphe à l'ensemble des nombres rationnels. C. q. f. d.

10. *Itération des transformations continues.* Si au lieu d'une homéomorphie, on considère une transformation continue, on obtiendra sous des hypothèses moins strictes un résultat moins précis:

Théorème 6. *Soient E un ensemble compact et fermé de points d'un espace distancié $\mathcal{E}$ et T une transformation ponctuelle continue de E en une partie de E*[14]). *En désignant pour tout point x de E, par $T^n x$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) l'image de x par la $n^{ième}$ itérée de T, supposons que les $T^n x$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) considérées comme fonctions de x, soient également continues sur E. Alors, pour tout point x_0 de E, $T^n x_0$ est une fonction asymptotiquement presque-périodique de n.*

La démonstration est exactement la même que pour le théorème 5, sauf qu'au lieu de prendre h_m arbitraires, on suppose que h_m est une suite d'entiers positifs. On verra alors que $T^n x_0$ est une fonction asymptotiquement normale de n et par conséquent, est une fonction asymptotiquement presque-périodique.

Il est intéressant de citer un cas particulier où toutes les hypothèses du théorème 6 sont réalisées. On appelle *contraction*[15]) toute transformation ponctuelle T qui transforme un ensemble E d'un espace distancié dans lui-même ou dans un autre et qui vérifie la condition

$$(Tx, Ty) \leqq (x, y),$$

pour tout couple de points x, y de E. Il est facile de constater que *toute contraction qui transforme un ensemble compact et fermé E d'un espace distancié en une partie de E, vérifie toutes les hypothèses du théorème 6.*

Théorème 7. *Sous les hypothèses du théorème 6, soit d'autre part une fonction $f(x)$ définie et continue sur E et prenant ses valeurs dans un espace de Banach $\mathcal{E}_1$. Alors, pour tout point x arbitrairement choisi dans E, $f(T^n x)$ est une fonction asymptotiquement presque-périodique de n. En particulier, la limite*

$$\mu(f, x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{f(Tx) + f(T^2 x) + \cdots + f(T^n x)}{n} \tag{19}$$

existe, quel que soit le point x dans E.

---

[13]) Cf. M. Fréchet, g) Les espaces abstraits, Paris, 1928, p. 103.

[14]) Bien entendu, cette partie peut se confondre avec l'ensemble E tout entier.

[15]) Cf. H. Freudenthal et W. Hurewicz, Dehnungen, Verkürzungen, Isometrien. Fund. Math. **26** (1936), p. 120—122.

Pour f fixe, $\mu(f, x)$ est uniformément continue sur E. Et l'on a

$$\mu(f, x) = \mu(f, Tx). \tag{20}$$

Démonstration. En utilisant une proposition donnée à la fin du n° 6 et le théorème 6, on voit immédiatement que pour tout point x de E, $f(T^n x)$ est une fonction asymptotiquement presque-périodique de n. Dès lors, d'après le théorème 4, la limite $\mu(f, x)$ existe. L'égalité (20) résulte immédiatement de la formule (6).

Reste à montrer que $\mu(f, x)$ est uniformément continue sur E. La fonction f étant continue sur l'ensemble compact et fermé E, elle y est uniformément continue. A tout $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\delta > 0$ tel qu'on ait $\|f(z) - f(w)\| < \varepsilon$ pourvu que z, w soient deux points de E vérifiant $(z, w) < \delta$. Or, pour ce nombre δ, on peut trouver un nombre $\eta > 0$ tel que pour tout couple de points x, y de E vérifiant $(x, y) < \eta$, on ait $(T^n x, T^n y) < \delta$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). On a donc, pour tout couple de points x, y de E satisfaisant à l'inégalité $(x, y) < \eta$:

$$\|\mu(f, x) - \mu(f, y)\| = \left\| \lim_{n \to +\infty} \frac{f(Tx) + \cdots + f(T^n x)}{n} - \lim_{n \to +\infty} \frac{f(Ty) + \cdots + f(T^n y)}{n} \right\|$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left\| \frac{[f(Tx) - f(Ty)] + \cdots + [f(T^n x) - f(T^n y)]}{n} \right\|$$

$$\leqq \operatorname*{borne\ sup}_{0 < n < +\infty} \frac{1}{n} \{\|f(Tx) - f(Ty)\| + \cdots + \|f(T^n x) - f(T^n y)\|\} \leqq \varepsilon.$$

Ainsi, $\mu(f, x)$ est uniformément continue sur E. C. q. f. d.

Dans le théorème 7, si l'on suppose $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}$ et $f(x) = x$, on obtient le corollaire suivant:

Corollaire 2. *Si, dans les hypothèses du théorème 6, l'espace $\mathcal{G}$ est un espace de* Banach, *la limite*

$$\mu(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{Tx + T^2 x + \cdots + T^n x}{n} \tag{21}$$

existe, quel que soit x de E. $\mu(x)$ est uniformément continue sur E et l'on a

$$\mu(x) = \mu(Tx). \tag{22}$$

Disons qu'un point y de E est un *point de retour* d'un point x_0 de E, si la suite des points $T^n x_0$ contient une sous-suite convergeant vers y. Comme les points $T^n x_0$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) restent tous dans l'ensemble compact et fermé E, x_0 admet au moins un point de retour. On démontre sans peine le résultat suivant:

Corollaire 3. *Sous les hypothèses du théorème 6, les trois conditions suivantes sont équivalentes*:

1) *La suite des points* $T^n x_0$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) *est convergente.*

2) *Il n'y a qu'un point de retour de* x_0.

3) *Tout point de retour de* x_0 *est un point fixe dans la transformation* T.

Si, dans les hypothèses du théorème 6, l'espace $\mathfrak{E}$ *est un espace de* Banach, *chacune de ces conditions est une condition nécessaire et suffisante pour que le terme principal de la fonction asymptotiquement presque-périodique* $T^n x_0$ *soit une fonction constante.*

Corollaire 4. *Sous les hypothèses du théorème 6, l'ensemble* E_C *des points* x *de* E *tels que la suite* $T^n x$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) *soit convergente est un ensemble fermé. Et la transformation* T *ne fait sortir ni de* E_C, *ni de* $E - E_C$.

Démonstration. Il est évident que la transformation T ne peut faire sortir ni de E_C ni de $E - E_C$. Reste à montrer que E_C est un ensemble fermé.

Considérons une suite de points $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ de E_C telle que $\lim_{m \to +\infty} x_m = x_0$. On a $\lim_{n \to +\infty} T^n x_m = x_m^*$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$). Il s'agit de prouver que la suite $T^n x_0$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) est convergente. Les points x_m^* restant tous dans l'ensemble compact et fermé E, on peut supposer que $\lim_{m \to +\infty} x_m^* = x^*$ (en remplaçant au besoin la suite $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ par une sous-suite). On a

$$(T^n x_0, x^*) \leqq (T^n x_0, T^n x_m) + (T^n x_m, x_m^*) + (x_m^*, x^*).$$

D'après $\lim_{m \to +\infty} x_m = x_0$, $\lim_{m \to +\infty} x_m^* = x^*$ et l'hypothèse de la continuité égale, pour tout $\varepsilon > 0$ donné on peut trouver un entier M assez grand indépendant de n tel que

$$(T^n x_0, T^n x_m) < \varepsilon, \quad (x_m^*, x^*) < \varepsilon, \qquad \text{pour } m \geqq M.$$

On a alors

$$(T^n x_0, x^*) < 2\varepsilon + (T^n x_M, x_M^*).$$

Or, $\lim_{n \to +\infty} T^n x_M = x_M^*$, on peut donc déterminer un entier N assez grand tel que

$$(T^n x_M, x_M^*) < \varepsilon, \qquad \text{pour } n \geqq N.$$

Ainsi, nous avons

$$(T^n x_0, x^*) < 3\varepsilon, \qquad \text{pour } n \geqq N.$$

La suite des points $T^n x_0$ converge donc vers le point x^*. C'est-à-dire que x_0 appartient à E_C. L'ensemble E_C est donc fermé. C. q. f. d.

11. *Condition de transitivité.* Une fonction $g(x)$ définie et continue sur E et prenant ses valeurs dans un espace distancié sera dite *invariante par rapport à la transformation* T, si elle vérifie l'équation

$$g(x) = g(Tx),$$

quel que soit x de E. D'après le théorème 7, $\mu(f, x)$ est une fonction invariante par rapport à T. On démontre facilement le fait suivant: Pour que $\mu(f, x)$ soit indépendant de x, quelle que soit la fonction $f(x)$ continue sur E et prenant ses valeurs dans un espace de Banach $\mathcal{G}_1$, il faut et il suffit que toute fonction invariante par rapport à T et prenant ses valeurs dans $\mathcal{G}_1$ soit une fonction constante.

Pour tout point x de E, nous appellerons *successeurs de* x les points $T^n x$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). L'ensemble des successeurs de x sera désigné par S_x. Nous avons alors le théorème suivant:

Théorème 8. *Sous les hypothèses du théorème 6, pour que $\mu(f, x)$ soit indépendant de x, quelle que soit la fonction f continue sur E et prenant ses valeurs dans un espace de Banach $\mathcal{G}_1$, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée:*

Condition de transitivité. *Pour tout couple de points x, y de E, la fermeture de l'ensemble des successeurs de x et celle de l'ensemble des successeurs de y ne sont pas disjointes:*

$$\bar{S}_x \cdot \bar{S}_y \neq 0. \tag{23}$$

Démonstration. Pour montrer que la condition est suffisante, il suffit de prouver que, lorsque la condition de transitivité est réalisée, toute fonction invariante par rapport à T et prenant ses valeurs dans $\mathcal{G}_1$ est une fonction constante. Soit $g(x)$ une fonction invariante par rapport à T et prenant ses valeurs dans $\mathcal{G}_1$. Considérons deux points x, y arbitrairement choisis dans E. D'après la condition de transitivité, il existe un point z tel que $z \in \bar{S}_x \cdot \bar{S}_y$. Le point z appartient à E, puisque E est fermé. D'autre part, la fonction $g(x)$ étant continue sur l'ensemble compact et fermé E, elle y est uniformément continue. Donc, à tout $\varepsilon > 0$ donné correspond un nombre $\delta > 0$ tel que $\|g(x_1) - g(x_2)\| < \varepsilon$ pour tout couple de points x_1, x_2 de E vérifiant l'inégalité $(x_1, x_2) < \delta$. Or, pour ce nombre δ, on peut trouver deux entiers positifs n_1, n_2 tels que

$$(z, T^{n_1} x) < \delta, \quad (z, T^{n_2} y) < \delta;$$

d'où:

$$\|g(z) - g(T^{n_1} x)\| < \varepsilon, \quad \|g(z) - g(T^{n_2} y)\| < \varepsilon.$$

Comme $g(T^{n_1} x) = g(x)$ et $g(T^{n_2} y) = g(y)$, on a donc

$$\|g(z) - g(x)\| < \varepsilon, \quad \|g(z) - g(y)\| < \varepsilon.$$

Le nombre ε peut être pris aussi petit que l'on veut, il en résulte donc $g(x) = g(y) = g(z)$. C'est-à-dire que $g(x)$ est une fonction constante. Et par conséquent, $\mu(f, x)$ est indépendant de x, quelle que soit la fonction continue f.

La condition est nécessaire. En effet, s'il existe deux points x_0, y_0 de E tels que $\bar{S}_{x_0} \cdot \bar{S}_{y_0} = 0$, on peut définir une fonction $g(x)$ continue sur E, prenant ses valeurs dans $\mathcal{C}_1$ et telle que

$$g(x) = a \quad \text{pour} \quad x \in \bar{S}_{x_0};$$
$$= b \quad \text{pour} \quad x \in \bar{S}_{y_0};$$

a, b étant deux points distincts de $\mathcal{C}_1$. Pour cette fonction $g(x)$, on aura

$$\mu(g, x_0) = a \neq b = \mu(g, y_0).$$

C. q. f. d.

Un sous-ensemble F de E sera dit *clos par rapport à* T, si la transformation T transforme tout point de F en un point de F:

$$TF \subset F.$$

Il est facile de constater que *la condition de transitivité équivaut à la condition suivante*: *Deux sous-ensembles non vides de E qui sont fermés et clos par rapport à T, ne sont jamais disjoints.*

D'après le corollaire 2 et le théorème 8, nous avons immédiatement le corollaire suivant:

Corollaire 5. *Si, dans les hypothèses du théorème 6, l'espace $\mathcal{C}$ est un espace de* Banach *et si la transformation T vérifie la condition de transitivité, la limite $\mu(x)$, qui existe partout sur E, de*

$$\frac{Tx + T^2x + \cdots + T^n x}{n},$$

quand n tend vers $+\infty$, est indépendante de x.

Nous avons ici une condition suffisante pour que $\mu(x)$ soit indépendant de x. Mais, comme on le verra sur l'exemple 3 donné plus loin, cette condition n'est nullement nécessaire.

Envisageons maintenant quelques exemples simples:

Exemple 1. Soit E le segment fermé $0 \leqq x \leqq a$ $(a > 0)$ sur la droite des nombres réels. La transformation T définie par

$$Tx = a + (x - a) \cdot b^{-1},$$

b étant un nombre > 1, transforme tout point de E en un point de E. On a

$$|Tx - Ty| = b^{-1} \cdot |x - y| < |x - y|.$$

T est donc une contraction. Les hypothèses du théorème 6 sont alors vérifiées. On a

$$T^n x = a + (x - a) \cdot b^{-n}.$$

Dès lors, a appartient à la fermeture $\bar{S}_x$ de l'ensemble S_x des successeurs de x. La condition de transitivité est donc réalisée. On a

$$\mu(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \left[na + (x - a)(b^{-1} + b^{-2} + \cdots + b^{-n}) \right] = a.$$

Exemple 2. Considérons dans l'espace de HILBERT, l'ensemble compact et fermé E formé par les points $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ tels que $0 \leqq x_k \leqq \frac{1}{k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. La transformation

$$Tx = \left(\frac{1}{1 + x_1}, \quad \frac{1}{2 + x_2}, \cdots, \quad \frac{1}{k + x_k}, \cdots \right)$$

transforme tout point x de E en un point Tx de E. On vérifie facilement que T est une contraction: $(Tx, Ty) \leqq (x, y)$. Les hypothèses du théorème 6 sont donc réalisées. Il est aisé de voir que T vérifie aussi la condition de transitivité. $\mu(x)$ est donc indépendant de x. On trouve effectivement

$$\mu(x) = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{-2 + \sqrt{8}}{2}, \ldots, \quad \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}, \ldots \right).$$

Exemple 3. Appelons E le segment fermé $0 \leqq x \leqq 1$ sur la droite des nombres réels et T la transformation

$$Tx = 1 - x.$$

Les hypothèses du théorème 6 sont évidemment remplies. Mais T ne vérifie pas la condition de transitivité. On peut trouver une fonction $f(x)$ continue sur E telle que $\mu(f, x)$ soit dépendant de x. On a, par exemple, pour $f(x) = x^2$, $\mu(f, x) = x^2 - x + \frac{1}{2}$. Cependant, $\mu(x)$ est indépendant de x: $\mu(x) = \frac{1}{2}$.

12. *Application à la théorie des probabilités discontinues en chaîne.* Soient $P_{hk}^{(1)}$ $(1 \leqq h, k \leqq m)$ m^2 nombres réels tels que

$$\sum_{k=1}^{m} |P_{hk}^{(1)}| \leqq 1, \qquad 1 \leqq h \leqq m. \tag{24}$$

Appelons E l'ensemble des points $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de l'espace euclidien à m dimensions tels que $|x_i| \leqq A$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, A étant une constante positive. Soit T la transformation linéaire définie par

$$x_h^{(1)} = \sum_{k=1}^{m} P_{hk}^{(1)} \cdot x_k, \qquad 1 \leqq h \leqq m.$$

T transforme chaque point $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de E en un point $Tx = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)})$ de E. En effet, on a, en vertu de (24),

$$|x_h^{(1)}| = |\sum_{k=1}^{m} P_{hk}^{(1)} \cdot x_k| \leqq \sum_{k=1}^{m} |P_{hk}^{(1)}| \cdot |x_k| \leqq A \cdot \sum_{k=1}^{m} |P_{hk}^{(1)}| \leqq A.$$

D'autre part, dans l'espace euclidien à m dimensions, on peut prendre pour la distance de deux points $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ la quantité $\varrho(x, y) = \underset{1 \leqq i \leqq m}{\text{Max.}} |x_i - y_i|$; cela n'apporte aucun changement à la structure topologique de l'espace. Nous avons

$$|x_h^{(1)} - y_h^{(1)}| = |\sum_{k=1}^{m} P_{hk}^{(1)} \cdot (x_k - y_k)| \leqq \sum_{k=1}^{m} |P_{hk}^{(1)}| \cdot |x_k - y_k|$$

$$\leqq (\underset{1 \leqq k \leqq m}{\text{Max.}} |x_k - y_k|) \cdot \sum_{k=1}^{m} |P_{hk}^{(1)}| \leqq \underset{1 \leqq k \leqq m}{\text{Max.}} |x_k - y_k|,$$

d'où

$$\varrho(Tx, Ty) \leqq \varrho(x, y).$$

Cela veut dire que la transformation T est une contraction quand on prend ϱ pour la distance dans l'espace euclidien à m dimensions. Dès lors, $T^n x$ considérées comme fonctions de x sont également continues sur E.

D'après le théorème 6, pour chaque point x de E, $T^n x$ est une fonction asymptotiquement presque-périodique de n. D'autre part, en posant

$$P_{hk}^{(n)} = \sum_{j=1}^{m} P_{hj}^{(n-1)} \cdot P_{jk}^{(1)}, \qquad 1 \leqq h, k \leqq m;\ n = 2, 3, \ldots, \tag{25}$$

les coordonnées $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}$ du point $T^n x$ sont données par

$$x_h^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} P_{hk}^{(n)} \cdot x_k.$$

La $h^{ième}$ coordonnée x_h d'un point $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ dépend continûment du point x. Il en résulte donc que, pour tout point $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de E et pour toute valeur fixe de h,

$$\sum_{k=1}^{m} P_{hk}^{(n)} \cdot x_k$$

est une fonction asymptotiquement presque-périodique de n. En particulier, on voit que pour tout couple de h, k, $P_{hk}^{(n)}$ est une fonction asymptotiquement presque-périodique de n. Nous avons ainsi redémontré d'une façon très simple un résultat connu dû à M. Fréchet[16]: *Si les quantités* $P_{hk}^{(n)}$ $(1 \leqq h, k \leqq m;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$ *vérifient les relations* (24) *et* (25), *alors pour tout couple fixe de* h, k, $P_{hk}^{(n)}$ *est une fonction asymptotiquement presque-périodique de* n *et par conséquent, la suite* $P_{hk}^{(1)}, P_{hk}^{(2)}, \ldots, P_{hk}^{(n)}, \ldots$ *converge au sens de* Cesàro. Ce

[16]) M. Fréchet, l. c. e), p. 256.

résultat se réduira à un théorème bien connu dans la théorie des probabilités discontinues en chaîne, quand les $P_{hk}^{(n)}$ sont les probabilités de passage pour une chaîne de MARKOFF, constante, simple et à un nombre fini d'états possibles.

13. *Retour au théorème de la moyenne pour les fonctions asymptotiquement presque-périodiques.* Le théorème 7 a été établi en utilisant le théorème de la moyenne pour les fonctions asymptotiquement presque-périodiques d'une variable entière. Nous allons maintenant montrer qu'on peut considérer ce théorème de la moyenne comme un cas particulier du théorème 7.

Considérons l'espace fonctionnel $\mathfrak{F}$ constitué par les fonctions asymptotiquement presque-périodiques d'une variable entière et prenant leurs valeurs dans un espace de BANACH $\mathfrak{G}$. On prend dans $\mathfrak{F}$ pour distance de deux points f, g l'expression

$$(f, g) = \underset{0<n<+\infty}{\text{borne sup.}} \|f(n) - g(n)\|.$$

$\mathfrak{F}$ est évidemment un espace de BANACH.

Soit maintenant $g_0(n)$ une fonction asymptotiquement presque-périodique qui prend ses valeurs dans $\mathfrak{G}$. Pour démontrer l'existence de la moyenne $\mathfrak{M}(g_0)$, considérons l'ensemble G formé par la fonction $g_0(n)$ et les fonctions de la forme $g_0(n+h)$, où h est un nombre entier positif. D'après la propriété N, G est un ensemble compact dans l'espace $\mathfrak{F}$. La fermeture E de l'ensemble G est donc compact et fermé. Appelons maintenant T la transformation qui transforme un point $f(n)$ de E en $Tf = f(n+1)$. On vérifie sans peine que les hypothèses du théorème 6 sont toutes remplies. Dès lors, d'après le théorème 7, l'expression

$$\frac{g_0(n+1) + g_0(n+2) + \cdots + g_0(n+m)}{m}$$

converge uniformément vers une fonction de n, quand m tend vers $+\infty$. Il en résulte en particulier que la limite de

$$\frac{g_0(1) + g_0(2) + \cdots + g_0(m)}{m}$$

existe, quand m tend vers $+\infty$. Ainsi, on peut déduire du théorème 7 le théorème de la moyenne pour les fonctions asymptotiquement presque-périodiques d'une variable entière.

14. *Décomposabilité et indécomposabilité.* Nous avons obtenu au n° 11 une condition nécessaire et suffisante pour que $\mu(f, x)$ soit indépendant de x, quelle que soit la fonction f continue sur E et prenant ses valeurs dans un espace de BANACH. Considérons maintenant le cas où f est une fonctionnelle réelle et allons étudier l'indépendance presque certaine en introduisant une probabilité de distribution des positions de x dans E.

Restons dans les hypothèses du théorème 6, soit $\mathfrak{R}$ le plus petit corps borelien engendré par ceux de sous-ensembles de E qui sont relativement ouverts dans E. Supposons qu'on ait défini sur $\mathfrak{R}$ une fonction d'ensemble, $P(A)$, complètement additive, de valeurs non négatives et telle que $P(E) = 1$. C'est-à-dire qu'on a défini une probabilité $P(A)$ qu'un point x pris au hasard dans E soit situé dans un ensemble A, A étant un élément quelconque de $\mathfrak{R}$. Pour toute fonctionnelle réelle $f(x)$ définie et continue sur E et pour tout nombre réel r, désignons par $\underset{x}{E}\{\mu(f, x) < r\}$ l'ensemble des points x de E tels que $\mu(f, x) < r$. Il est clair que l'ensemble $\underset{x}{E}\{\mu(f, x) < r\}$ est relativement ouvert dans E et par conséquent il est un élément de $\mathfrak{R}$. Pour chaque f fixe, $\mu(f, x)$ est une variable aléatoire quand on choisit au hasard le point x dans E. Appelons $F(f, r)$ la fonction de répartition de la variable aléatoire $\mu(f, x)$:

$$F(f, r) = P(\underset{x}{E}\{\mu(f, x) < r\}).$$

Deux cas alors se présentent:

1er cas: Pour au moins une fonctionnelle $f_0(x)$ continue sur E, $F(f_0, r)$ prend au moins une valeur $F(f_0, r_0)$ différente de 0 et 1. Posons

$$E_1 = \underset{x}{E}\{\mu(f_0, x) < r_0\}, \quad E_2 = E - E_1.$$

Les probabilités $P(E_1) = F(f_0, r_0)$ et $P(E_2)$ sont toutes les deux différentes de 0 et 1. Or, d'après (20), les ensembles E_1, E_2 sont clos par rapport à T. Ainsi, dans ce cas, E est *décomposable* [relativement à la fonction d'ensemble $P(A)$], entendant par là que E est une somme de deux ensembles E_1, E_2, disjoints et clos par rapport à T et tels qu'il y ait une probabilité positive qu'un point x pris au hasard dans E soit dans E_1 et une probabilité positive qu'il soit dans E_2.

2e cas: Si E n'est pas décomposable de cette manière, $F(f, r)$ ne peut, quelle que soit la fonctionnelle $f(x)$ continue sur E, prendre que les valeurs 0 et 1. Quand f reste fixe et r varie de $-\infty$ à $+\infty$, $F(f, r)$ ne pouvant décroître, passe donc de la valeur 0 à la valeur 1 pour une certaine valeur r_0 de r (r_0 dépendant de f)[17]. C'est-à-dire que $\mu(f, x)$ prend presque certainement la même valeur r_0.

Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant:

Théorème 9. *Sous les hypothèses du théorème 6, soit $\mathfrak{R}$ le plus petit corps borelien engendré par ceux de sous-ensembles de E qui sont relativement ouverts*

[17]) L'ensemble E étant compact et fermé, la fonctionnelle $f(x)$ continue sur E y est nécessairement bornée: $a \leqq f(x) \leqq b$. On a donc $a \leqq \mu(f, x) \leqq b$ pour tout point x de E. Dès lors, $F(f, r) = 0$ pour $r \leqq a$ et $F(f, r) = 1$ pour $r > b$.

dans E. Supposons qu'on ait défini, pour tout élément A de $\mathfrak{R}$, une probabilité $P(A)$ qu'un point x pris au hasard dans E soit dans le sous-ensemble A. Alors, ou bien E est décomposable en deux ensembles (appartenant à $\mathfrak{R}$) disjoints, de probabilités positives et clos par rapport à la transformation T; ou bien E n'est pas décomposable de cette manière.

Si, dans le cas indécomposable, f est une fonctionnelle réelle continue sur E la limite $\mu(f, x)$, qui partout existe sur E, de

$$\frac{f(Tx) + f(T^2x) + \cdots + f(T^nx)}{n},$$

quand n tend vers $+\infty$, est presque certainement la même sur E.

Observons enfin qu'on déduit immédiatement du corollaire 4 le fait suivant: *Dans le cas indécomposable, quand on choisit au hasard le point x dans E, la probabilité que la suite T^nx ($n = 1, 2, 3, \ldots$) soit convergente ne peut être que 0 ou 1.*

(Eingegangen am 3. Juni 1942.)

Über das ϑ im verallgemeinerten Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Von

Gerhard Grüß in Freiberg (Sa).

Die Funktion $f(x)$ sei für $a \leqq x \leqq b$ stetig, g sei ihr absolutes Minimum, G ihr absolutes Maximum im Bereich. Dann kann in der Abschätzung

$$(b-a)\,g \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq (b-a)\,G$$

das eine oder das andere Gleichheitszeichen bekanntlich nur gelten, wenn $g = G$, also $f(x)$ in $a \ldots b$ konstant ist. Daraus folgt leicht, daß das ϑ in der Gleichung des Mittelwertsatzes

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(a+\vartheta(b-a))$$

nicht nur der Ungleichheit $0 \leqq \vartheta \leqq 1$, sondern sogar der durch Unterdrückung der Gleichheitszeichen verschärften Abschätzung $0 < \vartheta < 1$ genügt. Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß die Aussage des verallgemeinerten Mittelwertsatzes in demselben Sinne verschärft werden kann, was nicht allgemein bekannt zu sein scheint und auch nicht so selbstverständlich ist wie im Fall des gewöhnlichen Mittelwertsatzes.

Sei also $f(x)$ stetig und $p(x)$ eigentlich integrierbar und nicht-negativ im Bereich $a \leqq x \leqq b$, ferner $g = \min f(x)$ und $G = \max f(x)$ in $a \ldots b$. Dann wird behauptet, daß es mindestens eine Zahl ϑ im *Innern* des Bereiches $0 \ldots 1$ gibt, die der Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx = f(a+\vartheta(b-a)) \int_a^b p(x)\,dx$$

genügt.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt

$$(+) \qquad g \int_a^b p(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,p(x)\,dx \leqq G \int_a^b p(x)\,dx.$$

Wenn nun $\int_a^b p(x)\,dx = 0$ ist, so wird die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx = 0 = f(a+\vartheta\,(b-a)) \cdot 0$$

durch *jede* beliebige Zahl ϑ im Bereich $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ befriedigt. Sei also $\int_a^b p(x)dx = A > 0$. Dann folgt aus (+)

$$g \leqq \frac{\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx} \leqq G.$$

Wohlbemerkt kann hier das eine oder andere Gleichheitszeichen gelten, ohne daß $g = G$ wäre! Zum Beispiel ist $g\int_a^b p(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,p(x)\,dx$, wenn

$$f(x) = g, \qquad p(x) = p_0 > 0 \text{ konstant für } a \leqq x \leqq c,$$

$$f(x) = g + \frac{x-c}{b-c}(G-g),\ p(x) = 0 \qquad \text{für } c \leqq x \leqq b \text{ gilt.}$$

Deshalb ist es hier nicht möglich, so einfach wie im Fall des gewöhnlichen Mittelwertsatzes zu schließen, daß $\eta = \frac{\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx}$ [außer für $f(x) = \text{konst}$] größer als g und kleiner als G und daher gleich $f(\xi)$ sein müsse für irgendein $\xi = a + \vartheta(b-a)$ im Innern von $a \ldots b$. Vielmehr überlege man so:

Die Behauptung

$$\eta = \frac{\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx} = f(a + \vartheta(b-a)), \qquad 0 < \vartheta < 1,$$

ist gewiß richtig, wenn (wie beim Beweis des gewöhnlichen Mittelwertsatzes) $g < \eta < G$, und natürlich auch, wenn $g = \eta = G$ gilt. Es bleibt also nur der Fall zu klären, daß entweder $g = \eta < G$ oder $g < \eta = G$ ist, und man darf sich offensichtlich darauf beschränken, die eine dieser beiden Möglichkeiten zu untersuchen.

Sei etwa $g = \eta < G$, also $g\int_a^b p(x)dx = \int_a^b f(x)p(x)dx$ oder $\int_a^b (f(x) - g)\,p(x)\,dx = 0$. Dann nimmt $f(x)$, wie behauptet wird, den Wert $\eta = g$ gewiß im *Innern* von $a \ldots b$ an, wenn nur für irgendein ξ, $a < \xi < b$, $g = \min f(x) = f(\xi)$ ist. Der Fall $f(x) \neq \eta$ für $a < x < b$ kann also überhaupt nur dann eintreten, wenn außer der Voraussetzung $\int_a^b (f(x) - g)\,p(x)\,dx = 0$ noch die weitere

erfüllt ist, daß $f(x) > g$ gilt für $a < x < b$, und daher bleibt nur zu zeigen, daß die drei Voraussetzungen:

$$\int_a^b p(x)\,dx = A > 0,\ \int_a^b (f(x) - g)p(x)\,dx = 0,\ f(x) > g \quad \text{für} \quad a < x < b$$

nicht miteinander verträglich sind.

In der Tat folgt aus $\int_a^b p(x)\,dx = A > 0$ und $f(x) - g = q(x) > 0$ für $a < x < b$, daß $\int_a^b (f(x) - g)p(x)\,dx = \int_a^b q(x)\,p(x)\,dx$ positiv ist, also nicht verschwindet. Denn da die Integrale $\int_a^x p(x)\,dx$ und $\int_x^b p(x)\,dx$ in x stetig sind, kann die Zahl $\alpha > 0$ so klein gewählt werden, daß $\int_{a+\alpha}^{b-\alpha} p(x)\,dx > \frac{A}{2}$ gilt; weiter ist die stetige Funktion $q(x) = f(x) - g$ im abgeschlossenen Bereich $a + \alpha \ldots b - \alpha$ überall positiv und hat daher ein positives Minimum q_0. Schließlich ist wegen $q(x)\,p(x) \geqq 0$

$$\int_a^b q(x)\,p(x)\,dx \geqq \int_{a+\alpha}^{b-\alpha} q(x)\,p(x)\,dx \geqq q_0 \int_{a+\alpha}^{b-\alpha} p(x)\,dx > q_0 \cdot \frac{A}{2}$$

positiv.

Damit ist die Behauptung in vollem Umfang bewiesen[1]).

---

[1]) Nach Abschluß der Korrekturen bemerke ich erst heute, am 11. Januar 1943, daß E. JACOBSTHAL die hier mitgeteilte Verschärfung des Mittelwertsatzes bereits 1940 in seiner Abeit „Über den Mittelwertsatz der Integralrechnung", Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab Forhandlinger Bd. XIII. Nr. 8, bewiesen hat. Sein Beweis und der meine sind zwar ähnlich, sie unterscheiden sich aber doch so weit, daß die Veröffentlichung auch meines Beweises gerechtfertigt sein dürfte.

(Eingegangen am 20. August 1942.)

Über gewisse Halbverbände und kommutative Semigruppen.

Zweiter Teil.

Von

Fritz Klein-Barmen in Wuppertal.

Einleitung.

Wie im ersten Teil der Arbeit[1]) dargelegt worden ist, entspringen *Halbverband* und *kommutative Semigruppe* einer gemeinsamen Wurzel, und zwar wurde das *Holoid* als der beide umfassende Operationsbereich aufgezeigt. Das Holoid erweist sich damit als ein Fundamentalbegriff, nicht in bezug auf die *inhaltliche*, wohl aber in bezug auf die *formale* Seite der Mathematik[2]). Die große Bedeutung, die diesem Begriff zukommt, läßt es nicht zu, daß das Holoid nur so nebenbei am Rande irgendeiner Abhandlung erwähnt wird, sondern macht es zur wissenschaftlichen Pflicht, das Holoid in den Mittelpunkt einer eigenen Untersuchung zu stellen.

---

[1]) Über gewisse Halbverbände und kommutative Semigruppen. Erster Teil. Math. Zeitschr. **48** (1942), S. 275–288 = [H/S. 1]. Die Kenntnis dieser Arbeit wird vorausgesetzt.

[2]) Daß in jeder Erkenntnis, insbesondere in jeder *mathematischen* Erkenntnis, eine *anschaulich-inhaltliche* Komponente mit einer *begrifflich-formalen* Komponente verschmolzen ist, darüber herrscht seit langem volle Einmütigkeit. Dagegen scheiden sich die Geister sofort, sobald man nach dem Anteil fragt, den jede der beiden Komponenten an der mathematischen Erkenntnis hat. Dieser Kampf an den Grenzen der Mathematik ist so alt wie die Mathematik selbst. Sein Rhythmus wird in erster Linie von den epochalen und säkularen weltanschaulichen Strömungen, sodann aber auch von Offensivgeist, Temperament und Charakter der angetretenen Kämpfer bestimmt. Zu den Stürmern und Drängern gehört M. Steck, der mit seiner Streitschrift „Das Hauptproblem der Mathematik" (Berlin 1942) zum Angriff schreitet. Der Verfasser liegt vor allem in Fehde mit den Richtungen, die den logischen Gehalt der mathematischen Erkenntnis betonen, also mit den Richtungen, deren führende Männer D. Hilbert, B. Russell und H. Scholz sind. Eine besonders scharfe Attacke reitet Steck gegen die Logistik, die ihm eine gänzlich hohle Nuß am Baum der mathematischen Erkenntnis ist. Als Philosoph bekennt sich M. Steck zu Kant; genauer dürfte seine Position in der Nachbarschaft der Friesschen Schule zu suchen sein, deren Exponent in philosophischer Hinsicht bekanntlich Leonard Nelson, in mathematischer Hinsicht Gerhard Hessenberg ist. Doch muß ich gestehen, daß es für einen Mathematiker

Nachdem wir im ersten Teil die Theorie der Holoide in großen Zügen entwickelt haben, wollen wir nunmehr auf einzelne Punkte genauer eingehen. Im vorliegenden zweiten Teil beschäftigen wir uns mit den *linearen* Holoiden, deren Herausstellung im Hinblick auf die linearen Verbände und Semigruppen wünschenswert ist. Wenn auch die Struktur des linearen Holoids von nur wenigen und überdies recht einfachen Gesetzen bestimmt wird und infolgedessen leicht zu übersehen ist, so darf man doch nicht glauben, daß es sich bei diesem Holoid um nichts weiter als um eine farblose und verwaschene Verallgemeinerung von Verband und Semigruppe handelt; im Gegenteil, bei näherem Zusehen wird man bald gewahr, daß das lineare Holoid ein Operationsbereich mit sehr merkwürdigen und charakteristischen Eigenschaften ist und deshalb an sich Interesse verdient.

Im einzelnen liegt der Arbeit der folgende Plan zugrunde. § 1 enthält einen auf die Bedürfnisse der vorliegenden Untersuchung zugeschnittenen Auszug aus der allgemeinen Theorie; wegen der Beweise der Sätze verweisen wir auf [H/S. 1]. Durch ein zusätzliches Axiom gelangen wir in § 2 zum linearen Holoid. In einer Reihe von Sätzen arbeiten wir die besonderen Eigenschaften desselben heraus. § 3 stellt den Kern der Arbeit dar. Wir entwickeln darin eine Regel, die es gestattet, das Ergebnis der Verknüpfung von irgendwelchen Elementen des Holoids anzugeben. Die Regel kann leicht gehandhabt werden und ist deswegen für die Praxis des Holoidkalküls von Wichtigkeit.

Da man, was Sinn und Wesen der *axiomatischen Methode* anbetrifft, neuerdings auf die verschiedensten Ansichten stößt, möchte ich mich, um hinsichtlich meiner Auffassung keine Mißverständnisse aufkommen zu lassen, auch einmal kurz über diesen Punkt äußern. Meine Ausführungen tragen provisorischen Charakter; ich hoffe, demnächst Gelegenheit zu einer ausführlichen Darstellung zu finden.

Die logische Analyse der Begriffe einer mathematischen Disziplin führt, wenn sie weit genug getrieben wird, schließlich auf Begriffe, die man nicht

---

schwierig ist, die Position eines Ontologen richtig auszumachen. Wenn es sich bei dem STECKschen Buch auch vornehmlich um eine Streitschrift handelt, die als solche an den Geschmack und die Neigungen des Lesers appellieren darf, wobei es auf die Güte der Argumentation weniger ankommt, so müssen doch die Waffen stark befremden, deren sich STECK bedient, um Männer abzutun, die sich um die deutsche Mathematik sehr verdient gemacht haben.

Meine Ausführungen werden dem einen oder dem anderen an dieser Stelle vielleicht ungewöhnlich vorkommen. Ich mußte mich aber äußern, weil es in diesem Kampf für manchen unter uns um den Sinn und damit um den Wert der Arbeit seines Lebens geht.

mehr reduzieren kann oder nicht mehr reduzieren will. Bei einem systematischen Aufbau der betreffenden Theorie fungieren diese Begriffe als nichtdefinierte Grundbegriffe. Ich sehe als derartige Grundbegriffe u. a. die Begriffe *Menge*, *Beziehung* und *Verknüpfung* an. Nach meiner Ansicht ist eine strenge Definition derselben nicht möglich, was natürlich keineswegs ausschließt, daß diese Begriffe mehr oder weniger vollständig beschrieben, umschrieben oder erläutert werden können. Doch verzichte ich auf eine Beschreibung, weil ich glaube voraussetzen zu dürfen, daß der Leser weiß, was unter einer Menge, unter einer Beziehung und unter einer Verknüpfung zu verstehen ist. Betonen will ich nur, daß ich diese Begriffe als *inhaltlich* fundiert ansehe. Das soll besagen, daß wir uns dieser Begriffe durch Anschauung und Erfahrung *bewußt* werden; es soll aber nicht besagen, daß diese Begriffe erst durch Anschauung oder Erfahrung in unserem Bewußtsein *erzeugt* werden. Diese Begriffe ruhen zunächst verborgen in unserem Denkvermögen; Anschauung und Erfahrung sind nur die Gelegenheitsursachen, die uns auf unseren Besitz aufmerksam machen. Noch mehr: Die genannten Begriffe sind Kategorien, Kantische Kategorien. Sie sind es, die in das Chaos der uns durch die Sinne vermittelten Eindrücke Ordnung bringen und uns damit die Umwelt verständlich machen.

Damit glaube ich, meine prinzipielle Einstellung zu einer Kernfrage der Axiomatik einigermaßen deutlich umrissen zu haben. Vermutlich wird den Radikalen verschiedener Richtungen dieser Standpunkt als rückständig erscheinen; sie werden ihn vielleicht nachsichtig und herablassend als „naiv" bezeichnen. Doch sei ihnen das nicht übel genommen; es soll uns auch nicht weiter beunruhigen.

Betrachten wir nun ein Axiomensystem. Dasselbe hat als Unterlage eine Menge, deren Elemente einer Beziehung oder einer Verknüpfung fähig sind. Vorläufig haben wir es nur mit Verknüpfungen zu tun. Die Leistung eines Axiomensystems besteht nach unserer Auffassung darin, daß es die unterlegte Menge zugleich mit einer gewissen Verknüpfung näher bestimmt. Nach dieser Auffassung ist die axiomatische Methode nichts anderes als eine Methode der *Spezifikation*, indem die allgemeinen Begriffe der Menge und Verknüpfung durch zusätzliche Bedingungen, wie sie in den Axiomen vorliegen, eingeschränkt werden.

Diese Auffassung, daß nämlich durch ein vorgegebenes Axiomensystem eine *spezielle* Menge in Verbindung mit einer *speziellen* Verknüpfung definiert wird, liegt der modernen *algebraischen* Axiomatik zugrunde, wie sie bei der Aufstellung der Begriffe Verband und Gruppe, Ring, Körper usw. zum Ausdruck kommt; man vergleiche auch die Definition des Holoids in Erklärung 1 der vorliegenden Arbeit.

Dagegen nimmt die *geometrische* Axiomatik bei der üblichen Behandlung eine leichte Akzentverschiebung vor. Danach definiert ein geometrisches Axiomensystem nicht die unterlegte Menge selbst, d. h. nicht den Raum, sondern implizite die Elemente, aus denen die unterlegte Menge, also der Raum, besteht. Dieser Unterschied gegenüber der algebraischen Axiomatik spiegelt sich darin wider, daß z. B. HILBERT die *Elemente* durch besondere Namen — Punkt, Gerade, Ebene — auszeichnet, dagegen die unterlegte Menge, von der niemals die Rede ist, namenlos läßt. Die algebraische Axiomatik verfährt gerade umgekehrt.

Wir machen noch darauf aufmerksam, daß wir in dieser Arbeit nur solche Holoide zulassen, die entweder aus *endlich vielen* oder aus *abzählbar vielen* Elementen bestehen. Höhere Mächtigkeiten werden absichtlich nicht in Betracht gezogen[3]). Das im Wesen der natürlichen Zahlen verankerte Schlußverfahren der vollständigen Induktion wird weitgehend in Anspruch genommen.

§ 1.

Das Holoid.

Erklärung 1. Eine Menge M heiße ein *Holoid* in bezug auf eine durch $\circ$ symbolisierte Verknüpfung, kurz ein $\mathfrak{H}(\circ)$, wenn die folgenden fünf *Axiome* in Kraft sind:

A I. Sind a, b zwei beliebige Elemente aus M, so gibt es in M ein eindeutig bestimmtes Element c derart, daß — in dieser Reihenfolge —

$$a \circ b = c$$

gilt.

A II. Für drei beliebige Elemente a, b, c aus M gilt

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

A III. Für zwei beliebige Elemente a, b aus M gilt

$$a \circ b = b \circ a.$$

A IV. Es gibt in M ein Element e derart, daß für jedes Element a aus M

$$a \circ e = a$$

gilt.

---

[3]) Ich bin nicht mehr restlos davon überzeugt, daß unendliche Mengen, die nicht abzählbar sind, widerspruchslos gedacht werden können.

A V. Sind a, b und x, y Elemente aus M derart, daß

$$a = b \circ x, \quad b = a \circ y$$

gilt, so ist

$$a = b.$$

Die Verknüpfung $\circ$ werde als „Multiplikation" bezeichnet. Demgemäß verwenden wir auch die Ausdrücke „Produkt", „Faktoren" und „Potenz". Wir stellen die Potenz in der üblichen Weise dar. Die Potenzregeln der gewöhnlichen Algebra sind in Kraft:

$$(1) \qquad a^m \circ a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad a^m \circ b^m = (a \circ b)^m,$$

wobei m und n natürliche Zahlen sind.

Erklärung 2. Ein Holoid werde als *endlich* oder *unendlich* bezeichnet, je nachdem es aus endlich oder unendlich vielen Elementen besteht. Unter der *Ordnung* eines endlichen Holoids werde die Anzahl der verschiedenen Elemente verstanden, aus denen das Holoid besteht.

Das Element e des Axioms A IV ist eindeutig bestimmt; es wird als die *untere Spitze* oder als das *unterste* Element von M bezeichnet. Setzt man, wenn a ein beliebiges Element aus M ist,

$$a^0 = e,$$

so gelten die Formeln (1) nicht nur für natürliche, sondern bereits für *nichtnegative* ganze Zahlen m und n.

Für endliche, aber nicht mehr für unendliche Holoide läßt sich die Existenz einer *oberen Spitze* oder eines *obersten* Elementes beweisen, worunter ein Element f zu verstehen ist derart, daß für jedes Element a aus M

$$a \circ f = f$$

gilt.

Wegen des Axioms A I kann man jedem endlichen Holoid in einfacher Weise eine quadratische Tafel zuordnen, aus der sofort das Produkt zweier Elemente abgelesen werden kann. Das Schema, das seit langem bekannt ist und in Theorie und Praxis vielfach Anwendung gefunden hat, wird folgendermaßen hergestellt. Man bringe die Elemente des Holoids, die zu diesem Zweck mit

$$a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_m$$

bezeichnet seien, in den Feldern eines passend eingerichteten Quadrates unter, und zwar ordne man die Elemente so ein, daß das Durchschnittsfeld der i-ten Zeile und der k-ten Spalte von dem Element $a_i \circ a_k$ eingenommen wird. Das ausgefüllte Quadrat ist wegen A III symmetrisch in bezug auf

die von links oben nach rechts unten verlaufende Diagonale. Die Leerform sieht so aus:

	a_1	a_2	.	.	.	a_m	
a_1							a_1
a_2							a_2
.							.
.							.
.							.
a_m							a_m
	a_1	a_2	.	.	.	a_m	

Erklärung 3. Sind a, b Elemente aus M, wobei M ein $\mathfrak{H}(\bigcirc)$ ist, so sei dann und nur dann

$$a \supseteq b,$$

wenn es in M wenigstens ein Element x gibt derart, daß

$$a = b \bigcirc x$$

gilt. Mit $a \supseteq b$ sei $b \subseteq a$ gleichbedeutend. Findet $a \supseteq b$ statt, so heiße a ein *Oberelement* von b und umgekehrt b ein *Unterelement* von a. Daß a ein Oberelement bzw. Unterelement von b ist, drücken wir auch durch die Wendung aus: a befindet sich „oberhalb" bzw. „unterhalb" von b. Für

$$a \supseteq b,\ b \supseteq c \quad \text{bzw.} \quad a \subseteq b,\ b \subseteq c$$

werde kürzer

$$a \supseteq b \supseteq c \quad \text{bzw.} \quad a \subseteq b \subseteq c$$

geschrieben. Gilt

$$a \supseteq b \supseteq c \quad \text{oder} \quad a \subseteq b \subseteq c,$$

so sagen wir, daß sich b „zwischen" a und c befindet.

Die Beziehung $\supseteq$ ist transitiv und reflexiv. Ferner kommen ihr die in den folgenden Sätzen ausgesprochenen Eigenschaften zu.

Satz 1. 1. *Für jedes a gilt $a \supseteq e$ und, falls das oberste Element existiert, das dann mit f bezeichnet sei, auch $f \supseteq a$.*

Satz 1. 2. *Mit*

$$a \supseteq b, \quad b \supseteq a$$

gilt $a = b$.

Satz 2. 1. *Sind*

(2) $$a_1, \ldots, a_n$$

Elemente aus M derart, daß

$$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu = e$$

gilt, so ist

$$a_\nu = e \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Satz 2. 2. *Zu vorgegebenen Elementen* (2) *gibt es mindestens ein Element x derart, daß gilt*

$$x \supseteq a_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Satz 2. 3. *Mit*

$$a_\nu \supseteq b_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

gilt

$$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu \supseteq \prod_{\nu=1}^{n} b_\nu.$$

Satz 2. 4. *Für $n \geqq k$ gilt*

$$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu \supseteq \prod_{\varkappa=1}^{k} a_\varkappa.$$

Erklärung 4. Daß

$$a \supseteq b, \quad a \neq b$$

stattfindet, werde auch durch

$$a \supset b$$

zum Ausdruck gebracht. Mit $a \supset b$ sei $b \subset a$ gleichbedeutend. Für

$$a \supset b, \ b \supset c \quad \text{bzw.} \quad a \subset b, \ b \subset c$$

werde kürzer

$$a \supset b \supset c \quad \text{bzw.} \quad a \subset b \subset c$$

geschrieben.

Satz 3. *Mit*

$$a \supset b, \ b \supseteq c \quad \textit{bzw.} \quad a \supseteq b, \ b \supset c$$

gilt $a \supset c$.

Erklärung 5. Es seien a, b Elemente aus M derart, daß $a \supset b$ gilt. Gibt es in M kein Element x derart, daß

$$a \supset x \supset b$$

gilt, so heiße a ein *oberer Nachbar* von b und umgekehrt b ein *unterer Nachbar* von a.

Satz 4. *Ist M ein endliches Holoid und sind a, b Elemente aus M derart, daß $a \supset b$ gilt, so hat a mindestens einen unteren Nachbarn und b mindestens einen oberen Nachbarn.*

Erklärung 6. Ein von e verschiedenes Element a aus M, das nur e und a als Unterelemente hat, heiße ein *Primelement* von M.

Ohne weiteres erkennt man, daß jedes Primelement ein oberer Nachbar von e ist und umgekehrt.

Erklärung 7. Ein Element a aus M derart, daß

$$a \bigcirc a = a$$

gilt, heiße *idempotent*.

Ersichtlich sind die untere und obere Spitze von M idempotente Elemente. Demnach besitzt jedes Holoid mindestens ein idempotentes Element und jedes *endliche* Holoid, das aus mehr als einem Element besteht, mindestens zwei idempotente Elemente.

Man kann die endlichen Holoide folgendermaßen veranschaulichen. Wir deuten die Elemente eines derartigen Operationsbereiches als Punkte der Ebene oder des Raumes. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall der Ebene. Dann und nur dann, wenn zwei Elemente des Holoids Nachbarn sind, seien die entsprechenden Bildpunkte durch eine Strecke verbunden. Die Strecke kann eine beliebige Richtung haben; sie soll nur nicht waagerecht verlaufen. Dabei sei die Anordnung der Bildpunkte derart, daß der Bildpunkt von a oberhalb des Bildpunktes von b liegt, wenn a ein oberer Nachbar von b ist. Das Bild eines Holoids erster Ordnung ist ein einzelner Punkt; einem Holoid zweiter Ordnung entspricht eine Strecke und einem Holoid dritter Ordnung ein Streckenzug, wie er in Fig. 1 dargestellt ist. Topologisch gesehen gibt es also nur je einen Typus von Holoiden der ersten, zweiten und dritten Ordnung. Dagegen verteilen sich die Holoide höherer Ordnung jeweils auf verschiedene Typen. So gibt es zwei Typen von Holoiden vierter Ordnung, fünf Typen von Holoiden fünfter Ordnung und 15 Typen von Holoiden sechster Ordnung[4]).

Fig. 1.

[4]) Die Typen von der ersten bis zur sechsten Ordnung sind bekannt; die Bilder derselben stimmen, wie man sich leicht überzeugt, mit den in [Verb. 2], S. 613 angegebenen Streckenkomplexen überein. ([Verb. 2] = Grundzüge der Theorie der Verbände. Math. Annalen **111** (1935), S. 596–621).

Die Aufgabe, die verschiedenen Holoidtypen festzustellen, läuft auf das topologische Problem hinaus, alle Streckenkomplexe anzugeben, die den folgenden Bedingungen genügen:

α) Jeder Komplex enthält genau einen untersten und genau einen obersten Punkt.

β) Kein Komplex enthält einen dreieckigen Teilkomplex vom Typus der Fig. 2.

Fig. 2.

Die Bedingung α) bedarf keiner Erläuterung. Die Bedingung β) soll verhindern, daß zwei Punkte des Komplexes — z. B. a und c in Fig. 2 — zugleich benachbart und nicht benachbart sind.

§ 2.

Das lineare Holoid.

Um weiter zu kommen, muß man aus der zunächst unübersehbaren Masse der Holoide gewisse Klassen herausgreifen, die sich durch besondere Eigenschaften auszeichnen. Von welchen Gesichtspunkten man sich bei der Auswahl leiten läßt, d. h. welches Ausleseprinzip man dabei benutzt, hängt davon ab, in welcher Richtung man die Theorie ausbauen will. Hier interessieren uns diejenigen Holoide, die dem folgenden *Axiom* genügen:

A VI. Sind a, b zwei verschiedene Elemente aus M, so gibt es in M entweder ein Element x derart, daß gilt

$$a = b \cap x,$$

oder ein Element y derart, daß gilt

$$b = a \cap y.$$

Für zwei beliebige Elemente a, b eines derartigen Holoids findet also

$$a \supseteq b \quad \text{oder} \quad a \subseteq b$$

statt, wobei auch beide Relationen zugleich bestehen können. Das Axiom A VI erhebt somit die Beziehung $\supseteq$ zu einer linearen Ordnungsbeziehung. Dieser Umstand rechtfertigt die folgende Namensgebung.

Erklärung 8. Ein dem Axiom A VI genügendes Holoid heiße *linear*.

Das Bild eines linearen Holoids ist ein einfacher offener Streckenzug (vgl. Fig. 1), woraus sofort ersichtlich ist, daß jedes Element eines linearen Holoids höchstens einen oberen und höchstens einen unteren Nachbarn hat. Damit hängt zusammen, daß jedes lineare und endliche Holoid ein einziges Primelement besitzt, wenn man von dem trivialen Fall absieht, daß überhaupt nur ein Element vorhanden ist. Es gibt lineare Holoide jeder Ordnung;

insbesondere sind alle Holoide von der ersten bis zur dritten Ordnung linear. Erst von der vierten Ordnung an gehören zu jeder Ordnung sowohl lineare als auch nichtlineare Typen.

Weiterhin sei M ein lineares Holoid. Für manche Betrachtungen empfiehlt es sich, den Linearcharakter von M dadurch zum Ausdruck zu bringen, daß man die Elemente von M mit

$$p^{[0]},\ p^{[1]},\ p^{[2]},\ \ldots$$

bezeichnet derart, daß

$$p^{[0]} = e$$

gilt und jedes $p^{[\alpha+1]}$ der obere Nachbar von $p^{[\alpha]}$ ist. Bei dieser Bezeichnungsweise findet

$$p^{[0]} \subset p^{[1]} \subset p^{[2]} \subset \cdots$$

statt. Für $p^{[1]}$ werde auch p geschrieben. Den Anschluß an die alte Bezeichnung der Elemente — kleine lateinische Buchstaben — denken wir uns durch

$$p^{[\alpha]} = a,\quad p^{[\beta]} = b,\ \ldots$$

vermittelt. Mit

$$a \supseteq b \quad \text{bzw.} \quad a \supset b$$

gilt dann

$$\alpha \geqq \beta \quad \text{bzw.} \quad \alpha > \beta$$

und umgekehrt.

Zwischen den Elementen $p^{[\alpha]}$ und p^{α} ist scharf zu unterscheiden; $p^{[\alpha]}$ kann ein ganz beliebiges Element von M bedeuten, während unter p^{α} die α-te Potenz des Primelementes p zu verstehen ist. Zwar ist

$$p^{[0]} = p^0 = e,\quad p^{[1]} = p^1 = p;$$

dagegen gilt für $\alpha \geqq 2$ im allgemeinen nicht

$$p^{[\alpha]} = p^{\alpha}.$$

Auf das zwischen $p^{[\alpha]}$ und p^{α} bestehende Abhängigkeitsverhältnis kommen wir noch ausführlich zu sprechen.

Satz 5. *Mit*

$$a \cap c \supset b \cap c$$

gilt

$$a \supset b.$$

Beweis. Wäre die Behauptung falsch, so müßte

$$a \subseteq b$$

und somit nach Satz 2.3

$$a \cap c \subseteq b \cap c$$

sein, was der Voraussetzung widerspricht.

Anmerkung. Der Satz 5 gilt nicht mehr für nichtlineare Holoide, wie das Holoid der Fig. 3 zeigt.

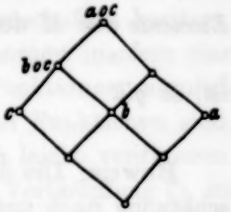

Fig. 3.

Satz 6. *Mit*

$$p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta]} \subseteq p^{[\gamma]} \tag{3}$$

gilt

$$p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta+1]} \subseteq p^{[\gamma+1]} \tag{4}$$

vorausgesetzt, daß $p^{[\gamma+1]}$ *existiert.*

Beweis. Nach (3) ist

$$p^{[\alpha]} \subset p^{[\gamma+1]}.$$

Gemäß Erklärung 3 gibt es mindestens ein ξ derart, daß

$$p^{[\alpha]} \circ p^{[\xi]} = p^{[\gamma+1]} \tag{5}$$

gilt. Wegen (3) ist

$$p^{[\alpha]} \circ p^{[\xi]} \supset p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta]},$$

so daß nach Satz 5

$$\xi > \beta \tag{6}$$

ist.

Mit $p^{[\gamma+1]}$ existiert auch $p^{[\beta+1]}$ und somit auch $p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta+1]}$. Wäre nun (4) falsch, so müßte

$$p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta+1]} \supset p^{[\gamma+1]}$$

und wegen (5)

$$p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta+1]} \supset p^{[\alpha]} \circ p^{[\xi]}$$

sein, so daß — wieder nach Satz 5 —

$$\beta + 1 > \xi$$

wäre, was im Widerspruch mit (6) steht. Infolgedessen ist (4) richtig.

Satz 7.1. *Für zwei beliebige Elemente* $p^{[\alpha]}$ *und* $p^{[\beta]}$ *gilt*

$$p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta]} \subseteq p^{[\alpha+\beta]}$$

vorausgesetzt, daß $p^{[\alpha+\beta]}$ *existiert.*

Beweis. Es ist

$$p^{[\alpha]} \circ p^{[0]} = p^{[\alpha]}$$

und somit nach Satz 6

$$p^{[\alpha]} \circ p^{[1]} \subseteq p^{[\alpha+1]},$$
$$p^{[\alpha]} \circ p^{[2]} \subseteq p^{[\alpha+2]},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta]} \subseteq p^{[\alpha+\beta]}.$$

Satz 7.2. *Sind*

$$p^{[\alpha]}, \quad p^{[\beta]}, \quad p^{[\gamma]}$$

Elemente aus M derart, daß

$$p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta]} = p^{[\gamma]}$$

ist, so gilt

$$\alpha + \beta \geqq \gamma \geqq \max(\alpha, \beta).$$

Beweis. Die Abschätzung nach oben ist in Satz 7.1 bewiesen; die Abschätzung nach unten ist trivial.

Satz 7.3. *Existiert* $p^{[\alpha]}$, *so gilt*

$$p^{\alpha} \subseteq p^{[\alpha]}. \tag{7}$$

Beweis. Die Relation (7) trifft für $\alpha = 0$ und für $\alpha = 1$ zu. Ist (7) für irgendein α richtig, so folgt

$$p^{\alpha+1} \subseteq p^{[\alpha]} \circ p.$$

Existiert $p^{[\alpha+1]}$, so ist nach Satz 7.1

$$p^{[\alpha]} \circ p \subseteq p^{[\alpha+1]},$$

so daß auch

$$p^{\alpha+1} \subseteq p^{[\alpha+1]}$$

richtig ist.

Eine Bemerkung. Dem linearen Holoid M kann man eine zahlentheoretische Funktion $\mathfrak{f}(\alpha, \beta)$ dadurch zuordnen, daß man, wenn

$$a \circ b = c, \quad \text{d. h. } p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta]} = p^{[\gamma]}$$

stattfindet,

$$\mathfrak{f}(\alpha, \beta) = \gamma$$

setzt. Über diese Funktion ist folgendes zu sagen. Nach A I existiert, wenn M *unendlich* ist, $\mathfrak{f}(\alpha, \beta)$ für *jedes* Paar von nichtnegativen ganzen Zahlen α, β; ist M dagegen *endlich*, so darf man für α, β nur zwei beliebige Zahlen aus der Reihe

$$0, 1, \ldots, \mu$$

nehmen, wobei $p^{[\mu]}$ das oberste Element von M ist. Weiter bedingt A III, daß $\mathfrak{f}(\alpha, \beta)$ symmetrisch in den Argumenten ist. Nach A IV gilt ferner

$$\mathfrak{f}(\alpha, 0) = \alpha,$$

und A V stellt fest, daß aus

$$\alpha = \mathfrak{f}(\beta, \xi), \quad \beta = \mathfrak{f}(\alpha, \eta)$$

die Identität von α und β folgt. Schließlich findet nach Satz 7.2

$$\alpha + \beta \geqq \mathfrak{f}(\alpha, \beta) \geqq \max(\alpha, \beta) \tag{8}$$

statt. Einer bestimmten Realisierung der Verknüpfung $\circ$ entspricht eine bestimmte Realisierung der Funktion $\mathfrak{f}(\alpha, \beta)$ und umgekehrt. Somit ist die

Aufgabe, alle Verknüpfungen $\circ$ festzustellen, die dem System der Axiome A I bis A VI genügen, äquivalent mit der Aufgabe, alle Funktionen $\mathfrak{f}(\alpha, \beta)$ festzustellen, die die erwähnten (und noch weitere) Eigenschaften besitzen. Der durch die Relation (8) ausgedrückten Eigenschaft kommt insofern eine besondere Bedeutung zu, als die darin auftretenden Funktionen, nämlich die Majorante $\alpha + \beta$ und die Minorante $\max(\alpha, \beta)$, zwei Funktionen sind, die für $\mathfrak{f}(\alpha,\beta)$ genommen werden können. Das läßt sich leicht verifizieren. Im ersten Fall ist M eine *Semigruppe* in bezug auf die Verknüpfung $\circ$, im zweiten Fall ein *Halbverband* in bezug auf $\circ$.

§ 3.

Bestimmung von $x \circ y$.

Wir beginnen mit einem einfachen Hilfssatz.

Satz 8. *Mit*

$$p^{[\xi]} \circ p^{[\eta]} = p^{[\eta]}$$

gilt

$$p^{[\xi]} \circ p^{[\eta+1]} = p^{[\eta+1]}$$

vorausgesetzt, daß $p^{[\eta+1]}$ *existiert.*

Beweis. Nach Satz 6 ist

$$p^{[\xi]} \circ p^{[\eta+1]} \subseteq p^{[\eta+1]};$$

trivial ist

$$p^{[\xi]} \circ p^{[\eta+1]} \supseteq p^{[\eta+1]}.$$

Aus den beiden Relationen folgt nach Satz 1. 2 die Behauptung.

Nun läßt sich leicht der erste *Hauptsatz* beweisen:

Satz 9. *Mit*

$$p^{[\xi]} \supseteq p^{[\varrho]} \supseteq p^{[\eta]},$$

wobei $p^{[\varrho]}$ *ein idempotentes Element ist, gilt*

$$p^{[\xi]} \circ p^{[\eta]} = p^{[\xi]}.$$

Beweis. Wegen

$$p^{[\varrho]} \circ p^{[\varrho]} = p^{[\varrho]}$$

findet nach Satz 8

$$p^{[\xi]} \circ p^{[\varrho]} = p^{[\xi]}$$

statt. In Verbindung mit

$$p^{[\xi]} \circ p^{[\varrho]} \supseteq p^{[\xi]} \circ p^{[\eta]} \supseteq p^{[\xi]}$$

ergibt sich

$$p^{[\xi]} \supseteq p^{[\xi]} \circ p^{[\eta]} \supseteq p^{[\xi]},$$

woraus die Behauptung nach Satz 1. 2 folgt.

Die Bedeutung des Satzes 9 beruht darauf, daß vermöge desselben der Wert des Produktes $x \circ y$ für den Fall bestimmt wird, daß sich zwischen x und y mindestens ein idempotentes Element befindet. Der zweite Hauptsatz (Satz 12), dem wir uns nun zuwenden, liefert den Wert des Produktes für den Fall, daß sich zwischen den beiden Faktoren kein idempotentes Element befindet. Zunächst einige Hilfssätze.

Satz 10. 1. *Es seien $p^{[\varrho]}$ und $p^{[\sigma]}$ zwei idempotente Elemente, zwischen denen sich kein weiteres idempotentes Element befindet; es sei $\varrho < \sigma$. Ist dann ξ eine ganze Zahl derart, daß*

(9) $$\varrho \leqq \xi < \sigma$$

stattfindet, so gilt

(10) $$p^{[\xi]} \circ p^{[\varrho+1]} = p^{[\xi+1]}.$$

Beweis. Wir wenden das Verfahren der vollständigen Induktion an. Nach Satz 9 gilt

$$p^{[\varrho]} \circ p^{[\varrho+1]} = p^{[\varrho+1]},$$

so daß die Behauptung des Satzes für $\xi = \varrho$ zutrifft. Es sei nun α eine feste Zahl mit

(11) $$\varrho \leqq \alpha < \sigma,$$

und (10) möge für

$$\xi = \varrho, \varrho + 1, \ldots, \alpha$$

richtig sein. Dann ist zu zeigen, daß bei der über (11) hinausgehenden Bedingung

(12) $$\alpha + 1 < \sigma$$

die Relation (10) auch für $\xi = \alpha + 1$ zutrifft, d. h. daß

(13) $$p^{[\alpha+1]} \circ p^{[\varrho+1]} = p^{[\alpha+2]}$$

gilt.

Wir führen den Nachweis indirekt. Wäre (13) falsch, so müßte wegen

$$p^{[\alpha]} \circ p^{[\varrho+1]} = p^{[\alpha+1]}$$

und Satz 6

(14) $$p^{[\alpha+1]} \circ p^{[\varrho+1]} = p^{[\alpha+1]}$$

sein. Folgendermaßen läßt sich aus (14) ein Widerspruch herausarbeiten.

Zunächst ersieht man aus (14), daß

$$\alpha + 1 \neq \varrho + 1$$

ist, denn andernfalls wäre $p^{[\alpha+1]}$ ein idempotentes Element, was wegen (12) ausgeschlossen ist. Da wegen (14) aber auch

$$\alpha + 1 \geqq \varrho + 1$$

sein muß, findet

(15) $$\alpha \geqq \varrho + 1$$

statt. Wir multiplizieren nun (14) mit $p^{[\varrho+1]}$, wodurch sich

$$p^{[\alpha+1]} \bigcirc p^{[\varrho+1]} \bigcirc p^{[\varrho+1]} = p^{[\alpha+1]} \bigcirc p^{[\varrho+1]},$$

also nach (14)

$$p^{[\alpha+1]} \bigcirc p^{[\varrho+1]} \bigcirc p^{[\varrho+1]} = p^{[\alpha+1]}$$

ergibt. Wegen (15) dürfen wir das Produkt

$$p^{[\varrho+1]} \bigcirc p^{[\varrho+1]}$$

gemäß (10) ausrechnen, wodurch wir

$$p^{[\alpha+1]} \bigcirc p^{[\varrho+2]} = p^{[\alpha+1]} \tag{16}$$

erhalten.

Aus (16) ersieht man, daß

$$\alpha + 1 \neq \varrho + 2$$

ist, denn andernfalls wäre $p^{[\alpha+1]}$ ein idempotentes Element, was, wie bereits bemerkt, ausgeschlossen ist. Da wegen (16) aber auch

$$\alpha + 1 \geqq \varrho + 2$$

sein muß, findet

$$\alpha \geqq \varrho + 2 \tag{17}$$

statt. Wir verfahren nun mit (16) wie soeben mit (14), d. h. wir multiplizieren (16) mit $p^{[\varrho+1]}$, wodurch sich wegen (14)

$$p^{[\alpha+1]} \bigcirc p^{[\varrho+2]} \bigcirc p^{[\varrho+1]} = p^{[\alpha+1]}$$

ergibt. Wegen (17) dürfen wir das Produkt

$$p^{[\varrho+2]} \bigcirc p^{[\varrho+1]}$$

gemäß (10) ausrechnen, wodurch wir

$$p^{[\alpha+1]} \bigcirc p^{[\varrho+3]} = p^{[\alpha+1]} \tag{18}$$

erhalten.

In dieser Weise fahren wir fort. Hat man etwa die Relation

$$p^{[\alpha+1]} \bigcirc p^{[\varrho+h]} = p^{[\alpha+1]}$$

erreicht, so folgt

$$\alpha \geqq \varrho + h$$

und daraus weiter

$$p^{[\alpha+1]} \bigcirc p^{[\varrho+h+1]} = p^{[\alpha+1]}.$$

Das Verfahren kann also beliebig weit fortgesetzt werden und führt somit auf den Widerspruch, daß α größer als eine beliebig vorgegebene Zahl sein muß. Die Quelle des Widerspruchs ist (14). Diese Relation muß infolgedessen falsch und demnach (13) richtig sein. Damit ist der Satz in vollem Umfang bewiesen.

Der nächste Satz ist eine Verallgemeinerung des Satzes 10. 1.

Satz 10. 2. *Es seien $p^{[\varrho]}$ und $p^{[\sigma]}$ zwei idempotente Elemente, zwischen denen sich kein weiteres idempotentes Element befindet; es sei $\varrho < \sigma$. Sind dann ξ, η zwei ganze Zahlen derart, daß*

$$\varrho \leqq \xi \leqq \sigma, \quad \varrho \leqq \eta \leqq \sigma, \quad \xi + \eta \leqq \varrho + \sigma \tag{19}$$

stattfindet, so gilt

$$p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\eta]} = p^{[\xi+\eta-\varrho]}. \tag{20}$$

Beweis. Unbeschadet der Allgemeinheit darf $\xi \geqq \eta$ angenommen werden. Es werde

$$\xi + \eta = \zeta$$

gesetzt. Wegen (19) gilt

$$2\varrho \leqq \zeta \leqq \varrho + \sigma.$$

Da $p^{[\varrho]}$ idempotent ist, findet

$$p^{[\varrho]} \bigcirc p^{[\varrho]} = p^{[\varrho]}$$

statt, so daß (20) für

$$\xi = \varrho, \ \eta = \varrho, \quad \text{d. h. } \zeta = 2\varrho$$

zutrifft. Es sei nun α eine feste Zahl mit

$$2\varrho \leqq \alpha \leqq \varrho + \sigma, \tag{21}$$

und (20) möge für

$$\zeta = 2\varrho, \ 2\varrho + 1, \ \ldots, \ \alpha$$

richtig sein. Dann ist zu zeigen, daß bei der über (21) hinausgehenden Bedingung

$$\alpha + 1 \leqq \varrho + \sigma \tag{22}$$

die Relation (20) auch für $\zeta = \alpha + 1$ zutrifft, d. h. daß

$$p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\eta]} = p^{[\alpha+1-\varrho]} \tag{23}$$

gilt.

Der Nachweis verläuft folgendermaßen. Wegen

$$\xi + \eta = \alpha + 1 \tag{24}$$

kann nicht zugleich

$$\xi = 0, \quad \eta = 0$$

sein. Da wir $\xi \geqq \eta$ angenommen haben, ist infolgedessen $\xi > 0$ und somit $\xi - 1 \geqq 0$. Wegen (24) ist

$$(\xi - 1) + \eta = \alpha, \tag{25}$$

wobei nach dem eben Bemerkten kein Summand negativ ist. Die Zerlegung (25) liefert gemäß (20)

$$p^{[\xi-1]} \bigcirc p^{[\eta]} = p^{[\alpha-\varrho]}.$$

Wir multiplizieren mit $p^{[\varrho+1]}$, wodurch sich

$$p^{[\xi-1]} \circ p^{[\varrho+1]} \circ p^{[\eta]} = p^{[\alpha-\varrho]} \circ p^{[\varrho+1]} \tag{26}$$

ergibt. Nun ist nach (24)

$$\xi - 1 = \alpha - \eta \leqq \alpha - \varrho$$

und nach (22)

$$\alpha - \varrho \leqq \sigma - 1,$$

so daß

$$\xi - 1 < \sigma$$

ist; das Produkt

$$p^{[\xi-1]} \circ p^{[\varrho+1]}$$

darf also nach Satz 10. 1 ausgerechnet werden. Da ferner nach (22)

$$\alpha - \varrho < \sigma$$

ist, darf auch das Produkt

$$p^{[\alpha-\varrho]} \circ p^{[\varrho+1]}$$

nach Satz 10. 1 ausgerechnet werden. Dadurch geht aber (26) in die behauptete Relation (23) über.

Der folgende Satz läßt sich ohne das Schlußverfahren der vollständigen Induktion beweisen. Übrigens ist der Beweis nicht so subtil wie die vorhergehenden.

Satz 11. *Es seien $p^{[\varrho]}$ und $p^{[\sigma]}$ zwei idempotente Elemente, zwischen denen sich kein weiteres idempotentes Element befindet; es sei $\varrho < \sigma$. Sind dann ξ, η zwei ganze Zahlen derart, daß*

$$\varrho \leqq \xi \leqq \sigma, \quad \varrho \leqq \eta \leqq \sigma, \quad \xi + \eta \geqq \varrho + \sigma \tag{27}$$

stattfindet, so gilt

$$p^{[\xi]} \circ p^{[\eta]} = p^{[\sigma]}. \tag{28}$$

Beweis. Wegen (27) lassen sich — im allgemeinen sogar auf verschiedene Weisen — zwei ganze Zahlen ξ' und η' so wählen, daß

$$\varrho \leqq \xi' \leqq \xi, \quad \varrho \leqq \eta' \leqq \eta, \quad \xi' + \eta' = \varrho + \sigma \tag{29}$$

ist. Auf die Zahlen ξ' und η' darf aber der Satz 10. 2 angewendet werden, der

$$p^{[\xi']} \circ p^{[\eta']} = p^{[\sigma]}$$

liefert. Wegen (29) folgt weiter

$$p^{[\xi]} \circ p^{[\eta]} \supseteq p^{[\sigma]}. \tag{30}$$

Durch Multiplikation der beiden aus (27) fließenden Relationen

$$p^{[\xi]} \subseteq p^{[\sigma]}, \quad p^{[\eta]} \subseteq p^{[\sigma]}$$

ergibt sich andererseits

$$p^{[\xi]} \cap p^{[\eta]} \subseteq p^{[\sigma]}. \tag{31}$$

Aus (30) und (31) folgt nach Satz 1. 2 die Behauptung.

Die Sätze 10. 2 und 11 lassen sich ohne weiteres zusammenfassen; wir erhalten so den zweiten *Hauptsatz*:

Satz 12. *Es seien $p^{[\varrho]}$ und $p^{[\sigma]}$ zwei idempotente Elemente, zwischen denen sich kein weiteres idempotentes Element befindet; es sei $\varrho < \sigma$. Sind dann ξ, η zwei ganze Zahlen derart, daß*

$$\varrho \leqq \xi \leqq \sigma, \quad \varrho \leqq \eta \leqq \sigma$$

stattfindet, so gilt

$$p^{[\xi]} \cap p^{[\eta]} = p^{[\min(\xi+\eta-\varrho,\ \sigma)]}.$$

Die vorhergehenden Ausführungen bedürfen noch einer Ergänzung. Wir haben bereits darauf hingewiesen, daß jedes *endliche* Holoid ein oberstes Element besitzt und daß dasselbe idempotent ist. Demgegenüber kann für ein *unendliches* Holoid der Fall eintreten, daß ein idempotentes Element $p^{[\varrho]}$ vorhanden ist derart, daß sich oberhalb von $p^{[\varrho]}$ kein weiteres idempotentes Element befindet. Dabei liegen oberhalb von $p^{[\varrho]}$ selbstverständlich noch beliebig viele Elemente des Holoids. Das zur Vorbereitung für den folgenden Satz.

Satz 13. *Es sei M ein unendliches lineares Holoid. M enthalte nur endlich viele idempotente Elemente. Es sei $p^{[\varrho]}$ das oberste idempotente Element von M. Sind dann ξ, η zwei ganze Zahlen derart, daß*

$$\varrho \leqq \xi, \quad \varrho \leqq \eta$$

stattfindet, so gilt

$$p^{[\xi]} \cap p^{[\eta]} = p^{[\xi+\eta-\varrho]}.$$

Dieser Satz wird ähnlich wie die Sätze 10. 1 und 10. 2 bewiesen. Wir überlassen die Durchführung dem Leser.

Vermöge der Sätze 9, 12 und 13 läßt sich die Feinstruktur der linearen Holoide weitgehend übersehen. Insbesondere erkennt man, daß die idempotenten Elemente das Rückgrat der Holoide bilden. In der folgenden Erklärung legen wir diese zunächst nur bildlich genommene Bezeichnung offiziell fest.

Erklärung 9. Unter dem *Rückgrat* eines Holoids werde die Menge der idempotenten Elemente des Holoids verstanden.

Es sei N das Rückgrat des linearen Holoids M. Zu den Elementen von N gehört stets die untere Spitze von M. Besitzt M eine obere Spitze, so gehört auch diese zu den Elementen von N.

Wir wollen die Hauptergebnisse der Arbeit noch einmal zusammenstellen:

I. Ist $p^{[\varrho]}$ ein Element aus N und sind $p^{[\xi]}$, $p^{[\eta]}$ zwei Elemente aus M derart, daß

$$\xi \geqq \varrho \geqq \eta \quad \text{oder} \quad \xi \leqq \varrho \leqq \eta$$

stattfindet, so gilt

$$p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\eta]} = p^{[\max(\xi, \eta)]}.$$

II. Sind $p^{[\varrho]}$ und $p^{[\sigma]}$, wobei $\varrho < \sigma$ sei, zwei Elemente aus N, zwischen denen sich kein weiteres Element aus N befindet, und sind $p^{[\xi]}$, $p^{[\eta]}$ zwei Elemente aus M derart, daß

$$\varrho \leqq \xi \leqq \sigma, \quad \varrho \leqq \eta \leqq \sigma$$

stattfindet, so gilt

$$p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\eta]} = p^{[\min(\xi+\eta-\varrho,\ \sigma)]}.$$

III. (Nur für den Fall, daß M unendlich, N dagegen endlich ist.) Ist $p^{[\varrho]}$ das oberste Element von N und sind $p^{[\xi]}$, $p^{[\eta]}$ zwei Elemente aus M derart, daß

$$\varrho \leqq \xi, \quad \varrho \leqq \eta$$

stattfindet, so gilt

$$p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\eta]} = p^{[\xi+\eta-\varrho]}.$$

Zum Schluß noch zwei Bemerkungen. Erstens: Welche Elemente das Rückgrat von M bilden, wird durch das System der Axiome A I bis A VI in keiner Weise festgelegt. Oder anders ausgedrückt: Das genannte Axiomensystem ist insofern unvollständig, als es, wenn es ein bestimmtes Holoid definieren soll, durch genaue Festsetzungen hinsichtlich der *Anzahl* der idempotenten Elemente und *Einbettung* derselben in M ergänzt werden muß, wobei zu beachten ist, daß ganz beliebige Elemente von M zu idempotenten Elementen erhoben werden können. Oder noch anders: Zwei lineare Holoide sind dann und nur dann *isomorph*, wenn sie von derselben Ordnung sind, gleichviel idempotente Elemente besitzen und wenn die Verteilung der letzteren bei beiden Holoiden dieselbe ist. Das Gesicht eines Holoids, d. h. seine Individualität, wird also in letzter Instanz von den idempotenten Elementen geprägt.

Zweitens: In § 1 wurde darauf hingewiesen, daß jedem Holoid eine gewisse quadratische Tafel zugeordnet werden kann. Handelt es sich dabei um ein lineares Holoid, so empfiehlt es sich, bei der Konstruktion der Tafel einige Abänderungen vorzunehmen. So beginne man die Numerierung nicht mit 1, sondern mit 0; die Elemente von M seien also

$$a_0, \ldots, a_m,$$

wobei

$$a_\mu = p^{[\mu]} \qquad (\mu = 0, \ldots, m)$$

sei. Sodann schreibe man in die Felder der Tafel nicht die Elemente selbst, sondern nur deren Indizes. Beispielsweise gehört zu dem aus den sechs Elementen

$$p^{[0]}, \ldots, p^{[5]}$$

bestehenden linearen Holoid, dessen idempotente Elemente

$$p^{[0]},\ p^{[2]},\ p^{[5]}$$

sind, die folgende Tafel:

	0	1	2	3	4	5	
0	0	1	2	3	4	5	0
1	1	2	2	3	4	5	1
2	2	2	2	3	4	5	2
3	3	3	3	4	5	5	3
4	4	4	4	5	5	5	4
5	5	5	5	5	5	5	5
	0	1	2	3	4	5	

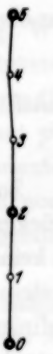

Fig. 4.

Fig. 4 stellt das Bild dieses Holoids dar; die besonders gekennzeichneten Punkte entsprechen den idempotenten Elementen.

(Eingegangen am 31. Juli 1942.)

Die Kettenregel für höhere Ableitungen.

Von

U. T. Bödewadt in Göttingen.

Wenn in einer Funktion die unabhängige Veränderliche ihrerseits doch wiederum von einer anderen Veränderlichen abhängt:

$$(1) \qquad y = F(x); \quad x = \varphi(t); \quad y = F(\varphi(t)) = f(t),$$

so ist damit eine unmittelbare oder zusammengesetzte Funktion dieser letzten Veränderlichen gegeben. Ihre Ableitung — hier und im folgenden soll vorausgesetzt sein, daß alle auftretenden Ableitungen vorhanden und stetig sind — setzt sich aus den Ableitungen der beiden einfachen Funktionen nach der Regel $f'(t) = F'(x) \cdot \varphi'(t)$ zusammen, wobei man rechter Hand für x wieder den Wert $x = \varphi(t)$ zu nehmen hat. Verwendet man zur Bezeichnung der Ableitung einer Funktion nach ihrem unmittelbaren Argument das Zeichen D, so lautet die Regel:

$$(2) \qquad Df = DF \cdot D\varphi.$$

Die Ausdehnung dieser Regel auf eine mehrfach zusammengesetzte Funktion

$$(3) \qquad z_0 \equiv t; \quad z_\nu = F_\nu(z_{\nu-1}) \qquad [\nu = 1, 2, \ldots N-1];$$

$$y = F_N(z_{N-1}) = \Big(F_N\big(F_{N-1}(\ldots F_2(F_1(t))\ldots)\big)\Big) = f(t),$$

eine sogenannte Funktionskette, erfordert nur mehrfache Anwendung von (2) und gibt die bekannte Kettenregel

$$(4) \qquad Df = DF_1 \cdot DF_2 \cdot \ldots \cdot DF_N.$$

Da man von einer richtigen Kette eigentlich nur sprechen kann, wenn sie außer dem Anfangs- und dem Endglied noch wenigstens ein Zwischenglied enthält, so müßte der Name „Kettenregel" eigentlich den Fällen $n \geqq 3$ vorbehalten bleiben. Er wird freilich auch oft für (2) gebraucht, und nicht ohne Recht: Es bedarf kaum einer Überlegung, wie die Regel (2) für den Fall (3) zu verallgemeinern sei, die Antwort (4) bietet sich sozusagen von selbst dar.

Mit den höheren Ableitungen verhält es sich hingegen anders: Hier scheint die Kettenregel bislang noch nicht angegeben worden zu sein. Der Grund dafür liegt vermutlich im Mangel an geeigneten Bezeichnungen, die sich leicht bei mehreren Funktionen gleichzeitig anwenden lassen und offene Zahlen-

faktoren in den Formeln vermeiden. Mit der in dieser Mitteilung vorgeschlagenen Bezeichnung durch Operatoren höheren Grades ist nun die Aufstellung der Kettenregel (im oben erläuterten Sinne: für mehrfach zusammengesetzte Funktionen) in übersichtlicher Form möglich. — Um des Zusammenhanges willen möge es gestattet sein, auch Bekanntes zu wiederholen[1]). Dafür sind die Beweise nur in ihren Leitgedanken angegeben worden; es wird an Hand dieser Andeutungen keine besonderen Schwierigkeiten bereiten, das Fehlende zu ergänzen. Solche Kürze ist wohl um so eher erlaubt, als durch die Arbeiten von AMALDI[2]) und MAMBRIANI[3]) alle Wünsche nach ausführlicher und gründlicher Behandlung der höheren Ableitungen einfach zusammengesetzter Funktionen auch von mehreren Veränderlichen als erfüllt gelten können. — Inhaltlich neu sind im folgenden die Formeln: (10) (für $n > 1$) und (11); vielleicht (12) bis (14), (17) bis (20), (21); ferner (26) (für $n > 1$), (34), (38) (für $n > 1$), (39), (41) und (44).

1.

Auch die höheren Ableitungen einer zusammengesetzten Funktion (1) lassen sich durch wiederholte Anwendung der Regel (2) bilden. Dabei zeigt sich, daß die k-te Ableitung der Funktion $f(t)$ für die ersten Werte von k die Gestalt

$$D^k f = \sum_{n=1}^{k} D^n F \cdot D_{kn}\varphi \tag{5}$$

hat. Bildet man hier beiderseits die Ableitung, so sieht man, daß diese Form für alle k gültig bleibt, wenn man für die Ausdrücke $D_{kn}\varphi$ die Rekursionsformel

$$D_{kn}\varphi = D(D_{k-1,n}\varphi) + D\varphi \cdot D_{k-1,n-1}\varphi \quad [k > n > 1] \tag{6}$$

mit den Ausgangswerten

$$D_{k0}\varphi = 0 \ [k > 0]; \ D_{k1}\varphi = D^k\varphi \ [k \geqq 0]; \ D_{kk}\varphi = (D\varphi)^k \ [k \geqq 0] \tag{7}$$

ansetzt. Ohne das erste Glied auf der rechten Seite gilt die Formel (6) noch für $k = n$, bei Fortlassen des zweiten Gliedes für $n = 1$. — D_{kn} ist also ein Differentialoperator von der Ordnung k (in bezug auf die unabhängige Veränderliche) und vom Grade n (in der abhängigen Veränderlichen); linear ist

---

[1]) Vgl. die am Schlusse aufgeführte Literatur, besonders die zusammenfassenden Darstellungen in [2], [3], [7].

[2]) L. [4].

[3]) L. [7]. — Von den Abhandlungen AMALDIs und MAMBRIANIs erhielt Verfasser erst nach Abschluß der vorliegenden Untersuchungen Kenntnis.

nur D_{k1}. Zur unmittelbaren Berechnung der D_{kn} dient die Formel von Faà di Bruno

$$D_{kn}\varphi(t) = \sum_{(\lambda)} k! \prod_{\nu=1}^{1+k-n} \frac{1}{\lambda_\nu!}\left(\frac{D^\nu \varphi(t)}{\nu!}\right)^{\lambda_\nu}; \tag{8}$$

die Summe ist zu erstrecken über alle Zusammenstellungen $(\lambda) = (\lambda_1, \ldots \lambda_\nu, \ldots)$ nichtnegativer ganzer Zahlen $\lambda_\nu \geqq 0$, welche die beiden Bedingungen

$$\sum \lambda_\nu = n; \quad \sum \nu \cdot \lambda_\nu = k \tag{9}$$

erfüllen. Der Beweis für diese Formel ergibt sich am schnellsten mit Hilfe der Polynomialformel, indem man in

$$f(t+\tau) = F(\varphi(t+\tau))$$

F und φ (also auch f) als in ihre Taylorreihen entwickelbar annimmt — diese Annahme ist erlaubt, da die algebraische Gestalt der Formel von den besonderen Eigenschaften von F und φ nicht abhängt — und die Koeffizienten von $\frac{\tau^n}{n!}$ vergleicht.

Von den beiden Zeigern k, n des Operators D_{kn} wurde der Ordnungszeiger an die erste Stelle gesetzt, da er in der Formel (5) offensichtlich die Hauptrolle spielt, während der Gradzeiger n zur weiteren Unterscheidung zwischen den zusammen auftretenden Operatoren gleicher Ordnung dient. Das hat allerdings zur Folge, daß man in der Kettenregel (11) die Teilfunktionen der Kette (3) in der angegebenen Weise zu beziffern hat, d. h.: nicht in der Reihenfolge, die sich beim Schreiben einstellt, wenn man $f(t)$ mittels der F_ν anschreibt, sondern in der Reihenfolge, in der man die Teilfunktionen F_ν braucht, wenn man zu gegebenem t den Funktionswert $f(t)$ berechnet.

Bevor man die Kettenregel hinschreiben kann, muß die Formel (5) auf die Operatoren höheren Grades ausgedehnt werden:

$$D_{kn} f = \sum_{\lambda=n}^{k} D_{k\lambda}\varphi \cdot D_{\lambda n} F. \tag{10}$$

Diese Gleichung ist für $n = 1$ mit (5) identisch, für $n = k$ mit der k-ten Potenz von (2); für $k > n > 1$ läßt sie sich leicht mittels (6) durch Induktion nach k beweisen. Die Operatoren D_{kn} beziehen sich (ebenso wie D) stets auf das unmittelbare Argument der dabeistehenden Funktion, in (10) also bei f und φ auf t, bei F auf $x = \varphi(t)$. — Von (10) zur Kettenregel (11) ist jetzt nur noch ein ähnlich kleiner Schritt, wie oben von (2) nach (4):

$$D_{kn} f = \sum_{(\lambda)} D_{\lambda_0 \lambda_1} F_1(z_0) \cdot D_{\lambda_1 \lambda_2} F_2(z_1) \cdot \ldots \cdot D_{\lambda_{N-1} \lambda_N} F_N(z_{N-1}) \tag{11}$$
$$[k = \lambda_0 \geqq \lambda_1 \geqq \cdots \geqq \lambda_N = n];$$

die Summe ist über alle $\frac{(N-1+k-n)!}{(N-1)!\,(k-n)!}$ Zusammenstellungen $(\lambda) = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ aus nichtnegativen ganzen λ_ν zu erstrecken, welche den angegebenen

Ungleichungen genügen. Formel (11) enthält nach (7) für $n = 1$ auch die Regel für die höheren Ableitungen der durch (3) vorgelegten Funktion $f(t)$.

Die Ausdrücke $D_{kn}f$ lassen sich, statt nach Formel (6), auch als Summen von Produkten zweier Operatoren niedrigeren Grades aufbauen:

$$\binom{n}{\nu} D_{kn}f = \sum_{\varkappa=n-\nu}^{k-\nu} \binom{k}{\varkappa} D_{k-\varkappa,\nu}f \cdot D_{\varkappa,n-\nu}f; \tag{12}$$

$$\binom{n-1}{\nu-1} D_{kn}f = \sum_{\varkappa=n-\nu}^{k-\nu} \binom{k-1}{\varkappa} D_{k-\varkappa,\nu}f \cdot D_{\varkappa,n-\nu}f; \tag{13}$$

$$\binom{n-1}{\nu} D_{kn}f = \sum_{\varkappa=n-\nu}^{k-\nu} \binom{k-1}{\varkappa-1} D_{k-\varkappa,\nu}f \cdot D_{\varkappa,n-\nu}f \tag{14}$$

(gültig für $0 < \nu < n$).

Beweis: (12) bestätigt man durch Einsetzen von (8), indem man die aus der Binomialentwicklung von

$$\prod_{\mu} (1+x)^{r_\mu} = (1+x)^{R} \quad [\Sigma r_\mu = R]$$

zu erhaltende Gleichung

$$\sum_{(\lambda)} \prod_{\mu} \binom{r_\mu}{\lambda_\mu} = \binom{R}{\Lambda} \quad \begin{matrix}[0 \leqq \lambda_\mu \leqq r_\mu; \\ \Sigma\lambda_\mu = \Lambda;\ \Sigma r_\mu = R]\end{matrix}$$

beachtet. Wenn man diese Gleichung mit $\sigma \cdot \lambda_\sigma$ vervielfacht, so gelangt man wegen

$$b \cdot \binom{a}{b} = a \cdot \binom{a-1}{b-1}$$

durch Summation über σ zu der Gleichung

$$\sum_{(\lambda)} (\Sigma\mu \cdot \lambda_\mu) \cdot \prod_{\mu} \binom{r_\mu}{\lambda_\mu} = (\Sigma\mu \cdot r_\mu) \cdot \binom{R-1}{\Lambda-1}$$
$$[0 \leqq \lambda_\mu \leqq r_\mu;\quad \Sigma\lambda_\mu = \Lambda;\quad \Sigma r_\mu = R].$$

Diese dient zusammen mit (8) zur Bestätigung von (13); und (14) ist die Differenz zwischen (12) und (13).

2.

Als Anwendung hierfür seien die Ableitungen der Umkehrfunktion zu einer gegebenen Funktion (mit nicht verschwindender erster Ableitung) berechnet: Es sei

$$y = f(x),\ x = g(y);\quad \text{also } x \equiv g(f(x));\quad f'(x) \neq 0.$$

Daraus folgen die Gleichungen

$$D_{11}x = 1 = Dg \cdot Df;$$

$$D_{k1}x = 0 = \sum_{\nu=1}^{k} D^\nu g \cdot D_{k\nu}f \quad [k = 2, 3, \ldots, n].$$

Aus der ersten fließt $Dg = (Df)^{-1}$. Berechnet man aus diesen n Gleichungen für die n Unbekannten $Dg, D^2g, \ldots D^ng$ die letzte mittels Determinanten, so erhält man[4])

$$(15)\quad D^ng = (Df)^{-\binom{n+1}{2}} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \mathrm{Det}\,|A_{ik}| \quad [i, k = 1, 2, \ldots, n-1]$$
$$\text{mit } A_{ik} = D_{i+1}f \ [k \leqq i+1]; \ = 0 \ [k > i+1].$$

Diese Determinante läßt sich zu einer anderen umformen, in der überall nur eine Ableitung von f steht (nur Operatoren 1. Grades). Man ziehe rechts einen Faktor $\frac{1}{(n-2)!}$ vor die Determinante und vervielfache dafür die zweite, ... k-te, ... $(n-1)$-te Spalte mit $(n-2), \ldots, (n-k), \ldots, 1$. Dann wird also

$$(16)\quad D^ng = \frac{(-1)^{n+1}}{(n-2)!} \cdot (Df)^{-\binom{n+1}{2}} \cdot \mathrm{Det}\,|B^{(n)}_{i,k}| \quad [i, k = 1, 2, \ldots, n-1]$$
$$\text{mit } B^{(n)}_{i,k} = D_{i+1,1}f \ [k = 1]; \ = (n-k)D_{i+1,k}f \ [2 \leqq k \leqq i+1];$$
$$= 0 \ [i+1 < k \leqq n-1].$$

Wenn man in (12) und (13) für $k, n, \varkappa, \nu$ die Werte $i+1, k, \lambda-1, 1$ einsetzt, hierauf (12) mit n vervielfacht und davon (13) abzieht, so kommt man auf die Gleichung

$$(17)\quad (n-k)D_{i+1,k}f = \sum_{\lambda=k}^{i+1}\left\{n\binom{i}{\lambda-1} - \binom{i+1}{\lambda-1}\right\} \cdot D_{i-\lambda+2,1}f \cdot D_{\lambda-1,k-1}f.$$

Die Klammer rechts verschwindet für $i = n-1$, $\lambda = i+1$; schreibt man daher

$$(18)\quad C^{(n)}_{i,k} = D^{i+1}f \ [k = 1]; \ = \alpha^{(n)}_{i,k} \cdot D^{i-k+2}f \ [2 \leqq k \leqq i+1];$$
$$= 0 \ [i+1 < k \leqq n-1]$$
$$\text{mit } \alpha^{(n)}_{i,k} = n \cdot \binom{i}{k-1} - \binom{i+1}{k-1},$$

so wird für $k > 1$

$$B^{(n)}_{i,k} = \sum_{\lambda=k}^{n-1} C^{(n)}_{i,\lambda} \cdot D_{\lambda-1,k-1}f.$$

Der zweite Faktor ist für alle Zeilen i derselbe, die Spalten B_{ik} sind also linear aus den Spalten C_{ik} zusammengesetzt, und aus (16) wird mit (18) die Darstellung

$$(19)\quad D^ng = \frac{(-1)^{n+1}}{(n-2)!} \cdot (Df)^{-2n+1} \cdot \mathrm{Det}\,|C^{(n)}_{i,k}| \quad [i, k = 1, \ldots n-1].$$

---

[4]) L [1], Formel (6). Die dort daraus abgeleitete Formel (7) ist für $n > 3$ *nicht* richtig.

Von den Zahlen $\alpha_{i,k}^{(n)}$ in (18) bilden die in der Schrägreihe $i + 1 = k$ stenenden und ebenso die in der zweiten Spalte je eine arithmetische Reihe erster Ordnung mit den Differenzen 1 und $n - 1$, und die anderen lassen sich bequem rekursiv aus ihnen berechnen:

$$\begin{aligned} &\alpha_{i,2}^{(n)} = i \cdot (n-1) - 1; \quad \alpha_{k-1,k}^{(n)} = n - k; \\ &\alpha_{i,k}^{(n)} = \alpha_{i-1,k}^{(n)} + \alpha_{i-1,k-1}^{(n)} \quad [3 \leqq k \leqq i]. \end{aligned} \tag{20}$$

Durch Entwickeln der Determinante (19) entsteht die der Brunoschen Formel (8) entsprechende Darstellung

$$D^n g = (Df)^{-2n+1} \sum_{(\lambda)} (2n - 2 - \lambda_1)! \, (Df)^{\lambda_1} \prod_{\nu=2}^{n} \frac{1}{\lambda_\nu!} \left(-\frac{D^\nu f}{\nu!}\right)^{\lambda_\nu} \tag{21}$$

$$[0 \leqq \lambda_\nu; \ \sum_1^n \lambda_\nu = n - 1; \ \sum_1^n \nu \, \lambda_\nu = 2n - 2].$$

Für den Beweis mag es indessen bequemer sein, sie aus dem Potenzreihenansatz für f und g herzuleiten mittels der Bürmann-Lagrangeschen Umkehrformel[5])

$$\frac{d^n x}{dy^n} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{x}{y}\right)^n.$$

3.

Die Erweiterung der Regel (5) auf den Fall mehrerer Zwischenveränderlichen

$$\begin{aligned} &y = F(x_1, \ldots, x_\nu, \ldots); \quad x_\nu = \varphi_\nu(t); \\ &y = F(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_\nu(t), \ldots) = f(t) \end{aligned} \tag{22}$$

läßt sich ebenfalls mit Hilfe der Operatoren D_{kn} anschreiben. Um Zahlenfaktoren in den Formeln zu vermeiden, ist es indessen zweckmäßig, neue Bezeichnungen zu wählen:

$$D^{kn} f = \frac{n!}{k!} D_{kn} f. \tag{23}$$

Statt (6) und der zweiten Gleichung von (7) hat man dann

$$D^{kn} f = \frac{1}{k} \cdot D(D^{k-1,\,n} f) + \frac{n}{k} \cdot Df \cdot D^{k-1,\,n-1} f, \tag{24}$$

$$D^{k1} f = \frac{1}{k!} D^k f; \tag{25}$$

in (8) tritt $n!$ an Stelle des $k!$ Die erste und dritte Gleichung von (7) und die Formeln (10), (11) bleiben sogar unverändert gültig, wenn die Operatoren-

[5]) L [5]; L [6], S. 138.

zeiger sämtlich nach oben gerückt werden. Insofern hätten zwar von vornherein die $D^{k\,n}$ eingeführt werden können; bei Funktionen nur je einer Veränderlichen bieten indessen die $D_{k\,n}$ den Vorzug, daß in den Formeln (6), (7), (8) keine Brüche auftreten. Bei mehreren Veränderlichen sind diese Brüche jedoch noch angenehmer als die Polynomialfaktoren, die sich sonst (insbesondere für $n = 1$) in (26) und den späteren Formeln einstellen würden. Ferner ist durch die Hochstellung der Zeiger jetzt unten Platz, um bei partiellen Ableitungen die Veränderliche anzudeuten, wie es beim Operator D üblich ist: es möge also $D_{(\nu)}$ die partielle Ableitung nach der ν-ten Veränderlichen bezeichnen, dementsprechend $D_{(\nu)}^{k,\,1}F = (1:k!)\,D_{(\nu)}^{k}F$; ebenso $D_{(\nu)}^{0,\,1}F = F$.

Eine der Gleichung (10) entsprechende Regel[6]) hat nun die Form

$$D^{k\,n} f = \sum_{\Lambda=n}^{k} \sum_{(\lambda)} D^{k\,(\lambda)}\varphi \cdot D^{(\lambda)\,n} F \quad [0 \leqq \lambda_\nu;\ \Sigma\,\lambda_\nu = \Lambda]. \tag{26}$$

Hierin bedeutet der erste Faktor folgendes:

$$D^{k,\,(\lambda)}\varphi = D^{k,\,(\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_\nu,\,\ldots)}\varphi = \sum_{(\alpha)} \prod_{\nu} D^{\alpha_\nu,\,\lambda_\nu}\varphi_\nu(t) \tag{27}$$

$$[0 \leqq \lambda_\nu \leqq \alpha_\nu;\ \Sigma\,\alpha_\nu = k].$$

Er läßt sich auch rekursiv berechnen. Schreiben wir die Zeigerzusammenstellung (λ), in welcher alle Zeiger λ_ν verschwinden mit Ausnahme desjenigen, welcher zur Funktion $\varphi_\tau(t)$ gehört und den Wert 1 haben soll, kurz als (δ_τ); $(\lambda - \delta_\tau)$ soll somit dieselbe Zusammenstellung bezeichnen wie (λ), nur daß der zur Funktion $\varphi_\tau(t)$ gehörige Zeiger um 1 verkleinert worden ist. Dann geht der Ausdruck (27) aus den Werten

$$D^{k,\,(\delta_\tau)}\varphi = D^{k\,1}\varphi_\tau; \quad D^{\Lambda,\,(\lambda)}\varphi = \prod_{\nu} (D\,\varphi_\nu)^{\lambda_\nu} \quad [\Sigma\,\lambda_\nu = \Lambda] \tag{28}$$

nach der Formel

$$D^{k,\,(\lambda)}\varphi = \frac{1}{k} D(D^{k-1,\,(\lambda)}\varphi) + \sum_{\tau} \frac{\lambda_\tau}{k} D\,\varphi_\tau \cdot D^{k-1,\,(\lambda-\delta_\tau)}\varphi \tag{29}$$

hervor, sobald $k > \Lambda > 1$ ist; für $k = \Sigma\,\lambda$ hat man nur das erste Glied wegzulassen, um die Formel noch anwenden zu können. Die Summation in (29) braucht nur auf diejenigen τ ausgedehnt zu werden, für die $\lambda_\tau > 0$ ist.

Der Operator $D^{(\lambda),\,n}$ des zweiten Faktors in (26) ist von der Ordnung λ_ν in x_ν und vom Grade n in F; der Grad ist höchstens gleich der Gesamtordnung Λ. In den Randfällen $n = 0$, $= 1$ und $= \Lambda$ ist sein Sinn:

$$\begin{aligned} &D^{(\lambda)\,0}F = 1\ [\Lambda = 0],\ = 0\ [\Lambda > 0];\\ &D^{(\lambda)\,1}F = \Big(\prod_{\nu} D_{(\nu)}^{\lambda_\nu 1}\Big)F;\\ &D^{(\lambda)\,\Lambda}F = \Lambda!\prod_{\nu}\frac{(D_{(\nu)}F)^{\lambda_\nu}}{\lambda_\nu!}; \end{aligned} \tag{30}$$

[6]) Der Fall $n = 1$ findet sich bei TEIXEIRA [1].

für die Zwischenfälle ist er in folgender Weise zu bilden:

$$\lambda_\tau \cdot D^{(\lambda),\,n} F = D_{(\tau)} (D^{(\lambda-\delta_\tau),\,n} F) + n \cdot D_{(\tau)} F \cdot D^{(\lambda-\delta_\tau),\,n-1} F \tag{31}$$

$$[1 < n < \Lambda = \Sigma \lambda_\nu;\ \lambda_\tau > 0].$$

Die Rekursion kann nach jeder Veränderlichen x_τ vorgenommen werden, für die $\lambda_\tau > 0$ ist. Im Fall $n = \Lambda$ ist rechts das erste Glied fortzulassen, damit die Formel gültig bleibe, für $n = 1$ das zweite Glied. Zur unmittelbaren Berechnung aus Operatoren ersten Grades ist die nachstehende Formel tauglich, die (8) und (30) als Sonderfälle einschließt:

$$D^{(k_\varrho),\,n} F = \sum_{(\lambda_\tau)} \sum_{(\nu_{\sigma\tau})} n! \prod_\tau \frac{1}{\lambda_\tau!} (D^{(\nu_{\sigma\tau}),\,1} F)^{\lambda_\tau}; \tag{32}$$

die Summe ist zu erstrecken über alle möglichen Zusammenstellungen von Zahlengruppen (λ_τ), $(\nu_{1\tau}, \ldots \nu_{\varrho\tau}, \ldots)$ — der Zeiger τ hat hier nur den Sinn, die verschiedenen Gruppen in einer solchen Zusammenstellung zu unterscheiden —, welche die Bedingungen

$$0 \leqq \lambda_\tau;\ 0 \leqq \nu_{\varrho\tau};\ 1 \leqq \sum_\varrho \nu_{\varrho\tau};\ \sum_\tau \lambda_\tau = n;\ \sum_\tau \nu_{\varrho\tau} \cdot \lambda_\tau = k_\varrho \tag{33}$$

befriedigen. Ein Beispiel möge die Anwendung von (31) und (32) zeigen: Nach (31) ist

$$D^{(41)\,3} F(x, y) = \tfrac{1}{4} D_x (D^{(31)\,3} F) + \tfrac{3}{4} F_x \cdot D^{(31)\,2} F$$

$$= \tfrac{1}{4} D_x (3 F_x^2 F_{xy} + 3 F_x F_{xx} F_y) + \tfrac{3}{4} F_x (F_x F_{xxy} + F_{xx} F_{xy} + \tfrac{1}{3} F_{xxx} F_y)$$

oder ebensogut

$$D^{(41)\,3} F(x, y) = D_y (D^{(40)\,3} F) + 3 F_y \cdot D^{(40)\,2} F$$

$$= D_y (\tfrac{3}{3} F_x^2 F_{xx}) + 3 F_y (\tfrac{1}{3} F_x F_{xxx} + \tfrac{1}{4} F_{xx}^2),$$

nach (32) ist

$$D^{(41)\,3} F(x, y) = 3! \{D^{(10)\,1} F \cdot D^{(20)\,1} F \cdot D^{(11)\,1} F + D^{(10)\,1} F \cdot D^{(30)\,1} F \cdot D^{(01)\,1} F$$

$$+ \tfrac{1}{2} (D^{(10)\,1} F)^2 \cdot D^{(21)\,1} F + \tfrac{1}{2} (D^{(20)\,1} F)^2 \cdot D^{(01)\,1} F\}$$

$$= 6 \{F_x \cdot \tfrac{1}{2} F_{xx} \cdot F_{xy} + F_x \cdot \tfrac{1}{6} F_{xxx} \cdot F_y + \tfrac{1}{2} F_x^2 \cdot \tfrac{1}{2} F_{xxy} + \tfrac{1}{2} (\tfrac{1}{2} F_{xx})^2 \cdot F_y\}$$

$$= 3 F_x F_{xx} F_{xy} + F_x F_{xxx} F_y + \tfrac{3}{2} F_x^2 F_{xxy} + \tfrac{3}{4} F_{xx}^2 F_y.$$

Der Beweis für (26) kann auf folgendem Wege geführt werden: Für $k = n = 1$ ist (26) die bekannte Regel für die totale Ableitung

$$\frac{df}{dt} = \sum_\nu D\, \varphi_\nu \cdot D_{(\nu)} F.$$

Setzen wir voraus, (26) sei für alle n richtig mit $k - 1$ an Stelle von k; zugleich soll (31) für alle $\Lambda < k$ in Ordnung befunden sein. Durch (27) ist dann $D^{k\,(\lambda)} \varphi$ erklärt; (29) folgt aus (27) vermöge (24). Für $\Lambda = k$ werden die $D^{(\lambda)\,n} F$ jetzt durch (31) erklärt, und zwar unabhängig von der Wahl der zur Rekursion

benutzten Veränderlichen: dies erkennt man, indem man $D^{(\lambda)\,n}F$ einmal zuerst nach λ_1 reduziert, die übriggebliebenen Ausdrücke $D^{(\lambda-\delta_1)\,n}F$ und $D^{(\lambda-\delta_1),\,n-1}F$ darauf nach λ_2; ein andermal zuerst nach λ_2, darauf nach λ_1. Wenn man nun in (24) für $D^{k-1,\,n}f$ und $D^{k-1,\,n-1}f$ die Darstellung (26) einsetzt, so ergibt sich wegen (29) und (31) ihre Gültigkeit auch für $D^{k\,n}f$. — (32) beweist man wie (8) durch Potenzreihenansatz und Polynomialformel.

Die Regel (26) ist nun aber nicht die einzige, welche bei mehreren Veränderlichen der Gleichung (10) entspricht. Hat man es z. B. mit mehreren Funktionen F_ν zu tun, welche von den gleichen Veränderlichen x_μ abhängen, die wiederum als Funktionen φ_μ einer Unveränderlichen t gegeben sind, dann entsteht ein System mittelbarer Funktionen $f_\nu(t) = F_\nu(\varphi_\mu(t))$. Hier lassen sich für die linke Seite die Ausdrücke (27) bilden; und wenn man die einfachen Fälle (28) zuerst nachprüft und dann auf diese mittels (29) zurückgeht, so kommt man zu der Regel

$$(34)\quad D^{k\,(n)}f = \sum_{\Lambda=N}^{k} \sum_{(\lambda)} D^{k\,(\lambda)}\varphi \cdot D^{(\lambda)\,(n)}F \quad [0 \leqq \lambda_\mu;\ \Sigma\lambda_\mu = \Lambda;\ \Sigma n_\nu = N].$$

Hier wurden entsprechend (27) gewisse Glieder vorweg vereinigt:

$$(35)\quad D^{(\lambda)\,(n)}F = \sum_{(\lambda_{\mu\nu})} \prod_{\nu} D^{(\lambda_{1\nu},\ldots,\lambda_{\mu\nu},\ldots)\,n_\nu}F_\nu$$

$$[0 \leqq \lambda_{\mu\nu};\ \sum_{\nu}\lambda_{\mu\nu} = \lambda_\mu;\ \sum_{\mu}\lambda_{\mu\nu} \geqq n_\nu].$$

Für jedes verschwindende n_ν sind hierbei nach (30) alle zugehörigen $\lambda_{\mu\nu} = 0$ zu nehmen, solch ein Faktor ist also fortzulassen. Auch diese Größen (35) lassen sich stufenweise bilden nach der Gleichung (36), die aus (31) und (35) folgt[7]):

$$(36)\quad k_\mu \cdot D^{(k)\,(n)}F = D_{(\mu)}(D^{(k-\delta_\mu)\,(n)}F) + \sum_{\nu} n_\nu \cdot D_{(\mu)}F \cdot D^{(k-\delta_\mu)\,(n-\delta_\nu)}F$$

$$[1 < N < K;\ \Sigma n = N;\ \Sigma k = K;\ k_\mu > 0],$$

wo wie in (31) die Reduktion nach jeder Veränderlichen x_μ erfolgen kann, deren Ordnungszeiger k_μ nicht verschwindet. Ohne das erste Glied gilt die Formel (36), von der (24), (29) und (31) Sonderfälle sind, auch noch für $N = K$. Für $N = 1$, d. h. $(n) = (\delta_\nu)$ benutze man

$$(37)\quad D^{(k)\,(n)}F = D^{(k)\,m}F \quad [n_\nu = m, \text{ alle übrigen } n = 0].$$

Setzt man nun (34) in (26) ein, so ergibt sich (denn da die auftretenden Funktionen nur stetige Ableitungen zu haben brauchen und im übrigen ganz willkürlich sind, so ist ein gliedweiser Vergleich zulässig) eine Regel für den Fall, daß eine Funktion F von mehreren Zwischenveränderlichen x_ν vorliegt,

---

[7]) In anderer Bezeichnung von AMALDI [4] angegeben. Dort und bei MAMBRIANI [7] sind auch weitere Untersuchungen über den kombinatorischen Aufbau der Ausdrücke (35) zu finden.

welche Funktionen φ_ν von mehreren Urveränderlichen t_ϱ sind: also $f(t_\varrho) = F(\varphi_\nu(t_\varrho))$. Man kann sie auch mittels (30) und (31) aus (26) ableiten, worauf Einsetzen von (38) in (26) eben (34) liefern würde. Die Regel[8]) lautet:

$$(38)\quad D^{(k)\,n} f = \sum_{\Lambda=n}^{K} \sum_{(\lambda)} D^{(k)\,(\lambda)} \varphi \cdot D^{(\lambda)\,n} F \quad [0 \leqq \lambda_\nu;\ \Sigma \lambda_\nu = \Lambda;\ \Sigma k_\varrho = K].$$

Setzt man schließlich sowohl (34) wie (38) in (26) ein, so findet man die Regel für den Fall, daß ein System von Funktionen F_ν vorliegt, welche von einem System Zwischenveränderlicher x_μ abhängen, die ihrerseits als Funktionen φ_μ mehrerer Urveränderlichen t_ϱ gegeben sind, so daß ein System mittelbarer Funktionen von mehreren Veränderlichen $f_\nu(t_\varrho) = F_\nu(\varphi_\mu(t_\varrho))$ entsteht:

$$(39)\quad D^{(k)\,(n)} f = \sum_{\Lambda=N}^{K} \sum_{(\lambda)} D^{(k)\,(\lambda)} \varphi \cdot D^{(\lambda)\,(n)} F$$
$$[\Sigma k = K;\quad \Sigma n = N;\quad 0 \leqq \lambda_\mu;\quad \Sigma \lambda = \Lambda].$$

Erst diese Formel ist die vollständige Verallgemeinerung zu (10); sie umfaßt (34) und (38), aber auch (26) und (10) als Sonderfälle, und sie läßt sich ebenso leicht wie (10) zur Kettenregel verallgemeinern.

Die Kettenregel für mehrere Gruppen von Zwischenveränderlichen in voller Allgemeinheit hinzuschreiben, würde wegen zu vieler Zeiger an den Hauptbuchstaben doch wohl ein unklares Bild geben. Es seien darum nur drei Zwischengruppen angenommen; das Aussehen der Regel bei mehr Zwischengruppen ist aus diesem Beispiel dann mühelos zu entnehmen:

$$(40)\quad \begin{gathered} x_\lambda = \varphi_\lambda(t);\quad y_\mu = \psi_\mu(\ldots x_\lambda \ldots); \\ z_\nu = \chi_\nu(\ldots y_\mu \ldots);\quad F(\ldots z_\nu \ldots) = f(t). \end{gathered}$$

An die Stelle der Zeiger λ_ν von Formel (11) tritt hier je ein ganzer Satz solcher Zeiger: α_λ, β_μ, γ_ν, die die Ordnung (wenn sie an dem Operator in der vorderen Gruppe stehen) oder den Grad (wenn sie in der zweiten Zeigergruppe stehen) des betreffenden Faktors in bezug auf die zugehörige Zwischenveränderliche x_λ, y_μ, z_ν anzeigen. Nur zur Erhöhung der Übersichtlichkeit werden die Summanden, wie schon in (26), (34), (38) und (39), noch nach gleichen Summenwerten (Λ) zusammengefaßt. Die Kettenregel sieht dann so aus:

$$(41)\quad D^{k\,n} f = \sum_{(\Lambda)} \sum_{(\alpha\beta\gamma)} D^{k\,(\alpha)} \varphi \cdot D^{(\alpha)\,(\beta)} \psi \cdot D^{(\beta)\,(\gamma)} \chi \cdot D^{(\gamma)\,n} F.$$

Die Summe ist zu erstrecken über alle Zusammenstellungen

$$(\Lambda) = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) \text{ und } (\alpha, \beta, \gamma) = (\ldots \alpha_\lambda \ldots, \ldots \beta_\mu \ldots, \ldots \gamma_\nu \ldots),$$

die folgende Bedingungen erfüllen:

$$(42)\quad k = \Lambda_0 \geqq \Lambda_1 \geqq \Lambda_2 \geqq \Lambda_3 \geqq \Lambda_4 = n;\ 0 \leqq \alpha_\lambda,\ 0 \leqq \beta_\mu,\ 0 \leqq \gamma_\nu;$$
$$\Sigma \alpha_\lambda = \Lambda_1,\ \Sigma \beta_\mu = \Lambda_2,\ \Sigma \gamma_\nu = \Lambda_3.$$

---

[8]) Der Fall $n = 1$ ist von AMALDI [4] und MAMBRIANI [7] gegeben worden.

Hängen die x_λ und damit die ganze mittelbare Funktion f statt von einer Urveränderlichen t von mehreren $(\ldots t_\varrho \ldots)$ ab:

$$(43)\qquad x_\lambda = \varphi_\lambda(\ldots t_\varrho \ldots);\quad y_\mu = \psi_\mu(\ldots x_\lambda \ldots);$$
$$z_\nu = \chi_\nu(\ldots y_\mu \ldots);\quad F(\ldots z_\nu \ldots) = f(\ldots t_\varrho \ldots),$$

so braucht man an Stelle von (41) die Formel

$$(44)\qquad D^{(k)\,n} f = \sum_{(\Lambda)} \sum_{(\alpha\beta\gamma)} D^{(k)(\alpha)} \varphi \cdot D^{(\alpha)(\beta)} \psi \cdot D^{(\beta)(\gamma)} \chi \cdot D^{(\gamma)\,n} F$$

mit denselben Bedingungen (42); nur ist jetzt $\Sigma k_\varrho = K = \Lambda_0$ einzusetzen. — Für den Fall, daß statt einer Funktion $f(\ldots t_\varrho \ldots) = F(\ldots z_\nu \ldots)$ deren mehrere vorhanden sind und für dieses System einer der in (26) oder (31) eingeführten Ausdrücke $D^{k\,(n)} f$ oder $D^{(k)\,(n)} f$ — je nach der Anzahl der Urveränderlichen kommt der eine oder der andere in Betracht — mittels der Zwischenveränderlichen darzustellen ist, läßt sich die erforderliche Änderung der Formel (41) oder (44) leicht vornehmen.

Die Anwendung der Kettenregel (41) soll zum Schluß an dem einfachsten nicht trivialen Beispiel gezeigt werden:

$$x_\mu = \varphi_\mu(t)\ [\mu = 1, 2];\quad y_\nu = \psi_\nu(x_1, x_2)\ [\nu = 1, 2];\quad F(y_1, y_2) = f(t).$$

Verlangt sei, $f''(t)$ durch die Ableitungen von F, ψ_1, ψ_2, φ_1, φ_2 auszudrücken. Es ist mithin $k = 2$, $n = 1$ zu nehmen, da $D^{21} f = \frac{1}{2} f''$. Den Veränderlichen x_1, x_2; y_1, y_2 sollen die Zeiger α_1, α_2; β_1, β_2 zugeordnet sein. Dann ist nach (41)

$$D^{21} f = \sum_{\mathsf{A},\,\mathsf{B}} \sum_{(\alpha,\,\beta)} D^{2\,(\alpha)} \varphi \cdot D^{(\alpha)(\beta)} \psi \cdot D^{(\beta)\,1} F,$$

wobei die nichtnegativen ganzen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, A, B auf jede mögliche Weise einmal so einzusetzen sind, daß dabei

$$2 \geqq \mathsf{A} \geqq \mathsf{B} \geqq 1;\ \alpha_1 + \alpha_2 = \mathsf{A},\ \beta_1 + \beta_2 = \mathsf{B}.$$

Für die Zeigersummen A, B gibt es hiernach drei Möglichkeiten: $\mathsf{A} = \mathsf{B} = 1$; $\mathsf{A} = 2$, $\mathsf{B} = 1$; $\mathsf{A} = \mathsf{B} = 2$. Zu $\mathsf{A} = 1$ gibt es zwei Möglichkeiten für die Wahl der (α): entweder ist $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 0)$ oder $= (0, 1)$; zu $\mathsf{A} = 2$ gibt es drei: $(\alpha_1, \alpha_2) = (2, 0)$ oder $(1, 1)$ oder $(0, 2)$. Mit den entsprechenden Möglichkeiten für (β) erhält man im ganzen $2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 19$ verschiedene Zusammenstellungen (α, β). Es wird also

$$\begin{aligned}
D^{21} f = {} & D^{2\,(10)} \varphi \cdot D^{(10)\,(10)} \psi \cdot D^{(10)\,1} F + D^{2\,(01)} \varphi \cdot D^{(01)\,(10)} \psi \cdot D^{(10)\,1} F \\
& + D^{2\,(10)} \varphi \cdot D^{(10)\,(01)} \psi \cdot D^{(01)\,1} F + D^{2\,(01)} \varphi \cdot D^{(01)\,(01)} \psi \cdot D^{(01)\,1} F \\
{}^{2\,(20)} \varphi \cdot D^{(20)\,(10)} \psi \cdot D^{(10)\,1} F & + D^{2\,(11)} \varphi \cdot D^{(11)\,(10)} \psi \cdot D^{(10)\,1} F + D^{2\,(02)} \varphi \cdot D^{(02)\,(10)} \psi \cdot D^{(10)\,1} F \\
{}^{2\,(20)} \varphi \cdot D^{(20)\,(01)} \psi \cdot D^{(01)\,1} F & + D^{2\,(11)} \varphi \cdot D^{(11)\,(01)} \psi \cdot D^{(01)\,1} F + D^{2\,(02)} \varphi \cdot D^{(02)\,(01)} \psi \cdot D^{(01)\,1} F \\
{}^{2\,(20)} \varphi \cdot D^{(20)\,(20)} \psi \cdot D^{(20)\,1} F & + D^{2\,(11)} \varphi \cdot D^{(11)\,(20)} \psi \cdot D^{(20)\,1} F + D^{2\,(02)} \varphi \cdot D^{(02)\,(20)} \psi \cdot D^{(20)\,1} F \\
{}^{2\,(20)} \varphi \cdot D^{(20)\,(11)} \psi \cdot D^{(11)\,1} F & + D^{2\,(11)} \varphi \cdot D^{(11)\,(11)} \psi \cdot D^{(11)\,1} F + D^{2\,(02)} \varphi \cdot D^{(02)\,(11)} \psi \cdot D^{(11)\,1} F \\
{}^{2\,(20)} \varphi \cdot D^{(20)\,(02)} \psi \cdot D^{(02)\,1} F & + D^{2\,(11)} \varphi \cdot D^{(11)\,(02)} \psi \cdot D^{(02)\,1} F + D^{2\,(02)} \varphi \cdot D^{(02)\,(02)} \psi \cdot D^{(02)\,1} F.
\end{aligned}$$

An erster Stelle treten in diesen 19 Produkten 5 verschiedene Faktoren auf:

$$D^{2\,(10)}\,\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2\,\varphi_1}{dt^2};\qquad D^{2\,(01)}\,\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{d^2\,\varphi_2}{dt^2};$$

$$D^{2\,(20)}\,\varphi = \left(\frac{d\,\varphi_1}{dt}\right)^2;\qquad D^{2\,(11)}\,\varphi = \frac{d\,\varphi_1}{dt}\cdot\frac{d\,\varphi_2}{dt};\qquad D^{2\,(02)}\,\varphi = \left(\frac{d\,\varphi_2}{dt}\right)^2.$$

Der mittlere Faktor hat in jedem Gliede einen anderen Wert:

$$D^{(10)\,(10)}\,\psi = \frac{\partial\,\psi_1}{\partial\,x_1};\qquad D^{(01)\,(10)}\,\psi = \frac{\partial\,\psi_1}{\partial\,x_2};\qquad D^{(10)\,(01)}\,\psi = \frac{\partial\,\psi_2}{\partial\,x_1};\qquad D^{(01)\,(01)}\,\psi = \frac{\partial\,\psi}{\partial\,x}$$

$$D^{(20)\,(10)}\,\psi = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\,\psi_1}{\partial\,x_1^2};\qquad D^{(11)\,(10)}\,\psi = \frac{\partial^2\,\psi_1}{\partial\,x_1\,\partial\,x_2};\qquad D^{(02)\,(10)}\,\psi = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\,\psi_1}{\partial\,x_2^2};$$

$$D^{(20)\,(01)}\,\psi = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\,\psi_2}{\partial\,x_1^2};\qquad D^{(11)\,(01)}\,\psi = \frac{\partial^2\,\psi_2}{\partial\,x_1\,\partial\,x_2};\qquad D^{(02)\,(01)}\,\psi = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\,\psi_2}{\partial\,x_2^2};$$

$$D^{(20)\,(20)}\,\psi = \left(\frac{\partial\,\psi_1}{\partial\,x_1}\right)^2;\qquad D^{(11)\,(20)}\,\psi = 2\,\frac{\partial\,\psi_1}{\partial\,x_1}\cdot\frac{\partial\,\psi_1}{\partial\,x_2};\qquad D^{(02)\,(20)}\,\psi = \left(\frac{\partial\,\psi_1}{\partial\,x_2}\right)^2;$$

$$D^{(20)\,(11)}\,\psi = \frac{\partial\,\psi_1}{\partial\,x_1}\cdot\frac{\partial\,\psi_2}{\partial\,x_1};\qquad D^{(11)\,(11)}\,\psi = \frac{\partial\,\psi_1}{\partial\,x_1}\frac{\partial\,\psi_2}{\partial\,x_2} + \frac{\partial\,\psi_1}{\partial\,x_2}\frac{\partial\,\psi_2}{\partial\,x_1};\qquad D^{(02)\,(11)}\,\psi = \frac{\partial\,\psi_1}{\partial\,x_2}\cdot\frac{\partial\,\psi}{\partial\,x}$$

$$D^{(20)\,(02)}\,\psi = \left(\frac{\partial\,\psi_2}{\partial\,x_1}\right)^2;\qquad D^{(11)\,(02)}\,\psi = 2\,\frac{\partial\,\psi_2}{\partial\,x_1}\cdot\frac{\partial\,\psi_2}{\partial\,x_2};\qquad D^{(02)\,(02)}\,\psi = \left(\frac{\partial\,\psi_2}{\partial\,x_2}\right)^2.$$

An dritter Stelle steht eine dieser fünf Größen:

$$D^{(10)\,1}\,F = \frac{\partial\,F}{\partial\,y_1};\qquad D^{(01)\,1}\,F = \frac{\partial\,F}{\partial\,y_2};$$

$$D^{(20)\,1}\,F = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\,F}{\partial\,y_1^2};\qquad D^{(11)\,1}\,F = \frac{\partial^2\,F}{\partial\,y_1\,\partial\,y_2};\qquad D^{(02)\,1}\,F = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\,F}{\partial\,y_2^2}.$$

Literaturverzeichnis.

[1] F. G. Teixeira, Giorn. mat. Battaglini **18** (1880), S. 301—309.
[2] A. Voss, Enz. Math. Wiss. II, 1a, S. 87—88.
[3] J. Molk, Enc. Sci. Math. II, 1a, S. 332—336.
[4] U. Amaldi, Rend. Palermo **42** (1917), S. 94—115.
[5] Hass, Mitteilungen Math. Ges. Hamburg **6** (1926), S. 163—189.
[6] Hurwitz-Courant, Funktionentheorie, 3. Aufl. Berlin 1929.
[7] A. Mambriani, Boll. Un. Mat. Ital. **13** (1934), S. 217—222, 284—288; **14** (1935), S. 10—16.

(Eingegangen am 20. September 1942.)

Über den Flächeninhalt dehnungsbeschränkter Flächen.

Von

Georg Nöbeling in Erlangen.

Einleitung.

Bei der Frage nach der Eindeutigkeit des Flächeninhalts verweist man gern auf die bekannte Arbeit von A. Kolmogoroff[1]), in welcher u. a. bewiesen wird, daß die von ihm axiomatisch eingeführten Maße — wir nennen sie kurz Kolmogoroff-Maße — für jede dehnungsbeschränkte Fläche[2]) zusammenfallen und gleich dem klassischen Integral für den Flächeninhalt sind. Damit wäre die Eindeutigkeitsfrage für die dehnungsbeschränkten Flächen erledigt, *wenn* die zahlreichen, von anderen Autoren angegebenen Flächenmaße Kolmogoroff-Maße wären. Dies ist aber keineswegs der Fall[3]): weder das Janzen-Maß, noch das Grosssche Minimalmaß, noch das integralgeometrische Favard-Maß ist ein Kolmogoroff-Maß (das Hausdorff-Maß ist ein Kolmogoroff-Maß; bei anderen Maßen ist diese Frage noch ungeklärt).

Bezüglich der Eindeutigkeitsfrage besteht also noch eine Lücke. Wir wollen sie ausfüllen, indem wir zeigen, daß alle genannten Maße, und dazu noch einige andere, für jede dehnungsbeschränkte Fläche zusammenfallen und gleich dem klassischen Integral sind. Dies ist — sogleich für die k-dimensionalen Flächen im R_n durchgeführt — der wesentliche Inhalt der vorliegenden Arbeit[4]).

---

[1]) A. Kolmogoroff, Ein Beitrag zur Maßtheorie. Math. Annalen **107** (1933), S. 351–366.

[2]) Eine dehnungsbeschränkte Fläche ist ein dehnungsbeschränktes Bild $\pi(\widetilde{M}) = M$ eines abgeschlossenen Quadrates $\widetilde{M}$; dabei heißt eine Abbildung π dehnungsbeschränkt, wenn für je zwei Punkte p und q des Urbildes die Abstandsungleichung $\overline{\pi(p), \pi(q)} \leqq c \cdot \overline{pq}$ gilt (c eine Konstante). Die Dehnungsbeschränktheit ist gleichbedeutend mit der Rektifizierbarkeit im Sinne von H. Lebesgue, d. h. der Beschränktheit der totalen Differenzenquotienten der die Abbildung π vermittelnden Funktionen. Jede stetig differenzierbare Fläche ist dehnungsbeschränkt.

[3]) G. Nöbeling, Über die Flächenmaße im Euklidischen Raum. Erscheint demnächst in den Math. Annalen.

[4]) Wir haben der Kolmogoroff-Arbeit[1]) auch in methodischer Hinsicht vieles entnommen. Beispielsweise haben unsere Sätze 1 und 2 ihre genauen Analoga bei Kolmogoroff. Ebenso ist unser Hilfssatz einschließlich des Beweises fast derselbe wie der entscheidende Hilfssatz bei Kolmogoroff, dessen Beweis leider durch Druckfehler entstellt ist.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Voraussetzung der Dehnungsbeschränktheit vielleicht abgeschwächt oder durch eine andere ersetzt werden kann, daß aber irgendeine derartige Voraussetzung für die Eindeutigkeit des Flächeninhalts unentbehrlich ist. Denn für beliebige topologische, zweidimensionale Flächen (topologische Bilder der Quadratfläche) im Euklidischen R_k fallen die verschiedenen Flächenmaße im allgemeinen nicht zusammen[3]).

§ 1.

Die Sätze.

Es seien R_n und R_k ein n- bzw. k-dimensionaler Cartesischer Raum ($n > k$) mit rechtwinkligen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ bzw. $y_1, \ldots, y_k$.

Satz 1. *Es sei $M = \pi(\tilde{M}) \subset R_n$ ein dehnungsbeschränktes Bild einer analytischen*[5]) *Menge $\tilde{M} \subset R_k$*[6]). *Dann haben für M die k-dimensionalen Maße*[7]) *von* Janzen, Carathéodory, Gross, Hausdorff, Favard, Kolmogoroff *und* Gillespie *sämtlich denselben Wert $\mu(M)$.*

Die dehnungsbeschränkte Abbildung π des Satzes 1 werde durch die Funktionen $x_i = x_i(y_1, \ldots, y_k)$ $(i = 1, \ldots, n)$ oder in vektorieller Schreibweise durch $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\mathfrak{y})$ oder $\mathfrak{x} = \pi(\mathfrak{y})$ gegeben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir π sofort in einer offenen Obermenge von $\tilde{M}$, sogar im

---

[5]) Es sei R ein metrischer Raum. Dann heißt eine Teilmenge M von R analytisch oder Suslinsch in R, wenn M folgendermaßen darstellbar ist: Jedem System $n_1, \ldots, n_j$ endlich vieler natürlicher Zahlen sei eine offene Menge $M_{n_1 \ldots n_j} \subset R$ zugeordnet; zu jeder Folge $\nu = \{n_j\}$ natürlicher Zahlen werde der Durchschnitt $M_\nu = M_{n_1} \cdot M_{n_1 n_2} \ldots$ gebildet; dann ist $M = \sum M_\nu$, wobei über alle Folgen ν natürlicher Zahlen summiert wird. — Man kommt zu denselben analytischen Mengen, wenn man statt der offenen Mengen abgeschlossene Mengen benutzt. Außerdem kann man $M_{n_1} \supset M_{n_1 n_2} \supset \ldots$ annehmen (Monotonie des erzeugenden Systems). — Jede in R Borelsche Menge ist analytisch in R. — Ist R ein vollständiger, metrischer Raum und A analytisch in R, so ist A auch analytisch in jedem anderen, A enthaltenden metrischen Raum; man nennt daher A in diesem Fall absolut analytisch. Wir haben es im folgenden nur mit absolut analytischen Mengen zu tun. — Jede analytische Menge eines Euklidischen Raumes ist Lebesgue-meßbar. — Zur Theorie der analytischen Mengen vgl. z. B. F. Hausdorff, Mengenlehre, Leipzig 1927; H. Hahn, Reelle Funktionen, Leipzig 1932; N. Lusin, Leçons sur les ensembles analytiques, Paris 1930.

[6]) Wir treffen für alles weitere die folgende Verabredung: Bei der betrachteten Abbildung π werden Bildmenge und Urbildmenge stets mit demselben Buchstaben bezeichnet; zur Unterscheidung trägt der Buchstabe der Urbildmenge das Zeichen $\sim$.

[7]) Zur Definition dieser Maße vgl. G. Nöbeling, Über die Länge der Euklidischen Kontinuen. Jahresbericht der DMV 52 (1942), S. 132 oder a. a. O.[3]), sowie die daselbst genannte Originalliteratur. Man überträgt die in den genannten beiden Arbeiten für $k = 1$ oder $k = 2$ angegebenen Definitionen ohne weiteres auf beliebiges k. Soweit die beiden Arbeiten die im folgenden von uns betrachteten Maße nicht enthalten, führen wir die Definitionen an den betreffenden Stellen der vorliegenden Arbeit an.

ganzen R_k, als definiert annehmen[8]). Dann sind auf einer maßgleichen Teilmenge $\widetilde{M}'$ von $\widetilde{M}$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$ vorhanden und meßbar[9]). Dasselbe gilt infolgedessen auch für

$$D(\mathfrak{y}) = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{\partial (y_1, \ldots, y_k)}\right)^2},$$

wobei über alle Kombinationen $i_1 \ldots i_k$ von Indizes $\leqq n$ summiert wird. Auf $\widetilde{M} - \widetilde{M}'$ setzen wir $D(\mathfrak{y}) = 0$. Also ist das klassische Lebesgue-Integral

$$I(\widetilde{M}) = \int_{\widetilde{M}} D(\mathfrak{y})\, dy_1 \ldots dy_k \leqq +\infty$$

vorhanden.

Satz 2. *Es sei $M = \pi(\widetilde{M}) \subset R_n$ ein umkehrbar eindeutiges, dehnungsbeschränktes Bild einer analytischen Menge $\widetilde{M} \subset R_k$. Dann ist $\mu(M) = I(\widetilde{M})$.*

Nun sei $\widetilde{F}$ der k-dimensionale Einheitswürfel des R_k und $F = \pi(\widetilde{F})$ ein eindeutiges, stetiges Bild $\subset R_n$ von $\widetilde{F}$. Dann heißt $F = \pi(\widetilde{F})$ eine stetige, k-dimensionale Fläche (gleichgültig, ob F als Punktmenge k-dimensional ist oder nicht; maßgebend ist also die Dimension des Urbildes). Ist dabei die Abbildung π dehnungsbeschränkt, so nennen wir auch die stetige Fläche $F = \pi(\widetilde{F})$ dehnungsbeschränkt.

Satz 3. *Es sei $F = \pi(\widetilde{F})$ eine stetige, k-dimensionale, dehnungsbeschränkte Fläche im R_n. Dann haben für F auch die k-dimensionalen Flächenmaße von* Lebesgue, Peano *und* Radó *den Wert $I(\widetilde{F})$.*

§ 2.

Ein Hilfssatz.

Zunächst führen wir folgende Bezeichnungen ein. Allgemein bezeichnen wir, wenn L ein linearer Teilraum des R_n ist, mit π_L die Orthogonalprojektion in L und setzen $\pi_L(N) = N_L$ für eine beliebige Menge oder einen Punkt N des R_n.

Hilfssatz. Durch die Gleichungen $x_i = x_i(y_1, \ldots, y_k)$ $(i = 1, \ldots, n)$ sei eine dehnungsbeschränkte Abbildung π des R_k in den R_n gegeben. Auf der kompakten Menge $\widetilde{P}$ des R_k seien die Funktionen x_i gleichmäßig total differen-

[8]) M. D. Kirszbraun, Über die zusammenziehenden und Lipschitzsche Transformationen. Fund. Math. **22** (1934), S. 77–108.

[9]) H. Rademacher, Über partielle und totale Differenzierbarkeit ... Math. Annalen **79** (1918), S. 340–359; vgl. auch O. Haupt u. G. Aumann, Differential- und Integralrechnung, Leipzig 1938, Bd. 3, S. 134.

zierbar[10]). Es sei $\mathfrak{y}_0$ ein Punkt von $\widetilde{P}$, $\mathfrak{x}_0 = \pi(\mathfrak{y}_0)$ sein Bild und T der durch die k Vektoren $\left\{\frac{\partial x_1}{\partial y_j}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial y_j}\right\}$ $(j = 1, \ldots, k)$ im Punkt $\mathfrak{x}_0 = \pi(\mathfrak{y}_0)$ aufgespannte, höchstens k-dimensionale, lineare, tangentiale Teilraum des R_n. Weiter sei $\widetilde{Q}$ eine Teilmenge von $\widetilde{P}$; die obere Grenze der Abstände ihrer Punkte von $\mathfrak{y}_0$ heiße d; es sei $Q = \pi(\widetilde{Q})$. Schließlich sei ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gilt[11]):

(1) $m(Q_T) = I(\widetilde{Q}) + \delta \cdot m(\widetilde{Q})$ mit $|\delta| < \varepsilon$ für hinreichend kleines d.

Beweis. Wir beweisen gleichzeitig mit (1) noch eine zweite Behauptung. Es sei E eine k-dimensionale Ebene des R_n und $c(E)$ im Falle dim $T = k$ der Faktor, mit dem sich die (k-dimensionalen) Inhalte der Teilmengen von T bei Projektion in E multiplizieren; im Falle dim $T < k$ sei $c(E) = \frac{1}{\sqrt{l}}$ mit $l = \binom{n}{k}$. Die zweite Behauptung lautet dann:

(2) $m(Q_E) = c(E) \cdot I(\widetilde{Q}) + \delta \cdot m(\widetilde{Q})$ mit $|\delta| < \varepsilon$ für hinreichend kleines d.

Um (1) und (2) zu beweisen, bezeichnen wir mit α die affine Abbildung

(3) $$\mathfrak{z} = \mathfrak{x}_0 + (\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0) \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}(\mathfrak{y}_0)}{\partial \mathfrak{y}},$$

wobei ein Vektor als einzeilige Matrix aufzufassen ist, $\frac{\partial \mathfrak{x}(\mathfrak{y}_0)}{\partial \mathfrak{y}}$ die k-zeilige und n-spaltige Funktionalmatrix $\left(\frac{\partial \mathfrak{x}_i}{\partial \mathfrak{y}_j}\right)$ an der Stelle $\mathfrak{y}_0$ bedeutet und das Matrizenprodukt $(\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0) \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}(\mathfrak{y}_0)}{\partial \mathfrak{y}}$ Zeile mal Spalte zu nehmen ist. Für ein beliebiges

---

[10]) Das heißt folgendes: Erstens existieren in jedem Punkt $\mathfrak{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ von $\widetilde{P}$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$, deren k-zeilige und n-spaltige Matrix wir mit $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{y}}$ bezeichnen. Zweitens existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, daß für je zwei Punkte $\mathfrak{y}' = (y_1', \ldots, y_k') \in R_k$, $\mathfrak{y} = (y_1, \ldots, y_k) \in \widetilde{P}$ mit dem Abstand $|\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}| < \delta$ und ihre Bildpunkte $\mathfrak{x}' = (x_1', \ldots, x_n')$, $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ gilt:

$$x_i' = x_i + \sum_{j=1}^{k} (y_j' - y_j) \frac{\partial x_i}{\partial y_j} + d_i \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (y_j' - y_j)^2}$$

mit $\sqrt{\Sigma d_i^2} < \varepsilon$ oder vektoriell:

(*) $\mathfrak{x}' = \mathfrak{x} + (\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}) \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{y}} + \mathfrak{d} \cdot |\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}|$ mit $|\mathfrak{d}| < \varepsilon$ für $|\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}| < \delta$, $\mathfrak{y} \in \widetilde{P}$

[vgl. die Erläuterungen im Text zu (3)]. — Wählt man $y_j' = y_j + h$ für ein festes j und $y_j' = y_j$ für die übrigen j, so ergibt sich $\frac{1}{h}(x_i' - x_i) = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} + d_i$ mit $\sqrt{\Sigma d_i^2} < \varepsilon$ für $|h| < \delta$ und beliebiges $\mathfrak{y} \in \widetilde{P}$; also ist $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$ stetig auf $\widetilde{P}$.

[11]) m bedeutet das äußere LEBESGUEsche Maß im R_k bzw. einer k-dimensionalen Ebene des R_n.

$\varepsilon_1 > 0$ existiert dann ein $d(\varepsilon_1) > 0$ derart, daß für je zwei Punkte $\mathfrak{y}'$ und $\mathfrak{y}''$ aus $\widetilde{P}$ mit Abständen $\leqq d(\varepsilon_1)$ von $\mathfrak{y}_0$ die Ungleichung

$$(4) \qquad |\mathfrak{x}'_E - \mathfrak{x}''_E| = |\mathfrak{z}'_E - \mathfrak{z}''_E| + \zeta \cdot |\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''| \text{ mit } |\zeta| < \varepsilon_1$$

gilt [12]).

Wir unterscheiden weiter zwei Fälle.

Erster Fall: dim $T_E = k$. Dann ist auch dim $T = k$, also $D(\mathfrak{y}_0) \neq 0$. Außerdem ist $c(E) > 0$. Ist speziell $E = T$, so ist $c(T) = 1$ und (2) ist identisch mit (1). Wir brauchen also nur (2) zu beweisen.

Aus (4) folgt, da wegen $D(\mathfrak{y}_0) \neq 0$ und dim $T_E = k$ die affine Abbildung $\alpha_E = \pi_E \alpha$ nicht ausgeartet ist und daher der Quotient $|\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''| / |\mathfrak{z}'_E - \mathfrak{z}''_E|$ eine endliche obere Schranke t besitzt, die Ungleichung

$$(5) \qquad (1 - t\varepsilon_1) \cdot |\mathfrak{z}'_E - \mathfrak{z}''_E| \leqq |\mathfrak{x}'_E - \mathfrak{x}''_E| \leqq (1 + t\varepsilon_1) \cdot |\mathfrak{z}'_E - \mathfrak{z}''_E|.$$

Da der Lebesguesche Inhalt m bei dehnungsloser Abbildung nicht größer wird[1]), also bei dehnungsbeschränkter Abbildung sich höchstens mit der k-ten Potenz der Dehnungsschranke multipliziert, folgt aus (5), wenn $d < d(\varepsilon_1)$ ist:

$$(1 - t\varepsilon_1)^k \cdot m(\alpha_E(\widetilde{Q})) \leqq m(Q_E) \leqq (1 + t\varepsilon_1)^k \cdot m(\alpha_E(\widetilde{Q})),$$

also

$$(6) \qquad m(Q_E) = m(\alpha_E(\widetilde{Q})) + \iota \cdot m(\alpha_E(\widetilde{Q})) \text{ mit } |\iota| < (1 + t\varepsilon_1)^k - 1 = \varepsilon_2.$$

Nun ist $\alpha_E(\widetilde{Q}) = \pi_E \alpha(\widetilde{Q})$ und daher $m(\alpha_E(\widetilde{Q})) = c(E) \cdot m(\alpha(\widetilde{Q}))$. Da α die affine Abbildung (3) ist, gilt weiter $m(\alpha(\widetilde{Q})) = m(\widetilde{Q}) \cdot D(\mathfrak{y}_0)$. Wegen der Stetigkeit von $D(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$[10]) ist $m(\widetilde{Q}) \cdot D(\mathfrak{y}_0) = I(\widetilde{Q}) + \varkappa \cdot m(\widetilde{Q})$ mit $|\varkappa| < \varepsilon_2$ für hinreichend kleines d. Hieraus und aus (6) folgt, wenn man ε_1 und damit ε_2 hinreichend klein wählt, sofort die Behauptung (2).

Zweiter Fall: dim $T_E < k$. Dann sind zwei Unterfälle möglich: dim $T < k$ und dim $T = k$. Der erste Unterfall ist gleichbedeutend mit $D(\mathfrak{y}_0) = 0$, woraus wegen der Stetigkeit von $D(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$ die Gleichung $I(\widetilde{Q}) = \delta_1 \cdot m(\widetilde{Q})$ mit $|\delta_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ für jedes hinreichend kleine d folgt; hieraus ergibt sich (1) wegen $m(Q_T) = 0$, während für (2) noch $m(Q_E) = \delta_2 \cdot m(\widetilde{Q})$ mit $|\delta_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ zu beweisen ist. Der zweite Unterfall ist, weil dann $E \neq T$ ist,

---

[12]) Aus (*) folgt $\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'' = (\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}'') \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}(\mathfrak{y}'')}{\partial \mathfrak{y}} + \mathfrak{d} \cdot |\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''|$ mit $|\mathfrak{d}| < \varepsilon_1$, aus (3) folgt $\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}'' = (\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}'') \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}(\mathfrak{y}_0)}{\partial \mathfrak{y}}$. Also ist $\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'' = (\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}'') + \mathfrak{d} \cdot |\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''| + (\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}'') \cdot \left(\frac{\partial \mathfrak{x}(\mathfrak{y}'')}{\partial \mathfrak{y}} - \frac{\partial \mathfrak{x}(\mathfrak{y}_0)}{\partial \mathfrak{y}}\right)$. Wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{y}}$ folgt hieraus $\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'' = (\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}'') + \mathfrak{e} \cdot |\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''|$ mit $|\mathfrak{e}| < \varepsilon_1$ für hinreichend nahe bei $\mathfrak{y}_0$ gelegene Punkte $\mathfrak{y}'$ und $\mathfrak{y}''$ aus $\widetilde{P}$. Und dies ergibt durch Projektion in E schließlich $\mathfrak{x}'_E - \mathfrak{x}''_E = (\mathfrak{z}'_E - \mathfrak{z}''_E) + \mathfrak{e}_E \cdot |\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''|$ mit $|\mathfrak{e}_E| < \varepsilon_1$, woraus (4) folgt.

für (1) bedeutungslos, während (2) wegen $c(E) = 0$ in $m(Q_E) = \delta \cdot m(\widetilde{Q})$ übergeht. Wir haben also, wenn wir ε statt $\frac{\varepsilon}{2}$ schreiben, unter der Voraussetzung $\dim T_E < k$ insgesamt nur zu zeigen:

(7) $\quad m(Q_E) = \delta \cdot m(\widetilde{Q})$ mit $|\delta| < \varepsilon$ für hinreichend kleines d.

T_E ist eine i-dimensionale Teilebene E_i von E, wobei $i = \dim T_E$, also $i < k$ ist. Zum Beweis von (7) wählen wir im R_n ein im allgemeinen schiefwinkliges Koordinatensystem $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ so, daß erstens E_i die Gleichungen $\bar{x}_{i+1} = \cdots = \bar{x}_n = 0$ und E die Gleichungen $\bar{x}_{k+1} = \cdots = \bar{x}_n = 0$ hat, zweitens für $j = i + 1, \ldots, n$ die $\bar{x}_j$-Achse zu E_i senkrecht ist und drittens die affine Abbildung $\alpha_E = \pi_E \alpha$ in der Form

$$\begin{aligned} \bar{x}_j &= \lambda_j y_j \qquad (j = 1, \ldots, i) \quad (\lambda_j \neq 0) \\ \bar{x}_j &= 0 \qquad\quad (j = i + 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

geschrieben werden kann. Für beliebiges $\varrho > 0$ sei nun $\mathfrak{z}_\varrho = \beta_\varrho(\mathfrak{y})$ die nicht ausgeartete, affine Abbildung

$$\begin{aligned} \bar{x}_j &= \lambda_j y_j \qquad (j = 1, \ldots, i) \\ \bar{x}_j &= \varrho\, y_j \qquad (j = i + 1, \ldots, k) \\ \bar{x}_j &= 0 \qquad\quad (j = k + 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Der Quotient $|\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''| / |\mathfrak{z}'_\varrho - \mathfrak{z}''_\varrho|$ hat eine endliche obere Schranke t_ϱ. Mithin gilt nach (4) für je zwei Punkte $\mathfrak{y}'$ und $\mathfrak{y}''$ aus $\widetilde{P}$ mit Abständen $\leqq d(\varepsilon_1)$ von $\mathfrak{y}_0$:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{x}'_E - \mathfrak{x}''_E| &\leqq |\mathfrak{z}'_E - \mathfrak{z}''_E| + \varepsilon_1 \cdot |\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''| \leqq |\mathfrak{z}'_\varrho - \mathfrak{z}''_\varrho| + \varepsilon_1 \cdot |\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''| \\ &\leqq |\mathfrak{z}'_\varrho - \mathfrak{z}''_\varrho| + t_\varrho\, \varepsilon_1 \cdot |\mathfrak{z}'_\varrho - \mathfrak{z}''_\varrho| = (1 + t_\varrho \varepsilon_1) \cdot |\mathfrak{z}'_\varrho - \mathfrak{z}''_\varrho|. \end{aligned}$$

Also gilt:

(8) $\quad m(Q_E) \leqq (1 + t_\varrho \varepsilon_1)^k \cdot m(\beta_\varrho(\widetilde{Q}))$ für $d \leqq d(\varepsilon_1)$.

Ist nun $\varrho_0 > 0$ hinreichend klein, so gilt $m(\beta_{\varrho_0}(\widetilde{N})) \leqq m(\widetilde{N})$ für jede Menge $\widetilde{N}$ des R_k. Weiter gilt $m(\beta_\varrho(\widetilde{N})) \leqq m(\beta_{\varrho_0}(\widetilde{N}))$ für jedes $\varrho < \varrho_0$. Wir setzen $t_{\varrho_0} = t$. Aus (8) folgt dann $m(Q_E) \leqq m(\beta_\varrho(\widetilde{Q})) + \iota \cdot m(\widetilde{Q})$ mit $|\iota| < (1 + t\varepsilon_1)^k - 1 = \varepsilon_2$ für $\varrho < \varrho_\varrho$ und $d < d(\varepsilon_1)$. Wegen $\lim_{\varrho \to 0} m(\beta_\varrho(\widetilde{Q})) = 0$ folgt hieraus weiter $m(Q_E) \leqq \iota \cdot m(\widetilde{Q})$ mit $|\iota| < \varepsilon_2$ für $d < d(\varepsilon_1)$. Dies ergibt (7), wenn man ε_1 und damit ε_2 hinreichend klein wählt.

§ 3.

Beweis des Satzes 2.

3.1. Da das Integral $I(\widetilde{M})$ unverändert bleibt, wenn man den Raum R_k einer Ähnlichkeitstransformation unterwirft, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die [auf ganz R_k fortgesetzte[8]] Abbildung π als dehnungslos annehmen. Außerdem können wir $\widetilde{M}$ und M als beschränkt annehmen.

Es sei ein ε mit $0 < \varepsilon < 1$ gegeben. Nach bekannten Sätzen enthält dann $\widetilde{M}$ eine (in sich) kompakte Menge $\widetilde{P}$ mit

$$m(\widetilde{M} - \widetilde{P}) < \varepsilon, \tag{9}$$

auf welcher die Funktionen x_i gleichmäßig total differenzierbar sind[9]). Dann sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$ und damit $D(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$ stetig[10]).

Wegen der Dehnungslosigkeit der Abbildung π sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$ auf $\widetilde{P}$ beschränkt. Also ist auch $D(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$ beschränkt:

$$D(\mathfrak{y}) < s. \tag{10}$$

Hieraus und aus (9) folgt

$$I(\widetilde{M} - \widetilde{P}) < \varepsilon \cdot s. \tag{11}$$

Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von $D(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$ folgt die Existenz eines $e > 0$ mit folgender Eigenschaft: für jede Lebesgue-meßbare Teilmenge $\widetilde{Q}$ von $\widetilde{P}$ mit einem Durchmesser $\leqq e$ ist

$$D(\mathfrak{y}) \cdot m(\widetilde{Q}) = I(\widetilde{Q}) + \eta \cdot m(\widetilde{Q}) \quad \text{mit} \quad |\eta| < \varepsilon. \tag{12}$$

Die vorstehenden Festsetzungen und Beziehungen gelten für die sämtlichen folgenden Nummern 3. 2 bis 3. 7.

Wir beweisen nun die Behauptung des Satzes 2 nacheinander für die einzelnen Maßbegriffe.

3. 2. Die k-dimensionalen Kolmogoroff-Maße μ_K im R_n[7]) genügen dem Satz 2, wie von A. Kolmogoroff selbst bewiesen wurde[1]). Also gilt:

$$\mu_K(M) = I(\widetilde{M}). \tag{13}$$

3. 3. Das k-dimensionale Hausdorff-Maß μ_H im R_n[7]) ist ein Kolmogoroff-Maß. Denn es sind die folgenden vier Axiome erfüllt, durch welche die Kolmogoroff-Maße definiert sind; dabei seien A bzw. A_i sämtlich analytische Mengen. α) Aus $A \subset \sum A_i$ folgt $\mu_H(A) \leqq \sum \mu_H(A_i)$. Dies folgt unmittelbar aus der Definition von μ_H. — β) Aus $A_i \subset A$ und $A_j A_h = 0$ für $j \neq h$ folgt $\sum \mu_H(A_i) \leqq \mu_H(A)$. Es gibt wegen $A_1 A_2 = 0$ zwei Borelsche Mengen $B_1 \supset A_1$ und $B_2 \supset A_2$ mit $B_1 B_2 = 0$[13]). Die Menge B_1 ist meßbar bzgl. μ_H, da μ_H ein äußeres Maß im Sinne von C. Carathéodory ist[14]). Also ist $\mu_H(A_1 + A_2) = \mu_H((A_1 + A_2) \cdot B_1) + \mu_H((A_1 + A_2) - B_1) = \mu_H(A_1) + \mu_H(A_2)$. Analog zeigt man durch vollständige Induktion, daß für jedes natürliche i die Gleichung $\mu_H(A_1 + \cdots + A_i) = \mu_H(A_1) + \cdots + \mu_H(A_i)$ gilt. Wegen $A_1 + \cdots + A_i \subset A$ ist $\mu_H(A_1 + \cdots + A_i) \leqq \mu_H(A)$. Also folgt $\mu_H(A_1) + \cdots + \mu_H(A_i) \leqq \mu_H(A)$. Dies gilt für jedes i. Hieraus folgt β).

---

[13]) Vgl. z. B. H. Hahn, a. a. O.[5]), S. 369.

[14]) C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Berlin 1918. S. 238.

— γ) Ist A ein dehnungsloses Bild von A', so ist $\mu_H(A) \leqq \mu_H(A')$. Denn für jede Teilmenge C' von A' ist der Radius der Pferchkugel (d. h. der kleinsten C' enthaltenden n-dimensionalen, abgeschlossenen Kugel) nicht größer als der Radius der Pferchkugel der Bildmenge C von C' [8]). — δ) Für den k-dimensionalen Einheitswürfel W ist $\mu_H(W) = 1$. Denn für jede Menge M des E_k ist $\mu_H(M) = m(M)$.

Hiernach folgt aus (13) als Spezialfall:

$$\mu_H(M) = I(\widetilde{M}). \tag{14}$$

3.4. Das k-dimensionale Carathéodory-Maß μ_C und das k-dimensionale Groß-Maß μ_G im R_n [7]). Zunächst ist

$$\mu_C(L) \leqq \mu_H(L) \text{ für jede Menge } L \text{ des } R_n, \tag{15}$$

da bei der Definition von μ_H weniger Mengen (nämlich nur Kugeln) für die Überdeckung von L zugelassen sind als bei der Definition von μ_C. Weiter gilt

$$\mu_G(L) \leqq \mu_C(L), \tag{16}$$

wie aus der Definition von μ_G auf Grund der Tatsache folgt, daß für jede Teilmenge L' von L und die Projektion L'_E von L' in eine k-dimensionale Ebene E die Ungleichung $m(L'_E) = \mu_C(L'_E) \leqq \mu_C(L')$ gilt.

Aus (14) bis (16) folgt

$$\mu_G(M) \leqq \mu_C(M) \leqq I(\widetilde{M}). \tag{17}$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung bemerken wir zunächst:

$$\mu_G(M - P) < \varepsilon. \tag{18}$$

Denn ist L eine beliebige Teilmenge von $M - P$, $\widetilde{L}$ das π-Urbild von L in $\widetilde{M} - \widetilde{P}$ und L_E die Projektion von L in eine k-dimensionale Ebene E, so ist L_E ein dehnungsloses Bild von $\widetilde{L}$ und daher $m(L_E) \leqq m(\widetilde{L})$ [1]); hieraus folgt (18) auf Grund von (9).

Nach unserem Hilfssatz und dem Überdeckungssatz von Vitali existieren endlich oder abzählbar unendlich viele Kugeln $\widetilde{K}_1, \widetilde{K}_2, \ldots$ im R_k, deren Mittelpunkte $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots$ in $\widetilde{P}$ liegen, so daß, wenn wir $\widetilde{K}_i \widetilde{P} = \widetilde{Q}_i$, $\pi(\widetilde{Q}_i) = Q_i$ setzen und mit T_i die Tangentialebene im Punkte $\mathfrak{x}_i = \pi(\mathfrak{y}_i)$ bezeichnen, folgendes gilt:

$$\widetilde{Q}_i \cdot \widetilde{Q}_j = 0 \quad \text{für } i \neq j; \tag{19}$$

$$\widetilde{P} = \sum \widetilde{Q}_i + \widetilde{N} \quad \text{mit } m(\widetilde{N}) = 0; \tag{20}$$

$$m((Q_i)_{T_i}) = I(\widetilde{Q}_i) + \delta_i \cdot m(\widetilde{Q}_i), \quad |\delta_i| \leqq \varepsilon. \tag{21}$$

Hieraus folgt durch Addition

$$\sum_i m((Q_i)_{T_i}) = I(\widetilde{P}) + \delta \cdot m(\widetilde{P}), \quad |\delta| \leqq \varepsilon.$$

Da $(Q_i)_{T_i}$ die Projektion von Q_i in T_i ist, gilt $m((Q_i)_{T_i}) \leqq \mu_G(Q_i)$. Da $Q_i \subset P$ und $Q_i \cdot Q_j = 0$ gilt [letzteres wegen (19) und der Eineindeutigkeit der Abbildung π], so ist $\sum \mu_G(Q_i) \leqq \mu_G(P)$. Also ist

$$I(\widetilde{P}) + \delta \cdot m(\widetilde{P}) \leqq \mu_G(P).$$

Weil ε beliebig klein wählbar ist, folgt wegen (11) $I(\widetilde{M}) \leqq \mu_G(M)$. Hieraus und (17) folgt.

$$\mu_G(M) = \mu_C(M) = I(\widetilde{M}). \tag{22}$$

3. 5. Das $(n-1)$-dimensionale Gillespie-Maß μ_{Gi} im R_n. Die Definition dieses Maßes lautet genau so wie die des $(n-1)$-dimensionalen Carathéodory-Maßes μ_C[7]), nur verwendet man an Stelle der $(n-1)$-dimensionalen Durchmesser $d^{(n-1)}(U_i)$ der überdeckenden konvexen Mengen U_i deren halbe $(n-1)$-dimensionale Oberflächen $\frac{1}{2} O(U_i)$.

Da stets $d^{(n-1)}(U_i) \leqq \frac{1}{2} O(U_i)$ ist, gilt wegen (22):

$$\mu_{Gi}(M) \geqq I(\widetilde{M}). \tag{23}$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung sei $\mathfrak{n}_0$ ein beliebiger Punkt von $\widetilde{P}$ und $\mathfrak{x}_0$ sein Bild in P. Wegen der gleichmäßigen totalen Differenzierbarkeit der Abbildung $\mathfrak{x} = \pi(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$ gilt, wenn wir wieder mit α die affine Abbildung $\mathfrak{z} = \mathfrak{x}_0 + (\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0) \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}(\mathfrak{y}_0)}{\partial \mathfrak{y}}$ bezeichnen, für die Abstände $|\mathfrak{x} - \mathfrak{z}|$ der Bilder $\mathfrak{x} = \pi(\mathfrak{y})$ und $\mathfrak{z} = \alpha(\mathfrak{y})$ der Punkte $\mathfrak{y}$ aus $\widetilde{P}$ die Beziehung $|\mathfrak{x} - \mathfrak{z}| = o(|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0|)$[15]). Hieraus folgt: Ist $\widetilde{K} \subset R_{n-1}$ eine hinreichend kleine Kugel mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{y}_0$, a die obere Grenze der Abstände $|\mathfrak{x} - \mathfrak{z}|$ für alle Punkte $\mathfrak{y}$ aus $\widetilde{Q} = \widetilde{K}\,\widetilde{P}$ und U die abgeschlossene, konvexe Menge aller Punkte des R_k mit Abständen $\leqq a$ von dem Ellipsoid $\alpha(\widetilde{K})$, so hat U einen Durchmesser $< \varepsilon$, enthält das Bild $Q = \pi(\widetilde{Q})$ von $\widetilde{Q}$ und es besteht die Beziehung $\frac{1}{2} O(U) = m(\alpha(\widetilde{K})) + o(m(\widetilde{K}))$.

Also existieren nach dem Überdeckungssatz von Vitali endlich oder abzählbar unendlich viele, paarweise fremde Kugeln $\widetilde{K}_1, \widetilde{K}_2, \ldots$ im R_{n-1} mit den Mittelpunkten $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots$ in $\widetilde{P}$, so daß, wenn wir $\widetilde{K}_i \widetilde{P} = \widetilde{Q}_i$ und $\pi(\widetilde{Q}_i) = Q_i$ setzen und zu jedem Q_i wie vorhin eine konvexe Menge $U_i \supset Q_i$ mit einem Durchmesser $< \varepsilon$ konstruieren, folgendes gilt:

$$\widetilde{Q}_i \widetilde{Q}_j = 0 \quad \text{für } i \neq j; \tag{24}$$

$$\widetilde{P} = \sum \widetilde{Q}_i + \widetilde{N}, \quad m(\widetilde{N}) = 0; \tag{25}$$

$$\sum m(\widetilde{K}_i) \leqq m(\widetilde{P}) + \varepsilon; \tag{26}$$

$$\tfrac{1}{2} O(U_i) = m(\alpha(\widetilde{K}_i)) + \delta_i \cdot m(\widetilde{K}_i), \quad |\delta_i| < \varepsilon; \tag{27}$$

$$m(\widetilde{Q}_i) \cdot D(\mathfrak{y}_i) = I(\widetilde{Q}_i) + \bar{\delta}_i \cdot m(\widetilde{Q}_i), \quad |\bar{\delta}_i| < \varepsilon. \tag{28}$$

[Zu (28) beachte man, daß $D(\mathfrak{y})$ in $\widetilde{P}$ gleichmäßig stetig ist.]

---

[15]) Z. B. nach Anm. [10]), Gleichung (*), worin man $\mathfrak{x}'$ durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}$ durch $\mathfrak{x}_0$ ersetze.

Nach (26) und (27), sowie wegen $\widetilde{P} \subset \widetilde{M}$ ist

$$\sum \tfrac{1}{2} O(U_i) = \sum m(\alpha(\widetilde{K}_i)) + \delta \cdot (m(\widetilde{M}) + \varepsilon), \quad |\delta| < \varepsilon. \tag{29}$$

Weiter ist

$$m(\alpha(\widetilde{K}_i)) = m(\widetilde{K}_i) \cdot D(\mathfrak{y}_i),$$

also

$$\begin{aligned} \sum m(\alpha(\widetilde{K}_i)) &= \sum m(\widetilde{K}_i) \cdot D(\mathfrak{y}_i) \\ &= \sum m(\widetilde{Q}_i) \cdot D(\mathfrak{y}_i) + \varepsilon \cdot s \text{ wegen (10), (25) und (26)} \\ &= I(\widetilde{P}) + \eta \cdot m(\widetilde{P}) + \varepsilon \cdot s, \ |\eta| < \varepsilon \text{ wegen (24), (25) und (28)} \\ &= I(\widetilde{M}) + \bar{\eta} \cdot m(\widetilde{M}) + 2\,\varepsilon s, \ |\bar{\eta}| < \varepsilon \text{ wegen (11) und } \widetilde{P} \subset \widetilde{M}. \end{aligned}$$

Also ist wegen (29)

$$\sum \tfrac{1}{2} O(U_i) = I(\widetilde{M}) + (\delta + \bar{\eta}) \cdot m(\widetilde{M}) + (\delta + 2\,s) \cdot \varepsilon, \ |\delta| < \varepsilon, |\bar{\eta}| < \varepsilon. \tag{30}$$

Die Menge $\widetilde{M} - \sum \widetilde{Q}_i$ ist nach (9) und (25) eine Menge des R_{n-1} mit $m(\widetilde{M} - \sum \widetilde{Q}_i) < \varepsilon$. Also können wir sie überdecken durch abzählbar viele Kugeln $\widetilde{L}_1, \widetilde{L}_2, \ldots$ mit Durchmessern $< \frac{\varepsilon}{2}$ und einem Gesamtinhalt $< \varepsilon$. Für jedes i ist dann wegen der Dehnungslosigkeit von π die Menge $\pi((\widetilde{M} - \sum \widetilde{Q}_i) \cdot \widetilde{L}_j)$ enthalten in einer Kugel V_j, deren Durchmesser höchstens doppelt so groß ist wie der Durchmesser von $\widetilde{L}_j$. Die Kugeln $V_1, V_2, \ldots$ überdecken die Menge $M - \sum Q_i$, haben Durchmesser $< \varepsilon$ und es gilt

$$\sum \tfrac{1}{2} O(V_i) < c \cdot \varepsilon, \tag{31}$$

wobei c eine von ε unabhängige Konstante ist.

Insgesamt überdecken die konvexen Mengen $U_1, U_2, \ldots$ und $V_1, V_2, \ldots$ mit Durchmessern $< \varepsilon$ die ganze Menge M. Da ε eine beliebig kleine positive Zahl ist, folgt aus (30) und (31) die Ungleichung $\mu_{Gi}(M) \leqq I(\widetilde{M})$. Zusammen mit (23) ergibt dies die Gleichung

$$\mu_{Gi}(M) = I(\widetilde{M}). \tag{32}$$

3. 6. Das k-dimensionale Favard-Maß μ_F im R_n. Wir geben zunächst seine

Definition. Die Dichte der durch die Gleichungen

$$x_\lambda = \sum_{\varkappa=k+1}^{n} q_{\lambda\varkappa} x_\varkappa + q_{\lambda, n+1} \qquad (\lambda = 1, \ldots, k) \tag{33}$$

gegebenen $(n-k)$-dimensionalen Ebenen E_{n-k} des R_n gegenüber Euklidischen Bewegungen ist

$$\dot{E}_{n-k} = |G_n G_n'|^{-\frac{n+1}{2}} \prod_{\lambda=1}^{k} \prod_{\varkappa=k+1}^{n} dq_{\lambda\varkappa} \prod_{\lambda=1}^{k} dq_{\lambda, n+1}, \tag{34}$$

wobei

$$G_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -q_{1,k+1} & \ldots & -q_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -q_{k,k+1} & \ldots & -q_{k,n} \end{pmatrix}$$

und G'_n die transponierte Matrix ist[16]). Es sei N eine beliebige Menge des R_n und $\mathfrak{N}$ die Menge aller zu N nicht fremden, $(n-k)$-dimensionalen Ebenen E_{n-k}[17]). Mit $z = z(E_{n-k}) \leqq \infty$ sei die Anzahl der Punkte des Durchschnitts $N \cdot E_{n-k}$ bezeichnet. Dann ist das k-dimensionale Favard-Maß

$$\mu_F(N) = \frac{1}{c} \int_{\mathfrak{N}} z(E_{n-k})\, \dot{E}_{n-k}, \tag{35}$$

vorausgesetzt, daß dieses Lebesgue-Integral existiert, d. h. einen bestimmten endlichen oder unendlichen Wert hat. Die Konstante c ist dabei so bestimmt, daß für den k-dimensionalen Einheitswürfel W des R_n gilt:

$$\mu_F(W) = 1. \tag{36}$$

Wir behaupten nun: *Für jede analytische Menge A des R_n existiert das Maß $\mu_F(A)$.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir natürlich A sofort als beschränkt annehmen. Es sei i eine natürliche Zahl. Dann genügt es zu zeigen, daß die Menge aller E_{n-k}, die mit A mindestens i Punkte gemein haben, analytisch und daher Lebesgue-meßbar ist in dem durch die $q_{\lambda,\varkappa}$ parametrisierten Raum aller E_{n-k}. Mit $R_n(i)$ bezeichnen wir die Menge aller ungeordneten i-Tupel $s = (p_1, \ldots, p_i)$ von Punkten des R_n, die aber nicht paarweise verschieden zu sein brauchen. Als Abstand von $s = (p_1, \ldots, p_i)$ und $s' = (p'_1, \ldots, p'_i)$ definieren wir $\overline{ss'} = \text{Min}\,(\overline{p_1 p'_{j_1}} + \cdots + \overline{p_i p'_{j_i}})$, wobei $j_1, \ldots, j_i$ alle Permutationen von $1, \ldots, i$ durchläuft[18]). Auf diese Weise wird $R_n(i)$ zu einem vollständigen metrischen Raum. $R_n(i)$ ist ein eindeutiges, stetiges Bild der i-ten topologischen Potenz $R_n \times \cdots \times R_n$ (Menge aller geordneten i-Tupel $\{p_1, \ldots, p_i\}$ von Punkten aus R_n), indem nämlich jedem geordneten i-Tupel $\{p_1, \ldots, p_i)$ der Potenz das ungeordnete i-Tupel $(p_1, \ldots, p_i)$ zugeordnet wird. Die i-te Potenz $A \times \cdots \times A$ ist analytisch in $R_n \times \cdots \times R_n$, da A im R_n analytisch ist[19]). Also ist auch das Bild von $A \times \cdots \times A$, d. h. die Menge $A(i)$ aller ungeordneten i-Tupel von Punkten aus A analytisch in $R_n(i)$[20]). — Ist nun r eine nicht negative ganze Zahl $\leqq n - k$, so sei $B_r(i)$ die Menge aller $s = (p_1, \ldots, p_i)$ mit paarweise ver-

---

[16]) A. Müller, Dichten linearer Mannigfaltigkeiten im euklidischen und nichteuklidischen R_n. Math. Zeitschr. **42** (1937), S. 118; W. Blaschke, Ermittlung der Dichten für lineare Unterräume im E_n. Act. sci. et industr. **252**, Paris 1935.

[17]) Wir verabreden: Für jede Punktmenge $A, B, C, \ldots$ des R_n bezeichnen wir mit dem entsprechenden Frakturbuchstaben $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ die Menge aller zu $A, B, C, \ldots$ nicht fremden $(n-k)$-dimensionalen Ebenen des R_n (und nennen sie die zu $A, B, C, \ldots$ gehörige Menge von Ebenen E_{n-k}). Nur beim Buchstaben E bzw. $\mathfrak{E}$ weichen wir von dieser Verabredung ab.

[18]) $\overline{pq}$ ist der Abstand der Punkte p und q.

[19]) Vgl. z. B. H. Hahn, a. a. O. [5]), S. 351.

[20]) Vgl. z. B. H. Hahn, a. a. O. [5]), S. 349.

schiedenen $p_1, \ldots, p_i$, die in einer r-dimensionalen Ebene $E_r(p_1, \ldots, p_i)$, aber keiner niedriger dimensionalen Ebene des R_n liegen. Dann ist $N_r(i)$ eine Borelsche Menge in $R_n(i)$, also analytisch in $R_n(i)$. Mithin ist auch der Durchschnitt $A(i) \cdot B_r(i)$ analytisch in $R_n(i)$. Ordnen wir nun jedem i-Tupel $(p_1, \ldots, p_i)$ aus $A(i) \cdot B_r(i)$ die Ebene $E_r(p_1, \ldots, p_i)$ zu, so ist diese Abbildung eindeutig und stetig. Also ist die Menge $\mathfrak{E}_r$ aller dieser Ebenen $E_r(p_1, \ldots, p_i)$ analytisch im Raum aller r-dimensionalen Ebenen. Es sei nun $\mathfrak{E}_{n-k}$ die Menge aller $(n-k)$-dimensionalen Ebenen des R_n, welche Ebenen $E_r(p_1, \ldots, p_i)$ enthalten. Dann ist auch diese Menge $\mathfrak{E}_{n-k,r}$ analytisch im Raum aller $(n-k)$-dimensionalen Ebenen des R_n (man erzeuge $\mathfrak{E}_r$ durch ein monotones System kompakter Mengen $M_{n_1 \ldots n_j}$, was wegen der Beschränktheit von A möglich ist[5]), und bezeichne mit $N_{n_1 \ldots n_j}$ die Menge aller E_{n-k}, welche r-dimensionale Ebenen aus $M_{n_1 \ldots n_j}$ enthalten; diese kompakten Mengen $N_{n_1 \ldots n_j}$ erzeugen dann $\mathfrak{E}_{n-k,r}$). Also ist auch die Menge $\mathfrak{E}_{n-k,0} + \cdots + \mathfrak{E}_{n-k,n-k}$ analytisch im Raum aller $(n-k)$-dimensionalen Ebenen E_{n-k}. Diese Menge besteht aber aus allen E_{n-k}, welche mindestens i Punkte von A enthalten. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir geben nun eine weitere Darstellung des Maßes μ_F. Ist $\mathfrak{E}$ eine Menge von Ebenen E_{n-k}, die Lebesgue-meßbar ist im Raume aller E_{n-k}, so führen wir als Maß von $\mathfrak{E}$ ein die Zahl

$$\mu(\mathfrak{E}) = \frac{1}{c} \int_{\mathfrak{E}} \dot{E}_{n-k}. \tag{37}$$

Gegeben sei jetzt eine analytische Punktmenge A des R_n. Für eine positive Zahl ε stellen wir A dar als Summe endlich oder abzählbar vieler, paarweise fremder, nichtleerer analytischer Teilmengen A_i^ε $(i = 1, 2, \ldots)$ mit Durchmessern $< \varepsilon$. Wir behaupten dann die Gleichung

$$\mu_F(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_i \mu(\mathfrak{A}_i^\varepsilon), \tag{38}$$

wobei $\mathfrak{A}_i^\varepsilon$ die Menge aller zu A_i^ε nicht fremden E_{n-k} bedeutet. Zum Beweis bezeichnen wir für jede natürliche Zahl j mit $z^{(j)}(E_{n-k})$ die größte natürliche Zahl $z \leqq \infty$ mit folgender Eigenschaft: in E_{n-k} sind z Punkte von A enthalten, die zu je zwei einen Abstand $\geqq j^{-1}$ haben (außer diesen z Punkten dürfen noch weitere Punkte von A in E_{n-k} liegen). Die Funktionenfolge $z^{(1)}(E_{n-k})$, $z^{(2)}(E_{n-k}), \ldots$ konvergiert monoton wachsend gegen $z(E_{n-k})$ (Anzahl aller Punkte von $A \cdot E_{n-k}$). Also gibt es für jede Zahl $a < \mu_F(A)$ ein natürliches j derart, daß

$$a < \frac{1}{c} \int_{\mathfrak{U}} z^{(j)}(E_{n-k})\, \dot{E}_{n-k} \leqq \mu_F(A). \tag{39}$$

Ist nun ε eine beliebige positive Zahl $< (2j)^{-1}$, so kommt jede Ebene E_{n-k} in mindestens $z^{(j)}(E_{n-k})$. jedoch in höchstens $z(E_{n-k})$ der Mengen $\mathfrak{A}_i^\varepsilon$ vor. Also ist

$$\frac{1}{c}\int_{\mathfrak{U}} z^{(j)}(E_{n-k})\,\dot{E}_{n-k} \leqq \sum_i \mu(\mathfrak{A}_i^\varepsilon) \leqq \frac{1}{c}\int_{\mathfrak{U}} z(E_{n-k})\,\dot{E}_{n-k}.$$

also nach (39)

$$a < \sum \mu(\mathfrak{A}_i^\varepsilon) \leqq \mu_F(A).$$

Hieraus folgt (38).

Auch das Maß μ können wir, wenigstens für die zu Punktmengen $A \subset R_n$ gehörigen Mengen $\mathfrak{A}$ von Ebenen E_{n-k}[17]), noch anders schreiben. Ist E_{n-k} die $(n-k)$-dimensionale Ebene (33) des R_n. so sei E_k^0 die zu E_{n-k} senkrechte k-dimensionale Ebene durch den Koordinatensprung O. Diese Ebene E_k^0 hängt nur von den Parametern $q_{\lambda\varkappa}$ ($\lambda = 1, \ldots, k$; $\varkappa = k+1, \ldots, n$) ab. Ordnen wir dem Schnittpunkt von E_{n-k} und E_k^0 die k-Zahlen $q_{1,n+1}, \ldots,$ $q_{k,n+1}$ zu, so stellen diese Zahlen in E_k^0 affine Koordinaten dar. Also können wir die kinematische Punktdichte $\dot{\mathfrak{p}}$ in E_k^0 in der Form

$$\dot{\mathfrak{p}} = F(q_{1,k+1}, \ldots, q_{kn}) \prod_{\lambda=1}^{k} dq_{\lambda,n+1}$$

schreiben. Setzen wir

$$(F(q_{1,k+1}, \ldots, q_{kn}))^{-1} \cdot |G_n G_n'|^{-\frac{n+1}{2}} \prod_{\lambda=1}^{k} \prod_{\varkappa=k+1}^{n} dq_{\lambda\varkappa} = \dot{E}_k^0,$$

so ist

$$\dot{E}_{n-k} = \dot{\mathfrak{p}}\,\dot{E}_k^0. \tag{40}$$

Mit $\dot{E}_{n-k}$ und $\dot{\mathfrak{p}}$ ist auch $\dot{E}_k^0$ invariant bei Bewegungen, die den Ursprung festlassen; also ist $\dot{E}_k^0$ die Dichte der k-dimensionalen Ebenen E_k^0 durch den Ursprung.

Nun sei A eine Punktmenge des R_n und $\mathfrak{A}$ die zugehörige Menge von Ebenen E_{n-k}. Nach (40) können wir, wenn $A_{E_k^0}$ die Projektion von A in die Ebene E_k^0 und m das k-dimensionale Lebesguesche Maß in E_k^0 bedeutet, folgendermaßen schreiben:

$$\int_{\mathfrak{U}} \dot{E}_{n-k} = \int \Big(\int_{A_{E_k^0}} \dot{\mathfrak{p}} \Big)\, \dot{E}_k^0 = \int m(A_{E_k^0})\, \dot{E}_k^0,$$

wobei die auf $\dot{E}_k^0$ bezüglichen Integrale über alle k-dimensionalen Ebenen E_k^0 durch den Ursprung zu nehmen sind. Also ist nach (37):

$$\mu(\mathfrak{A}) = \frac{1}{c}\int m(A_{E_k^0})\, \dot{E}_k^0. \tag{41}$$

Wir wenden uns nun dem eigentlichen Beweis des Satzes 2 für das Favard-Maß μ_F zu. Es liege wieder die Sachlage der Nr. 3. 1 und des Hilfs-

satzes vor; dabei sei $\widetilde{Q}$ der Durchschnitt $\widetilde{K}\widetilde{P}$ von $\widetilde{P}$ mit einer abgeschlossenen Kugel $\widetilde{K}$ mit dem Radius d und dem Mittelpunkt $\mathfrak{y}_0$. Wir behaupten:

(42) $\mu(\mathfrak{Q}) = I(\widetilde{Q}) + \delta \cdot m(\widetilde{Q})$ mit $|\delta| < \varepsilon$ für hinreichend kleines d.

Zum Beweis verwenden wir die Gleichung (41), worin wir aber zur Vereinfachung kurz E statt E_t^0 schreiben. Dann lautet diese Gleichung für $A = Q$:

$$\mu(\mathfrak{Q}) = \frac{1}{c} \int m(Q_E)\, \dot{E}, \tag{43}$$

wobei über die Menge aller k-dimensionalen Ebenen E durch den Ursprung integriert wird. Hieraus folgt (42) im Falle dim $T < k$, weil dann $J(\widetilde{Q}) = \delta_1 \cdot m(\widetilde{Q})$ und $m(Q_E) = \delta_2 \cdot m(\widetilde{Q})$ ist mit $|\delta_1| + |\delta_2| < \varepsilon$ für hinreichend kleines d (vgl. S. 751, 2. Fall). Nun sei dim $T = k$. Die Gleichung (2) von S. 750 lautet ausführlicher:

$$m(Q_E) = c(E) \cdot I(\widetilde{Q}) + \delta(d; E) \cdot m(\widetilde{Q}) \quad \text{mit} \lim_{d \to 0} \delta(d; E) = 0. \tag{44}$$

Hierdurch ist $\delta(d; E)$ eindeutig definiert, wenn $m(\widetilde{Q}) \neq 0$ ist; ist $m(\widetilde{Q}) = 0$, so ist auch $I(\widetilde{Q}) = 0$ und $m(Q_E) = 0$, letzteres weil Q_E ein dehnungsloses Bild von $\widetilde{Q}$ ist; in diesem Fall setzen wir $\delta(d; E) = 0$.

Wir behaupten über $\delta(d; E)$ zweierlei. α) $\delta(d; E)$ ist als Funktion von E summierbar. Hierzu genügt es, zu zeigen, daß die Funktionen $c(E)$ und $m(Q_E)$ summierbar sind. Für $c(E)$ folgt dies aus der Stetigkeit und Beschränktheit. Da Q_E ein dehnungsbeschränktes Bild von Q ist, also $m(Q_E) \leqq m(\widetilde{Q}) < \infty$ ist, brauchen wir nur die Meßbarkeit von $m(Q_E)$ zu zeigen. Mit $\widetilde{P}$ und $\widetilde{K}$ ist auch $\widetilde{Q} = \widetilde{K}\widetilde{P}$ und damit $Q = \pi(\widetilde{Q})$ kompakt. Also existiert für jedes natürliche j eine Q enthaltende Summe K^j endlich vieler, zu Q nicht fremder Kugeln des R_n mit Durchmessern $< j^{-1}$ derart, daß $K^1 \supset K^2 \supset \cdots$ gilt. Dann ist $K^1 \cdot K^2 \ldots = Q$, $K_E^1 \supset K_E^2 \supset \cdots$ und $K_E^1 \cdot K_E^2 \cdots = Q_E$, somit $m(K_E^1) \geqq (K_E^2) \geqq \cdots$ und $\lim m(K_E^i) = m(Q_E)$. Nun ist $m(K_E^i)$ stetig. Also ist $m(Q_E)$ meßbar. — β) Es ist $|\delta(d; E)| \leqq 1 + s$. Denn da Q_E ein dehnungsloses Bild von $\widetilde{Q}$ ist, also $m(Q_E) \leqq m(\widetilde{Q})$ gilt, da weiter $c(E) \leqq 1$ ist und $I(\widetilde{Q}) \leqq m(\widetilde{Q}) \cdot s$ ist wegen (10), so folgt $|m(Q_E) - c(E) \cdot I(\widetilde{Q})| \leqq m(\widetilde{Q}) + m(\widetilde{Q}) \cdot s$, woraus sich β) ergibt.

Aus α) und β) folgt, daß wir in (44) unter dem Limeszeichen integrieren können[21]), d. h. daß, wenn wir $\int c(E)\, \dot{E} = e$ und $\int \delta(d; E)\, \dot{E} = \delta(d)$ setzen

$$\int m(Q_E)\, \dot{E} = e \cdot I(\widetilde{Q}) + \delta(d) \cdot m(\widetilde{Q}) \quad \text{mit} \lim_{d \to 0} \delta(d) = 0,$$

also

$$\frac{1}{e} \int m(Q_E)\, \dot{E} = I(\widetilde{Q}) + \delta \cdot m(\widetilde{Q}) \quad \text{mit } |\delta| < \varepsilon \text{ für hinreichend kleines } d \tag{45}$$

[21]) A. a. O.[14]), S. 444.

gilt. Nun ist, wenn W ein Einheitswürfel $\subset T$ ist, $c(E) = m(W_E)$ nach Definition von $c(E)$ auf S. 750. Nach (41), worin wir $E_k^0 = E$ setzen, ist also $e = c\mu(\mathfrak{B})$, nach (37) mithin $e = \int_{\mathfrak{B}} E_{n-k}$. Da jede Ebene E_{n-k}, außer derjenigen einer Menge mit dem Maße $\mu = 0$, mit W genau einen Punkt gemein hat, ist $\frac{1}{c}\int_{\mathfrak{B}} \dot{E}_{n-k} = \mu_P(W) = 1$. Also ist $e = c$. Mithin ist (45) wegen (43) mit (42) äquivalent und damit (42) bewiesen.

Nach (42) und dem Überdeckungssatz von Vitali existieren im R_k endlich oder abzählbar viele abgeschlossene Kugeln $\widetilde{K}_1, \widetilde{K}_2, \ldots$, deren Durchmesser beliebig klein und deren Mittelpunkte $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots$ in $\widetilde{P}$ enthalten sind, derart, daß gilt:

(46) $$\widetilde{Q}_i \widetilde{Q}_j = 0 \quad \text{für } i \neq j;$$

(47) $$\widetilde{P} = \sum_i \widetilde{Q}_i + \widetilde{N}, \quad m(\widetilde{N}) = 0;$$

(48) $$\mu(\mathfrak{Q}_i) = I(\widetilde{Q}_i) + \delta_i \cdot m(\widetilde{Q}_i), \quad |\delta_i| < \varepsilon.$$

Aus (46) bis (48) folgt

(49) $$\sum_i \mu(\mathfrak{Q}_i) = I(\widetilde{P}) + \delta \cdot m(\widetilde{P}), \quad |\delta| < \varepsilon.$$

Da die Abbildung π eineindeutig ist, sind die Mengen $Q_i = \pi(\widetilde{Q}_i)$ und $N = \pi(\widetilde{N})$ paarweise fremd. Außerdem ist $P = \sum_i Q_i + N$. Schließlich ist $\mu(\mathfrak{N}) = 0$, wie aus (41) auf Grund der Tatsache folgt, daß wegen der Dehnungslosigkeit von π die Projektionen $N_{E_k^0}$ dehnungslose Bilder von $\widetilde{N}$ mit $m(\widetilde{N}) = 0$ sind und für sie daher $m(N_{E_k^0}) = 0$ gilt. Also ist wegen (38)

$$\mu_F(P) = \sum_i \mu(\mathfrak{Q}_i) + \delta' \cdot m(\widetilde{P}), \quad |\delta'| < \varepsilon,$$

falls die Durchmesser der Kugeln $\widetilde{K}_i$ und damit die der Mengen $Q_i = \pi(\widetilde{K}_i \widetilde{P})$ hinreichend klein sind, was wir, wie vorhin bereits bemerkt, annehmen können. Nach (49) ist also

(50) $$\mu_F(P) = I(\widetilde{P}) + \zeta \cdot m(\widetilde{P}), \quad |\zeta| < 2\,\varepsilon.$$

Analog wie vorhin $\mu(\mathfrak{N}) = 0$ aus $m(\widetilde{N}) = 0$ folgt mit Hilfe von (38) und (41) aus (9) die Ungleichung $\mu_F(M - P) \leqq m(\widetilde{M} - \widetilde{P}) \cdot \frac{1}{c}\int \dot{E}_k^0 \leqq \varepsilon \cdot a$, wobei wir das über alle E_k^0 durch den Ursprung genommene Integral $\frac{1}{c}\int \dot{E}_k^0 = a$ gesetzt haben. Hieraus, (50) und (11), folgt

$$\mu_F(M) = I(\widetilde{M}) + \eta \cdot \big(m(\widetilde{M}) + a + s\big), \quad |\eta| < 2\,\varepsilon.$$

Da ε beliebig positiv ist, folgt schließlich

(51) $$\mu_F(M) = I(\widetilde{M}).$$

3.7. Das k-dimensionale JANZEN-Maß μ_J im R_n. Definition. Für jedes $d_\varkappa$ einer Nullfolge $\{d_\varkappa\}$ positiver Zahlen liege eine Darstellung des R_n als Summe abzählbar vieler Quader $W_\varkappa^1, W_\varkappa^2, \ldots$ mit Durchmessern $< d_\varkappa$ vor; dabei sei über die Zugehörigkeit der Ecken, der offenen Kanten und der offenen Seitenflächen der Dimensionen $2, \ldots, n-1$ zu den Quadern so verfügt, daß die Quader paarweise fremd sind. Weiter seien für ein fest gewähltes, rechtwinkliges Koordinatensystem $E^1, \ldots, E^l$ die $l = \binom{n}{k}$ Koordinatenebenen der Dimension k. Wir setzen $W_\varkappa^i \cdot M = M_\varkappa^i$ und bezeichnen die Projektion von $M_\varkappa^i$ in die Ebene E^λ mit $M_{\varkappa E^\lambda}^i$. Schließlich setzen wir $\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\sum_{\lambda=1}^{l} (m(M_{\varkappa E^\lambda}^i))^2} = T_\varkappa(M)$. Dann ist $\mu_J(M) = \lim_{\varkappa \to \infty} T_\varkappa$. (Die Existenz dieses Limes wird sich für unser dehnungsloses Bild $M = \pi(\widetilde{M})$ ganz von selbst mit ergeben.)

Für jedes $\varkappa = 1, 2, \ldots$ und jedes $\lambda = 1, \ldots, l$ definieren wir eine Funktion $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})$ für alle Punkte $\mathfrak{y}$ von $\widetilde{P}$ folgendermaßen. Wir setzen zunächst $W_\varkappa^i \cdot P = Q_\varkappa^i$ und $\pi^{-1}(Q_\varkappa^i) = \widetilde{Q}_\varkappa^i$. Dann liegt jeder Punkt $\mathfrak{y}$ von $\widetilde{P}$ in genau einer der Mengen $\widetilde{Q}_\varkappa^1, \widetilde{Q}_\varkappa^2, \ldots$. Gilt nun für die den Punkt $\mathfrak{y}$ enthaltende Menge $\widetilde{Q}_\varkappa^i$ die Gleichung $m(\widetilde{Q}_\varkappa^i) = 0$, so setzen wir $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y}) = 0$. Ist aber $m(\widetilde{Q}_\varkappa^i) \neq 0$, so definieren wir $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})$ durch die Gleichung

$$m(Q_{\varkappa E^\lambda}^i) = c(E^\lambda) \cdot I(\widetilde{Q}_\varkappa^i) + \delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y}) \cdot m(\widetilde{Q}_\varkappa^i), \tag{52}$$

wobei $c(E^\lambda)$ wie auf S. 750 mit Hilfe der Tangentialmannigfaltigkeit T an M im Punkte $\mathfrak{x} = \pi(\mathfrak{y})$ definiert (also eine Funktion von $\mathfrak{y}$) ist. Dann gilt

$$\lim_{\varkappa \to \infty} \delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y}) = 0, \tag{53}$$

was im ersten Fall trivial ist und im zweiten Fall aus der Gleichung (2) (mit $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}$) wegen $\lim_{\varkappa \to \infty} d_\varkappa = 0$ folgt.

Wir wollen nun weiter zeigen, daß auf einer gewissen Teilmenge $\widetilde{P}'$ von $\widetilde{P}$ die Konvergenz (53) gleichmäßig ist. Hierzu benötigen wir die Lebesgue-Meßbarkeit von $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$, die wir zunächst beweisen wollen. Da die Mengen $\widetilde{Q}_\varkappa^i$ BORELsche Mengen sind und $\widetilde{Q}_\varkappa^1 + \widetilde{Q}_\varkappa^2 + \cdots = \widetilde{P}$ ist, genügt es zu zeigen, daß $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})$ auf jeder Menge $\widetilde{Q}_\varkappa^i$ meßbar ist. Im Falle $m(\widetilde{Q}_\varkappa^i) = 0$ haben wir $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y}) = 0$ auf $\widetilde{Q}_\varkappa^i$ gesetzt; in diesem Fall ist also $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})$ in trivialer Weise meßbar auf $\widetilde{Q}_\varkappa^i$. Nun sei $m(\widetilde{Q}_\varkappa^i) > 0$. Wir bezeichnen vorübergehend mit $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(+)}$ bzw. $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(0)}$ die Menge der Punkte $\mathfrak{y}$ von $\widetilde{Q}_\varkappa^i$, in denen $D(\mathfrak{y}) \neq 0$ (also > 0) bzw. $D(\mathfrak{y}) = 0$ ist. Wegen der Stetigkeit von $D(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$[10]) ist $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(+)}$ offen in $\widetilde{Q}_\varkappa^i$ und $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(0)}$ abgeschlossen in $\widetilde{Q}_\varkappa^i$. Beide Mengen sind also BORELsche Mengen und wir brauchen nur noch die Meßbarkeit auf $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(+)}$ und $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(0)}$ zu zeigen. Für die Punkte $\mathfrak{y}$ von $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(+)}$ hängt die k-dimensionale Tangentialebene T an M in $\mathfrak{x} = \pi(\mathfrak{y})$ stetig von $\mathfrak{y}$ ab wegen der Stetigkeit der partiellen

Ableitungen $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$ auf $\widetilde{P}$; also hängt auch $c(E^\lambda)$ und damit $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})$ nach (52) stetig von $\mathfrak{y} \in \widetilde{Q}_\varkappa^{i(+)}$ ab. Für jeden Punkt $\mathfrak{y}$ von $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(0)}$ ist $c(E^\lambda) = \frac{1}{\sqrt{l}}$ nach S. 750, also $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})$ nach (52) konstant auf $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(0)}$ und daher meßbar auf $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(0)}$.

Aus (53) und der Meßbarkeit der Funktionen $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$ folgt die Existenz einer meßbaren Teilmenge $\widetilde{P}'$ von $\widetilde{P}$ mit

$$m(\widetilde{P} - \widetilde{P}') < \varepsilon \tag{54}$$

derart, daß

$$\lim_{\varkappa \to \infty} \delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y}) = 0 \quad \text{gleichmäßig auf } \widetilde{P}' \tag{55}$$

gilt [22]). Dann existiert ein $\varkappa_0$ derart, daß für alle $\varkappa > \varkappa_0$, alle $\lambda = 1, \ldots, l$ und alle Quader $W_\varkappa^i$, welche mindestens einen Punkt $\mathfrak{x} = \pi(\mathfrak{y})$ aus $P' = \pi(\widetilde{P}')$ enthalten, die Gleichung (52) gilt mit $|\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})| < \varepsilon$. Aus der letzten Ungleichung folgt $\sum_{\lambda=1}^{l} (\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y}))^2 < \varepsilon^2 l$. Außerdem ist $(c(E^1))^2 + \cdots + (c(E^l))^2 = 1$ [23]). Also gilt [24])

$$\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{l} (m(Q_\varkappa^i E^\lambda))^2} = I(\widetilde{Q}_\varkappa^i) + \delta_\varkappa^i \cdot m(\widetilde{Q}_\varkappa^i) \quad \text{mit} \quad |\delta_\varkappa^i| < \varepsilon \sqrt{l}$$

für alle $\varkappa > \varkappa_0$ und alle zu $\widetilde{P}' = \pi(P')$ nicht fremden $W_\varkappa^i$. Also gilt

$$\sum_i{}' \sqrt{\sum_{\lambda=1}^{l} (m(Q_\varkappa^i E^\lambda))^2} = \sum_i{}' I(\widetilde{Q}_\varkappa^i) + \delta_\varkappa' \cdot m(\widetilde{M}) \quad \text{mit} \quad |\delta_\varkappa'| \leqq \varepsilon \sqrt{l} \text{ [25])} \tag{56}$$

für jedes $\varkappa > \varkappa_0$, wobei summiert wird über alle i, für welche $W_\varkappa^i$ zu P' nicht fremd ist.

Die über die restlichen i genommene Summe $\sum_i{}'' Q_\varkappa^i$ ist in $P - P'$ und daher $\sum_i{}'' \widetilde{Q}_\varkappa^i$ in $\widetilde{P} - \widetilde{P}'$ enthalten. Wegen (54) ist daher $\sum_i{}'' m(\widetilde{Q}_\varkappa^i) < \varepsilon$. Hieraus folgt wegen (10) erstens

$$\sum_i{}'' I(\widetilde{Q}_\varkappa^i) < \varepsilon \cdot s \tag{57}$$

---

[22]) A. a. O. [14]), S. 382.

[23]) O. Haupt-G. Aumann, a. a. O. [9]), S. 153; im Falle dim $T < k$ haben wir $c(E^\lambda) = \frac{1}{\sqrt{l}}$ gesetzt (S. 750)!

[24]) Auf Grund der bekannten Formel

$$\sqrt{(\sum_\nu a_1^{(\nu)})^2 + \cdots + (\sum_\nu a_r^{(\nu)})^2} \leqq \sum_\nu \sqrt{(a_1^{(\nu)})^2 + \cdots + (a_r^{(\nu)})^2}\,.$$

[25]) Wir haben die Zahl $\sum_i m(\widetilde{Q}_\varkappa^i) = m(\widetilde{P})$ durch die nicht kleinere Zahl $m(\widetilde{M})$ ersetzt.

und, da $Q_{\varkappa E^\lambda}^i$ ein dehnungsloses Bild von $\widetilde{Q}_\varkappa^i$ ist, $\sum_i'' m(Q_{\varkappa E^\lambda}^i) < \varepsilon$ und somit zweitens

$$\sum_i'' \sqrt{\sum_{\lambda=1}^{l} (m(Q_{\varkappa E^\lambda}^i))^2} < \varepsilon \cdot l. \tag{58}$$

Aus (56) bis (58) folgt wegen $\sum_i \widetilde{Q}_\varkappa^i = \widetilde{P}$ für $\varkappa > \varkappa_0$

$$T_\varkappa(P) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\sum_{\lambda=1}^{l} (m(Q_{\varkappa E^\lambda}^i))^2} = I(\widetilde{P}) + \delta_\varkappa \cdot (m(\widetilde{M}) + s + \sqrt{l}) \tag{59}$$

mit $|\delta_\varkappa| < \varepsilon l$.

Jetzt kommen wir rasch zum Ziel. Es gilt nämlich

$$T_\varkappa(P) \leqq T_\varkappa(M) \leqq T_\varkappa(P) + T_\varkappa(M - P)^{24}). \tag{60}$$

Nun ist $m(\widetilde{M} - \widetilde{P}) < \varepsilon$ nach (9). Hieraus folgt, daß die Projektionen der Durchschnitte der $W_\varkappa^1$, $W_\varkappa^2$, ... mit $M - P$ in die Ebene E^λ als dehnungslose Bilder paarweise fremder Teilmengen von $\widetilde{M} - \widetilde{P}$ eine Inhaltssumme $< \varepsilon$ haben. Also ist

$$T_\varkappa(M - P) < \varepsilon l \tag{61}$$

für jedes $\varkappa$. Aus (59) bis (61) und (11) folgt

$$T_\varkappa(M) = I(\widetilde{M}) + \varepsilon_\varkappa \cdot (m(\widetilde{M}) + 2s + 2l) \text{ mit } |\varepsilon_\varkappa| < \varepsilon l$$

für $\varkappa > \varkappa_0$. Da ε eine beliebig kleine positive Zahl ist, folgt schließlich

$$\mu_J(M) = I(\widetilde{M}). \tag{62}$$

§ 4.

Beweis des Satzes 1[26]).

Es sei also jetzt $M \subset R_n$ ein eindeutiges (nicht notwendig umkehrbar eindeutiges), dehnungsbeschränktes Bild $\pi(\widetilde{M})$ einer analytischen Menge $\widetilde{M}$ des R_k. Die Menge $\widetilde{M}$ enthält eine monoton wachsende Folge $\widetilde{P}_1 \subset \widetilde{P}_2 \subset \cdots$ kompakter Mengen derart, daß

$$\widetilde{M} = \widetilde{P}_1 + \widetilde{P}_2 + \cdots + \widetilde{N} \text{ und } m(\widetilde{N}) = 0 \tag{63}$$

ist[27]). Wir setzen $\pi(\widetilde{P}_j) = P_j$ und $\pi(\widetilde{N}) = N$.

Nun seien μ_i $(i = 1, 2)$ zwei der im Satz 1 genannten Maße. Wir behaupten die Gleichung

$$\mu_i(M) = \lim_{j \to \infty} \mu_i(P_j) \qquad (i = 1, 2). \tag{64}$$

---

[26]) Dieser Beweis ist eine Nachbildung des entsprechenden Beweises bei A. Kolmogoroff [1]).

[27]) A. a. O. [14]), S. 275.

Hierzu genügt es zu beweisen, daß

$$\mu_i(N) = 0 \tag{65}$$

ist. Diese Gleichung ergibt sich folgendermaßen. Ist u_i ein KOLMOGOROFF-Maß μ_K, so folgt (65) aus $m(\widetilde{N}) = 0$ nach dem 3. Axiom von KOLMOGOROFF (Nr. 3. 3), da $N = \pi(\widetilde{N})$ ein dehnungsloses Bild von $\widetilde{N}$ ist. Nun sei μ_i das HAUSDORFF-Maß μ_H; wegen $m(\widetilde{N}) = 0$ kann $\widetilde{N}$ überdeckt werden durch höchstens abzählbar viele Kugeln $K_1, K_2, \ldots$ des R_k mit Durchmessern $< \varepsilon$ und einer Inhaltssumme $< \varepsilon$; da N ein dehnungsloses Bild von $\widetilde{N}$ ist, kann N überdeckt werden durch gleich viele Kugeln $H_1, H_2, \ldots$ des R_n derart, daß der Durchmesser von H_r höchstens doppelt so groß ist wie der von K_r $(r = 1, 2, \ldots)$; hieraus folgt (65) für μ_H. Weiter folgt (65) für $\mu_i = \mu_C$ und $\mu_i = \mu_G$, da $\mu_G \leqq \mu_C \leqq \mu_H$ ist für jede Menge (Nr. 3. 4). Aus $\mu_H(N) = 0$ ergibt sich außerdem die Gleichung $\mu_{Gi}(N) = 0$, also (65) für $\mu_i = \mu_{Gi}$, auf Grund der aus der Definition von μ_H und μ_{Gi} unmittelbar folgenden Tatsache, daß für jede Menge L des R_n zwischen dem $(n-1)$-dimensionalen GILLESPIE-Maß $\mu_{Gi}(L)$ und dem $(n-1)$-dimensionalen HAUSDORFF-Maß $\mu_H(L)$ die Ungleichung $\mu_{Gi}(L) \leqq c_n \cdot \mu_H(L)$ gilt, wobei c_n der Quotient der halben Oberfläche der Einheitskugel im R_n und dem Inhalt der Einheitskugel im R_{n-1} ist. Schließlich folgt (65) für $\mu_i = \mu_F$ und $\mu_i = \mu_J$ aus der Tatsache, daß für jede Teilmenge N' von N die Projektion von N' in eine k-dimensionale Teilebene E des R_n ein dehnungsloses Bild $\pi_E \pi(\widetilde{N}')$ einer Teilmenge $\widetilde{N}'$ von $\widetilde{N}$ ist und daher den LEBESGUE-Inhalt 0 hat [für μ_F beachte man hierzu (38) und (41)].

Nun existiert für jedes natürliche j eine analytische Teilmenge $\widetilde{M}_j$ von $\widetilde{P}_j$ derart, daß π auf $\widetilde{M}_j$ eineindeutig ist und für das Bild $M_j = \pi(\widetilde{M}_j)$ die Gleichung $M_j = P_j$ gilt [1]). Nach (65) ist also

$$\mu_i(M_j) = \lim_{j \to \infty} \mu_i(M_j). \tag{66}$$

Nach Satz 2 ist $\mu_1(M_j) = \mu_2(M_j)$ für $j = 1, 2, \ldots$. Nach (66) ist also

$$\mu_1(M) = \mu_2(M).$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.

§ 5.

Beweis des Satzes 3.

5. 1. Das k-dimensionale Flächenmaß μ_L von H. LEBESGUE im R_n[28]). Definition. Es sei $F = \pi(\widetilde{F})$ eine stetige, k-dimensionale Fläche im R_n (§ 1). Für jedes natürliche j liege eine stetige, k-dimensionale Fläche $F^j = \pi^j(\widetilde{F})$ im R_n vor derart, daß die Abbildung π^j auf dem Einheitswürfel $\widetilde{F}$

[28]) H. LEBESGUE, Intégrale, aire, longueur. Annali di matematica (3) 7 (1902), S. 231–359.

des R_k stückweise affin ist, d. h. daß $\widetilde{F}$ als Summe endlich vieler Simplexe Δ^{jh} $(h = 1, 2, \ldots)$ darstellbar ist, auf denen die Abbildung π^j affin ist. Die Folge $\{F^j\}$ dieser simplizialen Flächen konvergiere gegen F, d. h. ist δ_j die obere Grenze der Abstände $\overline{\pi(\mathfrak{y})\,\pi^j(\mathfrak{y})}$ für alle Punkte $\mathfrak{y}$ von $\widetilde{F}$, so gilt $\lim\limits_{j\to 0} \delta_j = 0$. Es sei nun $m(F^j)$ die Summe der k-dimensionalen, elementargeometrischen Inhalte der höchstens k-dimensionalen Simplexe $\pi^j(\Delta^{jh})$ $(h = 1, 2, \ldots)$ und $\underline{m}\{F^j\} = \lim\limits_{j\to\infty} m(F^j)$ gesetzt. Dann ist die (eventuell unendliche) untere Grenze der Zahlen $\underline{m}\{F^j\}$ für alle Folgen $\{F^j\}$ der genannten Art das k-dimensionale Flächenmaß $\mu_L(F)$ von Lebesgue.

Nun sei die Fläche F, d. h. also π, dehnungsbeschränkt. Wir wollen zunächst die Ungleichung $\mu_L(F) \geqq I(\widetilde{F})$ beweisen. Hierzu wählen wir eine positive Zahl ε. Wir werden nun endlich viele, die Fläche F in ihren Mittelpunkten berührende Parallelepipede $\alpha_1(\widetilde{W}_1), \ldots, \alpha_t(\widetilde{W}_t)$ konstruieren, deren Inhaltssumme $\geqq I(\widetilde{F}) - \varepsilon \cdot (4s + 1)$ ist und so daß folgendes gilt: Ist $\{F^j\}$ eine gegen F konvergierende Folge simplizialer Flächen, so enthält für jedes hinreichend große j die Fläche F^j paarweise fremde Flächenstücke $F_1^j, \ldots, F_t^j$ derart, daß bei Projektion von F_σ^j in die $\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma)$ enthaltende k-dimensionale Ebene das ganze Parallelepiped $\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma)$ von der Projektion überdeckt wird. Hieraus folgt, daß der Inhalt von F^j sicher $\geqq I(\widetilde{F}) - \varepsilon \cdot (4s + 1)$ ist. Da hierbei ε beliebig klein ist, folgt $\underline{m}\{F^j\} \geqq I(\widetilde{F})$ und damit $\mu_L(F) \geqq I(\widetilde{F})$. — Wir gehen an die Durchführung.

Zu dem beliebig gewählten, positiven ε wählen wir in $\widetilde{F}$ (wie in Nr. 3. 1 in $\widetilde{M}$) eine kompakte Menge $\widetilde{P}$ derart, daß die Beziehungen (9) bis (12) mit $\widetilde{F}$ statt $\widetilde{M}$ gelten. Weiter sei $\widetilde{N}$ die nach § 1 meßbare Menge aller Punkte von $\widetilde{F}$, in denen $D(\mathfrak{y}) \neq 0$ ist. Dann ist $I(\widetilde{F}) = I(\widetilde{N})$. Die Menge $\widetilde{N}$ enthält eine kompakte, zur Begrenzung von $\widetilde{F}$ fremde Teilmenge $\widetilde{G}$ derart, daß $m(\widetilde{N} - \widetilde{G}) < \varepsilon$ ist [27]). Dann ist $I(\widetilde{N} - \widetilde{G}) < \varepsilon \cdot s$ [vgl. (10)]. Hieraus und aus (11) mit $\widetilde{M} = \widetilde{F}$ folgt

$$I(\widetilde{F} - \widetilde{P}\,\widetilde{G}) < 2\,\varepsilon s. \tag{67}$$

Nun sei $\mathfrak{y}_0$ ein Punkt von $\widetilde{P}\,\widetilde{G}$ und $\mathfrak{x}_0$ sein Bildpunkt. Wegen der totalen Differenzierbarkeit von π in $\mathfrak{x}_0$ wird die Abbildung π angenähert durch die affine Abbildung α:

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{x}_0 + (\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0) \cdot \frac{\partial\, \mathfrak{x}_0(\mathfrak{y}_0)}{\partial\, \mathfrak{y}}$$

in dem Sinne, daß

$$|\mathfrak{x} - \mathfrak{z}| = o(|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0|) \tag{68}$$

gilt (vgl. § 2). Ist nun $\widetilde{V}$ ein achsenparalleler, abgeschlossener Würfel des R_k mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{y}_0$ und einer Kantenlänge d_0, $\widetilde{W}$ ein ebensolcher Würfel

mit der Kantenlänge $\sqrt[k]{1-\varepsilon}\cdot d_0$, so sind $\alpha(\widetilde{V})$ und $\alpha(\widetilde{W})$ Parallelepipede der k-dimensionalen Tangentialebene T an F im Punkte $\mathfrak{x}_0$, von denen das zweite im ersten enthalten ist. Es sei $V=\pi(\widetilde{V})$. Aus (68) folgt dann, falls d_0 hinreichend klein ist:

(69) $\alpha(\widetilde{W})$ wird durch V_T mit dem Grade ± 1 überdeckt [29]).

Also existieren nach dem Überdeckungssatz von VITALI: erstens endlich viele paarweise fremde achsenparallele, abgeschlossene Würfel $\widetilde{V}_1, \ldots, \widetilde{V}_t \subset \widetilde{F}$, deren Mittelpunkte $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t$ in $\widetilde{P}\,\widetilde{G}$ liegen und deren Durchmesser $d_1, \ldots, d_t < e$ sind [30]); zweitens zu den $\widetilde{V}_\sigma$ konzentrische, achsenparallele Würfel $\widetilde{W}_1, \ldots, \widetilde{W}_t$ mit den Durchmessern $\sqrt[k]{1-\varepsilon}\cdot d_1, \ldots, \sqrt[k]{1-\varepsilon}\cdot d_t$, derart, daß einerseits gilt:

(70) $\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma)$ wird durch $V_{\sigma T_\sigma}$ mit dem Grade ± 1 überdeckt $(\sigma = 1, \ldots, t)$

[wobei natürlich $\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma)$ die in der k-dimensionalen Tangentialebene T_σ an F in $\mathfrak{x}_\sigma = \pi(\mathfrak{y}_\sigma)$ enthaltene affine Näherung von $\pi(\widetilde{W}_\sigma)$ und $V_{\sigma T_\sigma}$ die Projektion von $V_\sigma = \pi(\widetilde{V}_\sigma)$ in die Tangentialebene T_σ ist] und andererseits $m(\widetilde{P}\,\widetilde{G} - \sum_{\sigma=1}^{t}\widetilde{V}_\sigma) < \varepsilon$. Aus der letzteren Ungleichung folgt, da die Kantenlängen von $\widetilde{W}_\sigma$ und $\widetilde{V}_\sigma$ sich wie $\sqrt[k]{1-\varepsilon}:1$ verhalten und daher $m(\sum_\sigma \widetilde{V}_\sigma - \sum_\sigma \widetilde{W}_\sigma) < \varepsilon\cdot m(\sum \widetilde{V}_\sigma) < \varepsilon$ [31]):

$$m(\widetilde{P}\,\widetilde{G} - \sum_{\sigma=1}^{t}\widetilde{W}_\sigma) < 2\,\varepsilon. \tag{71}$$

---

[29]) Es sei $f(\widetilde{V})$ ein in einer k-dimensionalen Ebene E des R_n enthaltenes eindeutiges, stetiges Bild eines k-dimensionalen Würfels $\widetilde{V}$ und p ein nicht im Bild $f(B(\widetilde{V}))$ der Begrenzung $B(\widetilde{V})$ von $\widetilde{V}$ enthaltener Punkt von E. Zur Definition des Grades von f in p sei τ eine Triangulierung des Inneren $\underline{\widetilde{V}}$ von $\widetilde{V}$, d. h. eine Darstellung von $\underline{\widetilde{V}}$ als Summe von abzählbar vielen abgeschlossenen k-dimensionalen Simplexen, die zu je zwei höchstens ein Randsimplex gemein haben, die sich nur in $B(\widetilde{V})$ häufen und deren Durchmesser gegen Null konvergieren. Es sei nun g eine auf $B(\widetilde{V})$ mit f identische, auf den Simplexen von τ affine Abbildung von $\widetilde{V}$ in E; indem wir die g-Bilder der Simplexecken in E ein wenig verrücken („in allgemeine Lage bringen"), können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der Punkt p für kein Simplex von τ im g-Bild des Randes enthalten ist. Der (von g unabhängige) Grad der Abbildung f in p ist nun die Anzahl p enthaltenden g-Bilder von Simplexen von τ, wobei solch ein g-Bild positiv oder negativ zu zählen ist, je nachdem die durch g in diesem Bildsimplex induzierte Orientierung der Orientierung in E gleichgerichtet ist oder nicht. Vgl. z. B. P. ALEXANDROFF und H. HOPF, Topologie I, Berlin 1935.

[30]) Die Definition von e befindet sich auf S. 753; man schreibe dort F statt M.

[31]) Man beachte, daß die $\widetilde{V}_\sigma$ paarweise fremd und im Einheitswürfel $\widetilde{F}$ enthalten sind.

Außerdem gilt wegen $\widetilde{W}_\sigma \subset \widetilde{F}$ und $\widetilde{W}_{\sigma'} \cdot \widetilde{W}_{\sigma''} = 0$ für $\sigma' \neq \sigma''$:

$$\sum_{\sigma=1}^{t} m(\widetilde{W}_\sigma) < 1. \tag{72}$$

Nun sei $\{F^j\}$ eine gegen die Fläche F konvergierende Folge von simplizialen Flächen $F^j = \pi^j(\widetilde{F})$ im Sinne der Definition von μ_L. Wir setzen $\pi^j(\widetilde{V}_\sigma) = F^j_\sigma$. Die t Flächen $F^j_1, \ldots, F^j_t$ sind in F^j enthalten und konvergieren gegen die Flächen $V_1, \ldots, V_t$. Wegen (70) existiert daher ein natürliches j_0 derart, daß $\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma)$ für jedes $j > j_0$ von der Projektion von F^j_σ in die Tangentialebene T_σ an die Fläche F im Punkte $\mathfrak{x}_\sigma = \pi(\mathfrak{y}_\sigma)$ überdeckt wird ($\sigma = 1, \ldots, t$). Also ist der elementargeometrische Inhalt $m(F^j_\sigma) \geqq m(\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma))$ und daher $m(F^j) \geqq \sum m(\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma)) \geqq \sum m(\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma \widetilde{P} \widetilde{G})) = \sum D(\mathfrak{y}_\sigma) \cdot m(\widetilde{W}_\sigma \widetilde{P} \widetilde{G})$. Da die Durchmesser der Würfel $\widetilde{W}_\sigma < e$ sind, folgt aus (12): $D(\mathfrak{y}_\sigma) \cdot m(\widetilde{W}_\sigma \widetilde{P} \widetilde{G}) = I(\widetilde{W}_\sigma \widetilde{P} \widetilde{G}) + \eta_\sigma m(\widetilde{W}_\sigma)$ mit $|\eta_\sigma| < \varepsilon$. Unter Berücksichtigung von (72), (71) und (67) folgt hieraus weiter $m(F^j) \geqq I(\sum \widetilde{W}_\sigma \widetilde{P} \widetilde{G}) - \varepsilon \geqq I(\widetilde{P} \widetilde{G}) - 2\varepsilon s - \varepsilon \geqq I(\widetilde{F}) - \varepsilon \cdot (4s + 1)$ und somit $\underline{\lim}\, m(F^j) \geqq I(\widetilde{F})$, da ε beliebig klein gewählt werden kann und s fest ist (Nr. 3. 1). Da $\{F^j\}$ eine beliebige, gegen F konvergente Folge von simplizialen Flächen F^j ist, folgt nach Definition von μ_L schließlich $\mu_L(F) \geqq I(\widetilde{F})$.

Die umgekehrte Ungleichung $\mu_L(F) \leqq I(\widetilde{F})$ folgt daraus, daß Folgen $\{F^j\}$ simplizialer Flächen F^j mit $\lim m(F^j) = I(\widetilde{F})$ tatsächlich existieren[32]). Also ist[33])

$$\mu_L(F) = I(\widetilde{F})\,[34]). \tag{73}$$

---

[32]) O. Haupt-G. Aumann, a. a. O. [9]), S. 160.

[33]) Für die Richtigkeit dieser Gleichung ist es wesentlich, daß $\widetilde{F}$ ein Würfel ist oder allgemeiner ein abgeschlossenes Gebiet, deren Begrenzung den k-dimensionalen (äußeren) Inhalt Null hat. Ist nämlich $\widetilde{F} \doteq R_k$ ein topologisches Bild eines abgeschlossenen Würfels des R_k, für welches die Begrenzung einen positiven Lebesgueschen Inhalt hat und setzen wir π auf $\widetilde{F}$ gleich der Identität (also $\widetilde{F} = F$), so ist $\mu_L(F) = m(\underline{F})$ ($\underline{F}$ ist der offene Kern von F), also $\mu_L(F) < I(\widetilde{F}) = m(F)$. — Dasselbe gilt für das (für k-dimensionale topologische Flächen mit μ_L identische) Maß μ_M für k-dimensionale Mengen $M \subset R_n$ von K. Menger [Ergebnisse eines math. Kolloquiums, Heft 2 (1932), S. 10]: ist G_ε die untere Grenze der elementargeometrischen Inhalte der k-dimensionalen Polyeder (endliche Simplexsummen), in welche sich die k-dimensionale Menge M ε-deformieren läßt, so ist $\mu_M(M) = \lim_{\varepsilon \to 0} G_\varepsilon$. Die letzte Ungleichung, in welcher man μ_M statt μ_L schreiben kann, zeigt zugleich, daß die Sätze 1 und 2 für μ_M nicht gelten.

[34]) Z. von Geöcze [Math. und naturw. Berichte aus Ungarn **26** (1908), S. 1—88] hat für Flächen sechs Maße $T_1 - T_6$ mit $\mu_L = T_1 = T_2 \leqq T_3 \leqq T_4 \leqq T_5 \leqq T_6$ definiert, die aus $\mu_L = T_1 = T_2$ durch einschränkende Voraussetzungen über die approximierenden Folgen $\{F^j\}$ (S. 766) hervorgehen. Für T_6 bestehen die Voraussetzungen darin, daß die Simplexecken der F^j in F liegen sollen, daß also die Simplexnetze F^j der Fläche F einbeschrieben sein sollen. Da für dehnungsbeschränkte topologische Flächen F einbeschriebene Simplexnetze F^j mit $\lim m(F^j) = I(\widetilde{F})$ existieren[32]), folgt $T_1(F) = \cdots = T_6(F) = I(\widetilde{F})$ für solche Flächen F.

5.2. Das k-dimensionale Flächenmaß μ_P im R_n von G. PEANO[35]). **Definition.** Der abgeschlossene Einheitswürfel $\widetilde{F}$ sei dargestellt als Summe $\widetilde{F}_1, \ldots, \widetilde{F}_u$ endlich vieler zu $\widetilde{F}$ homöomorpher Mengen $\widetilde{F}_\sigma$ mit der Eigenschaft, daß $m(\widetilde{F}_{\sigma'} \cdot \widetilde{F}_{\sigma''}) = 0$ ist für $\sigma' \neq \sigma''$[36]). Für gleichviele k-dimensionale Ebenen E_σ des R_n werden die u Projektionen $F_{\sigma E_\sigma}$ der Mengen $F_\sigma = \pi(\widetilde{F}_\sigma)$ in die Ebenen E_σ betrachtet. Dann ist $\mu_P(F) = \text{Supr.}\,(m(F_{1E_1}) + \cdots + m(F_{uE_u}))$ für alle Summendarstellungen $\widetilde{F} = \widetilde{F}_1 + \cdots + \widetilde{F}_u$ der genannten Art und alle k-dimensionalen Ebenen $E_1, \ldots, E_u$.

Wir behaupten zunächst die Ungleichung $\mu_P(F) \leqq I(\widetilde{F})$. In jedem $\widetilde{F}_\sigma$ ist eine analytische Menge $\widetilde{A}_\sigma$ enthalten, auf welcher die dehnungslose Abbildung π umkehrbar eindeutig und das Bild $\pi(\widetilde{A}_\sigma) = A_\sigma$ gleich F_σ ist[1]). Dann ist einerseits $m(F_{\sigma E_\sigma}) \leqq \mu_G(F_\sigma) = \mu_G(A_\sigma)$ für jede Ebene E_q, da für jede Menge B des R_n die Ungleichung $m(B_E) \leqq \mu_G(B)$ gilt. Andererseits ist $\mu_G(A_\sigma) = I(\widetilde{A}_\sigma)$ nach Satz 2 und $I(\widetilde{A}_1) + \cdots + I(\widetilde{A}_u) \leqq I(\widetilde{F})$, da der Durchschnitt je zweier Mengen $\widetilde{A}_\sigma$ leer oder eine LEBESGUEsche Nullmenge ist. Also ist $m(F_{1E_1}) + \cdots + m(F_{uE_u}) \leqq I(\widetilde{F})$ und somit

$$\mu_P(F) \leqq I(\widetilde{F}). \tag{74}$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung betrachten wir die Würfel $\widetilde{V}_1, \ldots, \widetilde{V}_t$ der Nr. 5.1 und fügen zu ihnen endlich viele weitere abgeschlossene Würfel $\widetilde{V}_{t+1}, \ldots, \widetilde{V}_u$ hinzu derart, daß $\widetilde{F} = \widetilde{V}_1 + \cdots + \widetilde{V}_u$ ist und die $\widetilde{V}_1, \ldots, \widetilde{V}_u$ zu je zwei höchstens einen $(k-1)$-dimensionalen Durchschnitt haben. Aus (70) und der in Nr. 5.1 bewiesenen Ungleichung $\sum_{\sigma=1}^{t} m(\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma)) \geqq I(\widetilde{F}) - \varepsilon \cdot (4s+1)$ folgt $\sum_{\sigma=1}^{t} m(V_{\sigma T_\sigma}) \geqq I(\widetilde{F}) - \varepsilon \cdot (4s+1)$. Also ist $\mu_P(F) \geqq I(\widetilde{F})$. Dies zusammen mit (74) ergibt

$$\mu_P(F) = I(\widetilde{F}). \tag{75}$$

5.3. Das erste k-dimensionale Flächenmaß μ'_R im R_n von T. RADÓ[35]). **Definition.** Im Einheitswürfel $\widetilde{F}$ des R_k sei ein System $\widetilde{F}_1, \ldots, \widetilde{F}_t$ endlich vieler, paarweise fremder[37]), zu $\widetilde{F}$ homöomorpher Mengen

---

[35]) Nach T. RADÓ, Über das Flächenmaß rektifizierbarer Flächen. Math. Annalen **100** (1928), S. 444—479. In dieser Arbeit wird die Gleichung $\mu'_R(F) = \mu''_R(F) = I(\widetilde{F})$ für $n = 3$; $k = 2$ bewiesen.

[36]) Die Formulierung bei T. RADÓ[35]) lautet: „Die Fläche wird in endlich viele Flächenstücke zerlegt". Genaueres wird über die Zerlegung nicht gesagt.

[37]) T. RADÓ[35]) verlangt, daß die $F_1, \ldots, F_t$ „nicht übereinander greifen", ohne dies genauer zu definieren. Vielleicht kann man dies auch dahin interpretieren, daß die $F_1, \ldots, F_t$ paarweise keine inneren Punkte gemein haben dürfen (man muß dann allerdings wohl noch verlangen, daß die Durchschnitte $F_{\sigma'} \cdot F_{\sigma''}$ leer oder LEBESGUEsche Nullmengen sind). Unsere Überlegungen in Nr. 5.3 und 5.5 bleiben auch bei dieser Interpretation richtig.

gegeben. Für jede Menge $F_\sigma = \pi(\widetilde{F}_\sigma)$ und jede k-dimensionale Ebene E_σ des R_n sei $\mathfrak{R}(F_{\sigma E_\sigma})$ der Kern der Projektion $F_{\sigma E_\sigma}$ von F_σ in E_σ, d. h. die Menge aller Punkte p von E_σ mit folgender Eigenschaft: Zu p existiert eine positive Zahl $\delta(p)$, so daß p enthalten ist in der Projektion $F'_{\sigma E_\sigma}$ jeder stetigen Fläche $F'_\sigma = \pi'(\widetilde{F}_\sigma)$, für welche der Abstand $\overline{\pi(\mathfrak{y})\,\pi'(\mathfrak{y})} \leqq \delta(p)$ ist für jeden Punkt $\mathfrak{y}$ aus $\widetilde{F}_\sigma$. Dann ist $\mu'_R = \mathrm{Supr.}\left(m(\mathfrak{R}(F_{1E_1})) + \cdots + m(\mathfrak{R}(F_{tE_t}))\right)$ für alle Systeme $\widetilde{F}_1, \ldots, \widetilde{F}_t$ und alle Ebenen $E_1, \ldots, E_t$.

Man beweist die Ungleichung $\mu'_R(F) \leqq I(\widetilde{F})$ genau so wie (74); nur setzt man $m(\mathfrak{R}(F_{\sigma E_\sigma}))$ an Stelle von $m(F_{\sigma E_\sigma})$. Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung wählt man wieder die paarweise fremden Würfel $V_1, \ldots, V_t$ der Nr. 5.1. Aus (70) folgt, daß das Parallelepiped $\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma)$ im Kern $\mathfrak{R}(V_{\sigma T_\sigma})$ der Projektion $V_{\sigma T_\sigma}$ von $V_\sigma = \pi(\widetilde{V}_\sigma)$ in die Tangentialebene T_σ enthalten ist. Hieraus folgt wie in Nr. 5.2 $\mu'_R(F) \geqq I(\widetilde{F})$. Also gilt

$$\mu'_R(F) = I(\widetilde{F}). \tag{76}$$

5.4. Ein k-dimensionales Flächenmaß μ_U im R_n mit uns unbekanntem Ursprung[35]). Definition. Im R_n liege ein festes, rechtwinkliges Koordinatensystem vor; es seien $E^1, \ldots, E^l$ die $l = \binom{k}{n}$ Koordinatenebenen der Dimension k. Es sei $\widetilde{F} = \widetilde{F}_1 + \cdots + \widetilde{F}_t$ wie in Nr. 5.2[36]). Es sei $m_{\sigma\lambda}$ der Lebesguesche Inhalt der Projektion $F_{\sigma E^\lambda}$ von F_σ in E^λ. Dann ist das Maß $\mu_U(F) = \mathrm{Supr.} \sum_{\sigma=1}^{u} \sqrt{m_{\sigma 1}^2 + \cdots + m_{\sigma l}^2}$ für alle Darstellungen $F = \widetilde{F}_1 + \cdots + \widetilde{F}_u$.

Analog wie (74) beweist man jetzt $\mu_U(F) \leqq I(\widetilde{F})$, indem man statt wie in Nr. 5.2 die Ungleichung $m(F_{\sigma E_\sigma}) \leqq \mu_Q(F_\sigma)$ jetzt die Ungleichung $\sqrt{m_{\sigma 1}^2 + \cdots + m_{\sigma l}^2} \leqq \mu_J(F_\sigma)$ benutzt, welche daraus folgt, daß für jede Quaderdarstellung (Nr. 3.7) $\sqrt{m_{\sigma 1}^2 + \cdots + m_{\sigma l}^2} \leqq T_J(F_\sigma)$ ist[24]). Also ist

$$\mu_U(F) \leqq I(\widetilde{F}). \tag{77}$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung bestätigt man zunächst genau wie (69) folgende schärfere Behauptung: Ist d_0 hinreichend klein, so wird die Projektion $(\alpha(\widetilde{W}))_{E^\lambda}$ durch V_{E^λ} mit dem Grade ± 1 überdeckt, falls E^λ auf der $\alpha(\widetilde{W})$ enthaltenden Tangentialebene T nicht senkrecht steht ($\lambda = 1, \ldots, l$). Entsprechend verschärft man (70). Nun wählen wir die Würfel $\widetilde{V}_1, \ldots, \widetilde{V}_u$ wie in Nr. 5.2. Dann folgt aus der verschärften Beziehung (70), daß $(\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma))_{E^\lambda}$ im Kern $\mathfrak{R}(V_{\sigma E^\lambda})$ von $V_{\sigma E^\lambda}$ enthalten ist ($\sigma = 1, \ldots, t$), wenn E^λ zu T_σ nicht senkrecht ist; ist jedoch E^λ zu T_σ senkrecht, so ist $m\left((\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma))_{E^\lambda}\right) = 0$. Mithin gilt $m(\mathfrak{R}(V_{\sigma L^\lambda})) \geqq m\left((\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma))\right)_{E^\lambda} = c(E^\lambda) \cdot m(\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma))$ für jedes $\sigma = 1, \ldots, t$

und jedes $\lambda = 1, \ldots, l$. Also ist $\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{l} \left(m(\mathfrak{R}(V_{\sigma E^\lambda}))\right)^2} \geqq m(\alpha_\sigma(\tilde{W}_\sigma))$ [23].

Hieraus folgt $\mu_U(F) \geqq \sum m(\alpha_\sigma(\tilde{W}_\sigma))$ und hieraus analog wie in Nr. 5.3 jetzt die Ungleichung $\mu_U(F) \geqq I(\tilde{F})$. Dies zusammen mit (77) ergibt

$$\mu_U(F) = I(\tilde{F}). \tag{78}$$

5.5. Das zweite k-dimensionale Flächenmaß μ''_R im R_n von T. Radó[35]). Die Definition lautet genau so wie die für μ_U, nur verwendet man erstens Systeme $\tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_t$ wie in Nr. 5.3[37]), und zweitens die Inhalte $m(\mathfrak{R}(F_{\sigma E^\lambda}))$ der Kerne an Stelle der Inhalte $m(F_{\sigma E^\lambda}) = m_{\sigma\lambda}$.

Wie in Nr. 5.4 die Ungleichung (77), beweist man jetzt die Ungleichung $\mu''(F) \leqq I(\tilde{F})$. Die umgekehrte Ungleichung beweist man genau wie die entsprechende Ungleichung in Nr. 5.4, nur beschränkt man sich dabei auf die Würfel $\tilde{V}_1, \ldots, \tilde{V}_t$ der Nr. 5.1. Also gilt

$$\mu''_R(F) = I(\tilde{F}). \tag{79}$$

(Eingegangen am 5. Juli 1942.)

Über die „Polynom-Kerne" der linearen Integralgleichungen.

Von

Stefan Fenyö in Budapest, Ungarn.

Herr T. Satô [1]) hat in einer Arbeit das Eigenwertproblem der Kerne von der Form

$$Q(x, y) = K_n(x, y) + a_1 K_{n-1}(x, y) + \cdots + a_{n-1} K(x, y)$$

behandelt. Dabei sind die mit $K_n(x, y)$ iterierten Kerne von $K(x, y)$ im Bereiche

$$D: \begin{bmatrix} 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq 1 \end{bmatrix}.$$

Im folgenden wollen wir den lösenden Kern von Q untersuchen. Die befolgte Methode ist geeignet, das Ergebnis von Herrn Satô in äußerst einfacher Weise abzuleiten. Deshalb wollen wir uns im ersten Teil unserer Arbeit mit den Eigenfunktionen von Q beschäftigen und im zweiten eine Formel für den lösenden Kern von Q angeben. Unsere Resultate sind Verallgemeinerungen wohlbekannter Sätze.

Wir wollen für jeden beliebigen stetigen Kern $K(x, y)$ die Funktionaloperation

$$\mathfrak{K}\, u = \int_0^1 K(x, y)\, u(y)\, dy$$

einführen. Entsprechend sei $\mathfrak{K}^n$ der zum Kern $K_n(x, y)$ gehörende Operator.

Falls $N(x, y)$ und $M(x, y)$ zwei beliebige, in D definierte stetige Kerne sind, und die ihnen entsprechenden Operatoren $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M}$, ist gemäß dem Volterraschen Operatorenkalkül [2])

$$(a + b\,\mathfrak{N}) \cdot \mathfrak{M} = a\,\mathfrak{M} + b\,\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{M},$$

a und b sind beliebige Konstanten, und dem Operator $\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{M}$ entspricht der Kern $\int_0^1 N(x, t)\, M(t, y)\, dt$.

---

[1]) T. Satô, Proc. of the Phys. Math. Society of Japan (3) **23** (1941), S. 1.

[2]) V. Volterra, Atti d. Reale Acc. dei Lincei **20** (1911); J. Soula, L'équation intégrale de première espèce à limites fixes et les fonctions permutables à limites fixes. Paris 1936. S. 44.

1. Nun betrachten wir die homogene Integralgleichung

$$\text{(I)} \qquad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 Q(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 0.$$

Sie läßt sich in folgende Form setzen:

$$P(\mathfrak{R}) \cdot \varphi \equiv \left(\mathfrak{R}^n + a_1 \mathfrak{R}^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \mathfrak{R} - \frac{1}{\lambda}\right) \cdot \varphi = 0.$$

Sind $r_1, r_2, \ldots, r_n$ die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x - \frac{1}{\lambda} = 0,$$

so ist unsere Gleichung

$$P(\mathfrak{R}) \cdot \varphi \equiv (\mathfrak{R} - r_1)(\mathfrak{R} - r_2) \ldots (\mathfrak{R} - r_n) \cdot \varphi = 0.$$

Setzt man

$$\varphi_k = (\mathfrak{R} - r_{k+1})(\mathfrak{R} - r_{k+2}) \ldots (\mathfrak{R} - r_n)\, \varphi; \quad \varphi_n \equiv \varphi; \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

so kann die Gleichung in der Gestalt

$$(\mathfrak{R} - r_1) \cdot \varphi_1 = 0$$

geschrieben werden. Ist $\frac{1}{r_1}$ kein Eigenwert von K, so besitzt diese Gleichung die einzige Lösung $\varphi_1 \equiv 0$. Dann ist aber

$$(\mathfrak{R} - r_2) \cdot \varphi_2 = \varphi_1 \equiv 0.$$

Diese Gleichung hat auch nur die triviale Lösung $\varphi_2 \equiv 0$, falls $\frac{1}{r_2}$ kein Eigenwert von K ist. Wird dieses Verfahren fortgesetzt, so ergibt sich, daß die Gleichung (I) nur die triviale Lösung $\varphi \equiv 0$ besitzt, wenn keine der Zahlen $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \ldots, \frac{1}{r_n}$ Eigenwert von $K(x, y)$ ist. λ kann also nur dann ein Eigenwert von Q sein, wenn mindestens eine der Zahlen $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \ldots, \frac{1}{r_n}$ ein Eigenwert von K ist. Dann aber ist λ auch wirklich ein Eigenwert von $Q(x, y)$. Denn sei z. B. $\frac{1}{r_1}$ ein Eigenwert von K und $\omega(x)$ eine beliebige zu $\frac{1}{r_1}$ gehörige Eigenfunktion, so ist

$$\int_0^1 Q(x, y)\, \omega(y)\, dy - \frac{1}{\lambda}\, \omega(x) = \left(\mathfrak{R}^n + a_1 \mathfrak{R}^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \mathfrak{R} - \frac{1}{\lambda}\right) \cdot \omega$$

$$= \left(r_1^n + a_1 r_1^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r_1 - \frac{1}{\lambda}\right) \cdot \omega(x) = 0.$$

Es besteht also der

Satz 1[1]. *Ist λ ein Eigenwert von Q, so ist wenigstens eine der Lösungen der Gleichung*

$$\text{(1)} \qquad P\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

ein Eigenwert von K, und umgekehrt: besitzt K einen Eigenwert, der die Gleichung (1) *befriedigt, so ist λ ein Eigenwert von Q.*

Die zu $\frac{1}{\tau}$ gehörigen Eigenfunktionen von K sind auch Eigenfunktionen von Q. Aber damit sind die zu λ gehörigen Eigenfunktionen von Q noch nicht erschöpft. Zu ihrem allgemeinen Ausdruck gelangt man wie folgt:

Unter den Lösungen von (1) seien nur $\frac{1}{\tau_{\nu+1}}, \frac{1}{\tau_{\nu+2}}, \ldots, \frac{1}{\tau_m}$ Eigenwerte von K, so daß $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv \varphi_3 \equiv \cdots \equiv \varphi_\nu \equiv 0$ ist. Es gibt aber eine nicht identisch verschwindende Funktion $\varphi_{\nu+1}$, für welche

$$(\mathfrak{K} - \tau_{\nu+1}) \cdot \varphi_{\nu+1} = 0$$

gilt. Dann ist aber

$$(\mathfrak{K} - \tau_{\nu+2}) \cdot \varphi_{\nu+2} = \varphi_{\nu+1}. \tag{2}$$

Da $\tau_{\nu+1} \neq \tau_{\nu+2}$[3]) angenommen werden kann, ist diese inhomogene Integralgleichung lösbar. Denn die zu $\frac{1}{\tau_{\nu+2}}$ gehörenden Eigenfunktionen des Operators $\overline{\mathfrak{K}}$[4]) sind zu $\varphi_{\nu+1}$ orthogonal.

Wir bezeichnen mit $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_m; \tau)$ den m-ten Fredholmschen Minor von K[5]). Der Rang[5]) von $\frac{1}{\tau_{\nu+l}}$ sei $\varrho_{\nu+l}$.

Wir betrachten den Operator $\mathfrak{H}_{\nu+l}$, dessen Kern

$$H\left(x, y; \frac{1}{\tau_{\nu+l}}\right) = \frac{\Delta\left(x, x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho_{\nu+l}}; y, y_1, y_2, \ldots, y_{\varrho_{\nu+l}}; \frac{1}{\tau_{\nu+l}}\right)}{\Delta\left(x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho_{\nu+l}}; y_1, y_2, \cdots y_{\varrho_{\nu+l}}; \frac{1}{\tau_{\nu+l}}\right)}$$

ist; $x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho_{\nu+l}}; y_1, \ldots, y_{\varrho_{\nu+l}}$ gehören dem Intervall $[0,1]$ an. Dann ist, wie bekannt, die Lösung der inhomogenen Gleichung (2)

$$\varphi_{\nu+2} = -\frac{1}{\tau_{\nu+2}}\left(1 + \frac{1}{\tau_{\nu+2}}\mathfrak{H}_{\nu+2}\right) \cdot \varphi_{\nu+1}.$$

$\varphi_{\nu+2}$ kann nicht identisch verschwinden, falls $\varphi_{\nu+1} \neq 0$ ist. Der folgende Schritt unseres Verfahrens liefert die Gleichung

$$(\mathfrak{K} - \tau_{\nu+3}) \cdot \varphi_{\nu+3} = \varphi_{\nu+2}. \tag{3}$$

---

[3]) Wenn nämlich $\tau_{\nu+1} = \tau_{\nu+2}$ wäre, so wählen wir $\varphi_{\nu+1} \equiv 0$ und beginnen den Prozeß bei $\varphi_{\nu+2}$.

[4]) $\overline{\mathfrak{K}}$ ist der zum Kern $K(y, x)$ gehörige Operator.

[5]) G. Vivanti - F. Schwank, Elemente der Theorie der linearen Integralgleichungen, S. 107. Hannover 1929.

Vorausgesetzt, daß $r_{\nu+3} \neq r_{\nu+2}$, ist *jede* zu $\frac{1}{r_{\nu+3}}$ gehörende Eigenfunktion $\psi_{\nu+3}$ von $\bar{\mathfrak{K}}$ orthogonal zu $\varphi_{\nu+2}$. Dies beweisen wir wie folgt: Wenn wir beide Seiten der Gleichung (2) mit $\psi_{\nu+3}$ multiplizieren und integrieren, so wird

$$\int_0^1\int_0^1 \psi_{\nu+3}(x)\, K(x,y)\, \varphi_{\nu+2}(y)\, dx\, dy - r_{\nu+2} \cdot \int_0^1 \psi_{\nu+3}(x)\, \varphi_{\nu+2}(x)\, dx = 0.$$

Gemäß der Definition von $\psi_{\nu+3}$ ist

$$(r_{\nu+3} - r_{\nu+2}) \cdot \int_0^1 \psi_{\nu+3}(x)\, \varphi_{\nu+2}(x)\, dx = 0.$$

Daraus folgt

$$\int_0^1 \psi_{\nu+3}(x)\, \varphi_{\nu+2}(x)\, dx = 0.$$

Die Gleichung (3) läßt sich also lösen, und zwar erhält man

$$\begin{aligned}\varphi_{\nu+3} &= -\frac{1}{r_{\nu+3}}\left(1+\frac{1}{r_{\nu+3}}\mathfrak{H}_{\nu+3}\right)\varphi_{\nu+2} \\ &= \frac{1}{r_{\nu+2}\cdot r_{\nu+3}}\left(1+\frac{1}{r_{\nu+2}}\mathfrak{H}_{\nu+2}+\frac{1}{r_{\nu+3}}\mathfrak{H}_{\nu+3}+\frac{1}{r_{\nu+2}\cdot r_{\nu+3}}\mathfrak{H}_{\nu+2}\cdot\mathfrak{H}_{\nu+3}\right)\cdot\varphi_{\nu+1}.\end{aligned}$$

Nach $n-\nu$ Schritten gelangen wir zur Lösung

$$\begin{aligned}\varphi = \frac{(-1)^{n-\nu+1}}{r_{\nu+2}\cdot r_{\nu+3}\cdots r_n}\Big[&1+\Big(\frac{1}{r_{\nu+2}}\mathfrak{H}_{\nu+2}+\frac{1}{r_{\nu+3}}\mathfrak{H}_{\nu+3}+\cdots+\frac{1}{r_n}\mathfrak{H}_n\Big)+ \\ &+\Big(\frac{1}{r_{\nu+2}\cdot r_{\nu+3}}\mathfrak{H}_{\nu+2}\cdot\mathfrak{H}_{\nu+3}+\frac{1}{r_{\nu+2}\,r_{\nu+4}}\mathfrak{H}_{\nu+2}\cdot\mathfrak{H}_{\nu+4}+\cdots+ \\ &+\frac{1}{r_{n-1}\,r_n}\mathfrak{H}_{n-1}\cdot\mathfrak{H}_n\Big)+\cdots+\frac{1}{r_{\nu+2}\cdot r_{\nu+3}\cdots r_n}\mathfrak{H}_{\nu+2}\cdot\mathfrak{H}_{\nu+3}\cdots\mathfrak{H}_n\Big]\cdot\varphi_{\nu+1}.\end{aligned}$$

Da φ eine Eigenfunktion von Q ist, kann man den konstanten Faktor weglassen. Ist nun im allgemeinen Φ_p eine zu $\frac{1}{r_{\nu+p}}$ gehörige Eigenfunktion von K, so ist

$$\begin{aligned}(4)\quad \varphi = \Big[1+&\sum_l{}'^{1,n}\frac{1}{r_{\nu+l}}\mathfrak{H}_{\nu+l}+\sum_{l<s}{}'^{1,n}\frac{1}{r_{\nu+l}\cdot r_{\nu+s}}\mathfrak{H}_{\nu+l}\cdot\mathfrak{H}_{\nu+s}+\cdots+ \\ &+\frac{1}{r_{\nu+1}\cdots r_{\nu+p-1}\,r_{\nu+p+1}\cdots r_n}\mathfrak{H}_{\nu+1}\cdots\mathfrak{H}_{\nu+p-1}\cdot\mathfrak{H}_{\nu+p+1}\cdots\mathfrak{H}_n\Big]\Phi_p\end{aligned}$$

eine Eigenfunktion von Q. Mit Σ' bezeichnen wir die Summierung über alle Zeiger mit Ausnahme von p.

Wenn die Gleichung (1) mehrfache Wurzeln besitzt, welche Eigenwerte von K sind, so bleibt die Formel (4) gültig, jedoch bezeichnen $r_{\nu+1}, \ldots, r_n$ die verschiedenen Wurzeln von $P(x)$, deren reziproke Eigenwerte von K sind.

Aus der Formel (4) folgt, daß, wenn K nur einen die Gleichung (1) befriedigenden Eigenwert besitzt, die Gleichung (I) keine anderen nichttrivialen Lösungen hat als die Funktionen Φ_p.

Aus Satz 1 folgt die wohlbekannte Tatsache, daß, falls μ^n ein Eigenwert von K_n ist, wenigstens eine der Zahlen $\varepsilon^l \cdot \mu$ ($l = 0, 1, 2, \ldots n$; $\varepsilon^n = 1$) ein Eigenwert von K ist.

Sind die Kerne $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(n)}$ vertauschbar[6]) und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ beliebige Konstanten, so betrachten wir die Integralgleichung

$$\text{(II)} \qquad \varphi(x) - \int_0^1 \Big[\sum_r^{1,n} \lambda_r K^{(r)}(x,y) - \sum_{r<s}^{1,n} \lambda_r \lambda_s K^{(r,s)}(x,y) + \sum_{r<s<t}^{1,n} \lambda_r \lambda_s \lambda_t K^{(r,s,t)}(x,y) \mp \cdots + (-1)^{n-1} \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n K^{(1,2,\ldots n)}(x,y) \Big] \varphi(y)\, dy = 0,$$

wo

$$K^{(i_1, i_2, \ldots, i_p)}(x,y) = \int_0^1 \cdots \int_{(p-1)}^1 K^{(i_1)}(x\, t_1) K^{(i_2)}(t_1\, t_2) \ldots K^{(i_p)}(t_{p-1}, y)\, dt_1 dt_2 \ldots dt_{p-1}$$

ist.

Satz 2. *Die Gleichung* (II) *besitzt nur in dem Falle eine nicht triviale Lösung, wenn mindestens ein λ_p ein Eigenwert von $K^{(p)}$ ist.*

Den Kernen $K^{(p)}(x,y)$ mögen die Operatoren $\mathfrak{K}_p$ ($p = 1, 2, \ldots, n$) entsprechen. Dann setzen wir die Gleichung (II) in die Form

$$(\lambda_1 \mathfrak{K}_1 - 1)(\lambda_2 \mathfrak{K}_2 - 1) \ldots (\lambda_n \mathfrak{K}_n - 1) \cdot \varphi = 0.$$

Man kann nun den Satz 2 ebenso beweisen wie den Satz 1.

Im Falle $n = 2$ und $\lambda_1 = \lambda_2$ ergibt unser Satz den Satz des Herrn Satô[7]).

Wählen wir die Kerne $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(n)}$ paarweise orthogonal, so folgt aus Satz 2 der bekannte

Satz 3[8]). *Sind die Kerne $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(n)}$ paarweise orthogonal, so erhält man die Eigenwerte von*

$$K = K^{(1)} + K^{(2)} + \cdots + K^{(n)},$$

indem man die Eigenwerte von $K^{(1)}, \ldots, K^{(n)}$ zusammennimmt.

Betrachten wir den Fall $n = 2$ und sei λ_1 ein Eigenwert von $K^{(1)}$, φ eine zu λ_1 gehörende beliebige Eigenfunktion, dann folgt aus Satz 3:

$$\varphi = \varphi + \lambda \mathfrak{K}_2 \varphi;$$

nun ist $\mathfrak{K}_2 \varphi \equiv 0$.

---

[6]) Soula, l. c., S. 44.

[7]) T. Satô, The Tôhoku Math. J. **38**, II (1933) S. 173.

[8]) Vivanti-Schwank, l. c., S. 130.

Corollar: Wenn $K^{(1)}$ und $K^{(2)}$ orthogonale Kerne sind, dann ist jede Eigenfunktion von $K^{(1)}$ zu $K^{(2)}$ orthogonal und umgekehrt.

2. Betrachten wir die der homogenen Gleichung (I) entsprechende inhomogene Gleichung

$$\text{(III)} \quad \int_0^1 [K_n(x,y) + a_1 K_{n-1}(x,y) + \cdots + a_{n-1} K(x,y)] \cdot \varphi(y)\, dy + \\ + a_n \varphi(x) = f(x) \quad (f(x) \not\equiv 0).$$

Sie läßt sich in die Form setzen

$$(\mathfrak{K} - r_1)(\mathfrak{K} - r_2) \ldots (\mathfrak{K} - r_n)\, \varphi = f.$$

Diese Gleichung ist im allgemeinen nur dann lösbar, wenn $-\frac{1}{a_n}$ kein Eigenwert von Q ist; das erfolgt nach Satz 1 nur dann, wenn K unter den Zahlen $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \ldots, \frac{1}{r_n}$ keinen Eigenwert hat. Der lösende Kern von $K(x,y)$ für den Parameterwert $\frac{1}{r_i}$ sei $R\left(x,y;\frac{1}{r_i}\right)$; der entsprechende Operator $\mathfrak{R}_i$. Dann ist

$$(\mathfrak{K} - r_1)\, \varphi_1 = f;$$

daraus folgt

$$\varphi_1 = -\frac{1}{r_1}(\mathfrak{R}_1 + r_1) \cdot f.$$

Also wird

$$\varphi = \frac{(-1)^n}{r_1^n r_2^n \ldots r_n^n} (\mathfrak{R}_1 + r_1)(\mathfrak{R}_2 + r_2) \ldots (\mathfrak{R}_n + r_n) \cdot f \\ = \frac{(-1)^n}{a_n^2} (\mathfrak{R}_1 + r_1)(\mathfrak{R}_2 + r_2) \ldots (\mathfrak{R}_n + r_n) \cdot f.$$

Bezeichnet $S(x,y;\lambda)$ (der ihm entsprechende Operator sei $\mathfrak{S}$) den lösenden Kern $Q - s$, so bekommt man

$$\varphi = -\frac{1}{a_n^2}(\mathfrak{S} - a_n) \cdot f.$$

Das ergibt

$$-\frac{1}{a_n^2}(\mathfrak{S} - a_n) = \frac{(-1)^n}{a_n^2} (\mathfrak{R}_1 + r_1)(\mathfrak{R}_2 + r_2) \ldots (\mathfrak{R}_n + r_n),$$

nun ist

$$\mathfrak{S} = (-1)^n (\mathfrak{R}_1 + r_1)(\mathfrak{R}_2 + r_2) \ldots (\mathfrak{R}_n + r_n).$$

Falls alle Zahlen $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \ldots, \frac{1}{r_n}$ verschieden sind, betrachtet man die wohlbekannte Identität

$$\int_0^1 R\left(x,t;\frac{1}{r_\nu}\right) R\left(t,y;\frac{1}{r_\mu}\right) dt = \frac{R\left(x,y;\frac{1}{r_\nu}\right) - R\left(x,y;\frac{1}{r_\mu}\right)}{\frac{1}{r_\nu} - \frac{1}{r_\mu}} = \frac{R_\nu - R_\mu}{\sigma_\nu - \sigma_\mu} \quad (\nu \neq \mu)$$

ganz allgemein

$$\int_0^1 \dots \int_{(n-1)}^1 R(x,t_1;\sigma_1)\,R(t_1,t_2;\sigma_2)\dots R(t_{n-1},y;\sigma_n)\,dt_1\,dt_2\dots dt_{n-1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_1^{n-2} & \sigma_2^{n-2} & \dots & \sigma_n^{n-2} \\ R_1 & R_2 & \dots & R_n \end{vmatrix}}{V(\sigma_1\sigma_2,\dots,\sigma_n)}.$$

$V(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)$ ist die VANDERMONDEsche Determinante der Größen $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n$.

Nun ergibt sich für den lösenden Kern von Q

$$S\left(x,y;-\frac{1}{a_n}\right) = -\Bigg[\sigma_1R_1+\sigma_2R_2+\dots+\sigma_nR_n+\sigma_1\sigma_2\frac{\begin{vmatrix}1&1\\R_1&R_2\end{vmatrix}}{V(\sigma_1,\sigma_2)}+$$

$$+\dots+\sigma_{n-1}\sigma_n\frac{\begin{vmatrix}1&1\\R_{n-1}&R_n\end{vmatrix}}{V(\sigma_{n-1}\,\sigma_n)}+$$

$$+\dots+\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_1^{n-2} & \sigma_2^{n-2} & \dots & \sigma_n^{n-2} \\ R_1 & R_2 & \dots & R_n \end{vmatrix}}{V(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)}\Bigg]a_n.$$

In dieser Formel ist der Koeffizient von R_1

$$c_1 = -\sigma_1 a_n\Bigg[1-\sum_r^{2,n}\frac{\sigma_r}{\sigma_r-\sigma_1}+\sum_{r<s}^{2,n}\frac{\sigma_r}{\sigma_r-\sigma_1}\cdot\frac{\sigma_s}{\sigma_s-\sigma_1}\mp\dots+$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1}\cdot\frac{\sigma_3}{\sigma_3-\sigma_1}\cdots\frac{\sigma_n}{\sigma_n-\sigma_1}\Bigg]$$

$$=\sigma_1\sigma_n\prod_{r=2}^{n}\left(1-\frac{\sigma_r}{\sigma_r-\sigma_1}\right)=(-1)^n\sigma_1^n a_n\prod_{r=2}^{n}\frac{1}{\sigma_r-\sigma_1}.$$

Nun ist allgemein

$$c_p=(-1)^n\sigma_p\cdot a_n\prod_{r=1}^{n}{}'\frac{1}{\sigma_r-\sigma_p}\qquad(p=1,2\dots n).$$

Dabei bezeichnen wir mit Π' die Multiplikation über alle Zeiger mit Ausnahme von p.

Satz 4. *Der lösende Kern von Q läßt sich durch den lösenden Kern von $K(x,y)$ folgendermaßen ausdrücken:*

$$S\left(x,y;-\frac{1}{a_n}\right)=(-1)^n a_n\cdot\sum_{p=1}^{n}\sigma_p^n\prod_{r=1}^{n}{}'\frac{R(x,y;\sigma_p)}{\sigma_r-\sigma_p}.$$

Die Integralgleichung

$$\varphi(x)-\int_0^1 K_n(x,y)\,\varphi(y)\,dy=f(x)$$

ist ein besonderer Fall der Gleichung (III). Jetzt ist $a_n = -1; \sigma_p = \varepsilon^{n-p+1}$ $(p = 1, 2, \ldots, n;\ \varepsilon^n = 1)$ und

$$c_p = (-1)^{n+1} \cdot \varepsilon^{n(n-p+1)} \prod_{r=1}^{n}{}' \frac{1}{\varepsilon^{n-r+1} - \varepsilon^{n-p+1}}$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot \varepsilon^{p-1} \cdot \prod_{r=1}^{n}{}' \frac{1}{\varepsilon^{p-r} - 1} = (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} \frac{\varepsilon^{p-1}}{n} = \frac{\varepsilon^{p-1}}{n}\ ^{9}).$$

Corollar:

$$K^{(n)}(x, y; 1) = \frac{1}{n} [K(x, y; 1) + \varepsilon K(x, y; \varepsilon) + \cdots + \varepsilon^{n-1} K(x, y; \varepsilon^{n-1})].$$

Dabei ist $K^{(n)}$ die Resolvente von K_n. Das ist ein klassisches, schon von Fredholm herrührendes Resultat [10]).

Mit der bisher befolgten Methode kann man noch ein anderes bekanntes Ergebnis verallgemeinern. Zu diesem Zwecke betrachten wir die der Gleichung (II) entsprechende inhomogene Gleichung

$$\text{(IV)} \qquad \varphi(x) - \int_0^1 \Big[\sum_{r}^{1,n} \lambda_r K^{(r)}(x, y) - \sum_{r<s}^{1,n} \lambda_r \lambda_s K^{(r,s)}(x, y) \pm$$

$$\pm \cdots + (-1)^{n-1} \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n K^{(1,2,\ldots n)}(x, y) \Big] \varphi(y)\, dy = f(x) \quad (f(x) \not\equiv 0).$$

Aus der Zerlegung

$$(\lambda_1 \mathfrak{K}_1 - 1)(\lambda_2 \mathfrak{K}_2 - 1) \ldots (\lambda_n \mathfrak{K}_n - 1) \cdot \varphi = f$$

folgt, daß diese Gleichung im allgemeinen nur dann eine Lösung besitzt, falls λ_p $(p = 1, 2, \ldots, n)$ kein Eigenwert von $K^{(p)}$ ist.

Die Lösung erhalten wir in der folgenden Weise:

Aus der Gleichung

$$(\lambda_1 \mathfrak{K}_1 - 1)\, \varphi_1 = f$$

folgt

$$\varphi_1 = -(\lambda_1 \mathfrak{K}_1 + 1) \cdot f;$$

dabei ist $\mathfrak{K}_1$ der Operator des lösenden Kernes von $K^{(1)}$ an der Parameterstelle $\lambda = \lambda_1$.

---

[9]) Der Ausdruck $(\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 - 1) \ldots (\varepsilon^{n-1} - 1)$ ist der Wert des Polynoms

$$\pi(x) = \prod (\varepsilon^r - x) = (-1)^{n-1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = (-1)^{n-1} (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1)$$

an der Stelle $x = 1$. Nun ist aber $\pi(1) = (-1)^{n-1} \cdot n$.

[10]) Implizite schon bei Fredholm, C. R. Paris **134**, S. 156 und Acta Math. **27**. Für $n = 2$ bei D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, S. 70. Leipzig 1912. Voller Beweis bei J. Plemelj, Monatshefte f. Math. **15** (1904), S. 125 und E. Goursat, Toulouse Ann. (2) **10** (1908), S. 15.

Nun ist die Lösung von (IV)

$$\varphi = (-1)^n (\lambda_1 \mathfrak{R}_1 + 1)(\lambda_2 \mathfrak{R}_2 + 1) \dots (\lambda_n \mathfrak{R}_n + 1) \cdot f.$$

Wir benutzen dieses Ergebnis zur Umkehrung der Gleichung (4). Dazu bemerken wir, daß die Lösung der Gleichung

$$\varphi_{\nu+2} = -\frac{1}{r_{\nu+2}}\left(1 + \frac{1}{r_{\nu+2}} \mathfrak{H}_{\nu+2}\right) \cdot \varphi_{\nu+1}$$

die folgende ist:

$$\varphi_{\nu+1} = (\mathfrak{R} - r_{\nu+2}) \cdot \varphi_{\nu+2}.$$

Also kann man den Operator $\mathfrak{R}$ als den lösenden Operator von $\mathfrak{H}_{\nu+2}$ (allgemein von $\mathfrak{H}_{\nu+l}$) betrachten. Nun ist die Umkehrung der Formel (4):

$$\Phi_1 = \left(\frac{1}{r_{\nu+2}} \mathfrak{R} - 1\right)\left(\frac{1}{r_{\nu+3}} \mathfrak{R} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{r_n} \mathfrak{R} - 1\right) \cdot \varphi.$$

Satz 5. *Ist φ eine beliebige zu λ gehörige Eigenfunktion von Q, so ist*

$$\Phi = \varphi(x) + p_1 \int_0^1 K(x, y)\, \varphi(y)\, dy + p_2 \int_0^1 K_2(x, y)\, \varphi(y)\, dy + \dots + p_{n-\nu-2} \int_0^1 K_{n-\nu-2}(x, y)\, \varphi(y)\, dy$$

eine Eigenfunktion von K, wobei

$$p_1 = -\sum_i{}' \frac{1}{r_{\nu+i}}; \quad p_2 = +\sum_{i<k}^{1, n-\nu} \frac{1}{r_{\nu+i} \cdot r_{\nu+k}}; \quad \dots;$$

$$p_{n-\nu-2} = \frac{(-1)^{n-\nu-1}}{r_{\nu+1} r_{\nu+2} \dots r_{\nu+q-1} r_{\nu+q+1} \dots r_n}$$

ist. Sie gehört zum Eigenwert $\frac{1}{r_{\nu+q}}$ [11]).

Für den Kern K_n wurde der Satz von Goursat [12]) bewiesen.

---

[11]) Σ' bezeichnet die Addierung über alle Zeiger mit Ausnahme von q.

[12]) Goursat, Cours d'Analyse III, S. 399

(Eingegangen am 8. Dezember 1941.)

Das Lucassche Ehepaarproblem.

Von

Waldemar Schöbe in Stuttgart, z. Zt. im Felde.

Ein auch in zusammenfassenden Werken mehrfach behandeltes, aber noch nicht erledigtes kombinatorisches Problem ist die folgende Aufgabe von Lucas[1]): Auf wieviele Arten können um einen Tisch mit $2n$ Stühlen n Ehepaare derart Platz nehmen, daß jeder Mann zwischen zwei Frauen, aber kein Mann neben seiner Ehefrau sitzt?

Mit A_n soll die Anzahl der Sitzordnungen bezeichnet werden, die die Männer entsprechend der Bedingung des Problems einnehmen können, nachdem zuvor die Frauen, jeden zweiten Stuhl freilassend, irgendwie Platz genommen haben. Um für A_n eine Rekursionsformel abzuleiten, werden noch zwei andere Anzahlfunktionen betrachtet: die Anzahl B_n der Sitzordnungen der Männer derart, daß ein bestimmter Mann auf einer bestimmten Seite neben seiner Ehefrau, die übrigen Männer aber nicht neben ihren Ehefrauen sitzen, und die Anzahl C_n all der Sitzordnungen, bei denen ein bestimmter Mann auf einer bestimmten Seite neben seiner Ehefrau, irgendein weiterer Mann auf irgendeiner Seite neben seiner Ehefrau und alle übrigen Männer nicht neben ihren Ehefrauen sitzen. Dann gelten die Rekursionsformeln

$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned} A_{n+1} &= (n-2)\,A_n + (3n-4)\,B_n + C_n,\\ B_{n+1} &= \quad A_n + \quad B_n,\\ C_{n+1} &= \quad (2n-1)\,B_n + C_n. \end{aligned}$$

Hiernach muß jede Anzahlfunktion einer linearen homogenen Rekursionsformel 3. Ordnung genügen. Für B_n wird diese besonders einfach:

$$\text{(2)}\qquad B_{n+2} = n\,B_{n+1} + n\,B_n + B_{n-1}.$$

Die Anfangswerte sind $A_2 = 0$, $B_2 = 0$, $C_2 = 1$ für (1) bzw. $B_2 = 0$, $B_3 = 0$, $B_4 = 1$ für (2). Es wird dann $B_5 = 3$. Einer darüber hinaus noch bekannten Rekursionsformel 2. Ordnung für A_n begegnen wir weiter unten. Ein geschlossener Ausdruck im üblichen Sinne für die Folgen A_n, B_n, C_n ist jedoch bisher nicht angegeben worden. Das soll hier geschehen.

---

[1]) É. Lucas, Théorie des nombres, Paris 1891, Bd. I, Nr. 123, S. 215 u. 491–495 (Note III). – Vgl. auch W. Ahrens, Mathematische Unterhaltungen und Spiele, 2. Aufl., Leipzig 1918, Bd. II, S. 73–79, und H. Dörrie, Triumph der Mathematik, 2. Aufl., Breslau 1940, S. 25–32.

Die Fragestellung, die zu den A_n führt, ist unverkennbar verwandt mit dem altbekannten Problem, auf wieviele Arten n Briefe in n Umschläge so gesteckt werden können, daß kein Brief in den richtigen Umschlag gelangt, oder, in der Sprechweise unseres Problems: auf wieviele Arten die Männer so Platz nehmen können, daß keiner *links* neben seiner Ehefrau sitzt. Für diese Anzahlfunktion h_n kann die Rekursionsformel

$$h_{n+1} = n h_n + n h_{n-1} \tag{3}$$

hergeleitet werden, die sich durch den Ansatz $h_n - n h_{n-1} = g_n$ sofort auf $g_{n+1} + g_n = 0$ reduziert. Die Lösung ist bekanntlich

$$h_n = n! \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{\nu!}, \tag{4}$$

und für unbegrenzt wachsendes n strebt $\frac{h_n}{n!} \to e^{-1}$. Hiernach möchte man aus heuristischen Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen für das Ehepaarproblem $\frac{A_n}{n!} \to e^{-2}$ vermuten, und das werden wir bestätigen.

Der Ähnlichkeit von (2) mit (3) Rechnung tragend, gehen wir mit dem Ansatz $B_{n+1} - n B_n = b_{n-2}$ in (2) ein und erhalten zunächst

$$b_{n-1} + b_{n-2} = B_{n-1} \tag{5}$$

und dann weiter

$$b_{n-2} = B_{n+1} - n B_n = (b_{n+1} + b_n) - n (b_n + b_{n-1})$$

oder

$$(b_{n+1} - n b_n - b_{n-1}) + (b_n - (n-1) b_{n-1} - b_{n-2}) = 0.$$

Also ist $b_{n+1} - n b_n - b_{n-1} = K \cdot (-1)^n$, und aus den Anfangswerten $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = -1$ ergibt sich $K = 2$. Damit ist gewonnen

$$b_{n+1} = n b_n + b_{n-1} + 2 \cdot (-1)^n. \tag{6}$$

Mittels dieser Rekursionsformel kann man die Folge der b_n auch nach rückwärts fortsetzen. Es wird $b_{-1} = -1$. Aus der Gleichung (6), gebildet für n und für $-n$, folgt durch Subtraktion für $t_n = b_n + b_{-n}$ die Rekursionsformel $t_{n+1} = n t_n + t_{n-1}$. Da die Anfangswerte $t_0 = 2 b_0 = 0$ und $t_1 = b_1 + b_{-1} = 0$ sind, ist immer $t_n = 0$, also

$$b_{-n} = -b_n, \tag{7}$$

eine Eigenschaft, die übrigens nur bei den hier in Betracht kommenden Anfangswerten mit (6) verträglich ist und im folgenden auch die explizite Benutzung der Anfangswerte völlig ersetzt.

Mit Hilfe der b_n lassen sich die A_n, B_n, C_n einfach ausdrücken:

$$\begin{aligned} A_n &= b_{n+1} - b_{n-1}, \\ B_n &= b_n + b_{n-1}, \\ C_n &= 2\,b_n + 3\,b_{n-1} + 2\,b_{n-2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Die zweite dieser Gleichungen hatten wir schon in (5), die beiden anderen folgen daraus nach (1) und (6). Führt man durch

$$A_n = n b_n + 2 \cdot (-1)^n \tag{9}$$

A_n statt b_n in (6) ein, so ergibt sich die bereits erwähnte, hier aber nicht gebrauchte Rekursionsformel von LAISANT

$$(n-1)\,A_{n+1} = (n^2-1)\,A_n + (n+1)\,A_{n-1} + 4 \cdot (-1)^n,$$

der sich ähnliche für B_n und C_n an die Seite stellen lassen.

Um nun (6) mit (7) aufzulösen, führen wir die Hilfsgrößen

$$c_{k,n} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{b_{k-\nu}}{\nu!}$$

ein. Es wird

$$c_{k+1,n} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{b_{k+1-\nu}}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(k-\nu)\,b_{k-\nu} + b_{k-\nu-1} + 2\cdot(-1)^{k-\nu}}{\nu!}$$

$$= \sum_{\varrho=0}^{n} \left(\frac{k-\varrho}{\varrho!} + \frac{1}{(\varrho-1)!}\right) b_{k-\varrho} + \frac{b_{k-n-1}}{n!} + 2\cdot(-1)^k \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{\nu!}.$$

(wobei hier, ebenso wie einige Zeilen später, für $\varrho = 0$ $\frac{1}{(\varrho-1)!} = 0$ zu setzen ist)

$$= k\,c_{k,n} + \frac{b_{k-n-1}}{n!} + 2\cdot(-1)^k \frac{h_n}{n!},$$

also

$$\frac{c_{k+1,n}}{k!} - \frac{c_{k,n}}{(k-1)!} = \frac{b_{k-n-1}}{n!\,k!} + 2\cdot\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{h_n}{n!}.$$

Durch Summation über k von 0 bis m folgt unter Berücksichtigung von (7)

$$\frac{c_{m+1,n}}{m!} + \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{m} \frac{b_{n+1-k}}{k!} = 2\frac{h_n}{n!}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{k!}$$

oder

$$\frac{c_{m+1,n}}{m!} + \frac{c_{n+1,m}}{n!} = 2\frac{h_m}{m!}\frac{h_n}{n!}$$

und für $m = n$:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{b_{n+1-\nu}}{\nu!} = c_{n+1,n} = \frac{h_n^2}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ersetzt man für den Augenblick b_n durch $\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}$ und ν durch $n-\mu$, so läßt sich das Ergebnis in die Form setzen

$$\sum_{\mu=0}^{n}\binom{n}{\mu}a_\mu = h_n^2 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

so daß die a_μ die Anfänge der Differenzenfolgen zur Folge h_n^2 darstellen. Durch Umkehrung folgt

$$a_n = n!\, b_{n+1} = \sum_{\mu=0}^{n}(-1)^\mu\binom{n}{\mu}h_{n-\mu}^2,$$

so daß nun mittels (8) die geschlossene Darstellung der A_n, B_n, C_n geleistet ist. Es wird $A_n = 2\cdot(-1)^n + nb_n = 2\cdot(-1)^n + \frac{n}{(n-1)!}a_{n-1}$, also mit $\nu = \mu + 1$

$$A_n = 2\cdot(-1)^n + n\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\,\frac{h_{n-\nu}^2}{(n-\nu)!}. \tag{10}$$

Zum Beweis der Grenzbeziehung

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{n!} = e^{-2} \tag{11}$$

schreibt man

$$\frac{A_n}{n!} = 2\cdot\frac{(-1)^n}{n!} + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\binom{n-1}{\nu-1}}\left(\frac{h_{n-\nu}}{(n-\nu)!\,(\nu-1)!}\right)^2,$$

wobei $\left|\frac{h_{n-\nu}}{(n-\nu)!}\right|$ stets $\leqq 1$ ist, und hat

$$\left|\frac{A_n}{n!} - \left(\frac{h_{n-1}}{(n-1)!}\right)^2\right| \leqq \frac{2}{n!} + \sum_{\nu=2}^{n-1}\frac{1}{\binom{n-1}{\nu-1}} + \frac{1}{(n-1)!^2} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

weil die Randglieder der Summe Σ die Größenordnung $\frac{1}{n}$, die inneren höchstens die Größenordnung $\frac{1}{n^2}$ haben.

(Eingegangen am 20. November 1942.)

Über gewisse trigonometrische Integrale. I.

Von

Hans Hornich in Wien.

Im folgenden sollen gewisse Integrale von einfacher Bauart näher untersucht werden, die nicht nur an sich von Interesse sind, sondern auch vielfache Anwendungen gestatten. Der Zugang zu diesen Integralen gestaltet sich durch Rekursion, ausgehend vom DIRICHLETschen Diskontinuitätsfaktor, so einfach, daß schon dadurch eine Reihe von Eigenschaften dieser Integrale zu erkennen sind.

Sei $\{a_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ eine Folge positiver Zahlen. Wir definieren dann die folgenden Funktionen:

$$\Phi_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < \frac{a_1}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{a_1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{für } |t| = \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{1a}$$

und durch Rekursion für alle natürlichen k:

$$\Phi_{k+1}(t) = \int_{-\frac{a_{k+1}}{2}}^{\frac{a_{k+1}}{2}} \Phi_k(t-\tau)\, d\tau. \tag{1b}$$

Man liest aus dieser Darstellung unmittelbar ab:

Es ist für $k \geqq 2$

$$0 \leqq \Phi_k(t) \leqq \prod_{i=2}^{k} a_i \tag{2}$$

und für alle k und $|t| > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} a_i$

$$\Phi_k(t) = 0. \tag{3}$$

Die $\Phi_k(t)$ sind abteilungsweise durch Polynome vom Grad $\leqq k-1$ darstellbar und für $k > 2$ überall $k-2$-fach stetig differenzierbar.

Die $\Phi_k(t)$ sind gerade Funktionen und für $t \leqq 0$ monoton nicht abnehmend, so daß

$$\Phi_k(0) = \operatorname*{Max}_t \Phi_k(t). \tag{4}$$

Als Funktion der $a_1 \ldots a_k$ ist $\Phi_k(t)$ für alle a_i monoton nicht abnehmend. Für alle k gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_k(t)\,dt = \prod_{i=1}^{k} a_i. \tag{5}$$

Aus (3), (4) und (5) folgt dann:

$$\Phi_k(0) \geqq \frac{\prod_{i=1}^{k} a_i}{\sum_{i=1}^{k} a_i}. \tag{6}$$

Wir geben für die Funktionen Φ_k eine *Integraldarstellung*. Ausgehend vom DIRICHLETschen Diskontinuitätsfaktor ist:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin x\left(t+\frac{a_1}{2}\right) - \sin x\left(t-\frac{a_1}{2}\right)}{x}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin a_1 x}{x}\cos 2xt\,dx = \Phi_1(t).$$

Mit Hilfe von (1b) folgt daraus allgemein[1]):

$$\Phi_k(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \prod_{i=1}^{k} \frac{\sin a_i x}{x}\cos 2xt\,dx. \tag{7}$$

Diese Integrale sind für alle reellen a_i und t sinnvoll. Sie genügen einigen bemerkenswerten Funktionalgleichungen (wir setzen dabei die in den Φ_k auftretenden a_i stets in Evidenz).

Es ist

$$\Phi_k\left(a_1, a_2, \ldots a_k; \tfrac{t}{2}\right) + \Phi_k\left(t, a_2, \ldots a_k; \tfrac{a_1}{2}\right) = \Phi_k(a_1 + t, a_2, \ldots a_k; 0), \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_{k+1}}\Phi_{k+1}(a_1, \ldots a_k, a_{k+1}; 0) = \Phi_k\left(a_1, a_2, \ldots a_k; \tfrac{a_{k+1}}{2}\right) \tag{9}$$

und durch partielle Integration:

$$\Phi_k(a_1, a_2, \ldots a_k; \tfrac{1}{2}) = k\,\Phi_{k+1}(a_1, a_2, \ldots a_k, 1; 0) - \\ - \sum_{i=1}^{k} a_i \Phi_k\left(a_1, \ldots a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots a_k; \tfrac{a_i}{2}\right). \tag{10}$$

Die rekursive Herleitung der Integrale Φ_k durch (1) bietet oft die Möglichkeit einer leichten Berechnung. So ergibt sich z. B. ohne weiteres[2]):

$$\Phi_2(a_1, a_2; 0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin a_1 x \cdot \sin a_2 x}{x^2}\,dx = \min(a_1, a_2) \quad (a_1, a_2 > 0).$$

[1]) Vgl. G. POLYA, Math. Ann. 74, 204–212. Für den Spezialfall, in dem alle $a_i = 1$ sind, vgl. S. BOCHNER, Vorlesungen über FOURIERsche Integrale, 1932, S. 15; ferner H. HADWIGER, ZAMM, XXII, 226–232.

[2]) Vgl. G. POLYA, l. c.

Wir setzen ferner:

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{k} a_i} \Phi_k(a_1, a_2, \ldots a_k; t) = \Psi_k(a_1, a_2, \ldots a_k; t) = \Psi_k(t);$$

nach (1) ist:

$$\Psi_{k+1}(t) = \frac{1}{a_{k+1}} \int_{-\frac{a_{k+1}}{2}}^{\frac{a_{k+1}}{2}} \Psi_k(t-\tau)\, d\tau, \tag{11}$$

so daß die Ψ_{k+1} als Mittelfunktionen aus den Ψ_k entstehen. Daher und wegen (4) ist:

$$\Psi_{k+1}(0) \leqq \Psi_k(0).$$

Die $\Psi_k(t)$ sind also für alle k und alle t gleichmäßig beschränkt. Dieselbe Rekursionsformel (11) gilt auch für die Ableitungen $\Psi_k'(t)$ und es ist $(k > 2)$:

$$\max_t \Psi_{k+1}'(t) \leqq \max_t \Psi_k'(t).$$

Nun ist $(a_1 \geqq a_2)$

$$\Psi_2(t) = \frac{1}{a_1} \text{ für } |t| \leqq \frac{a_1 - a_2}{2}, \quad \Psi_2(t) = \frac{a_1 + a_2 - 2|t|}{2 a_1 a_2} \text{ für } \left| |t| - \frac{a_1}{2} \right| \leqq \frac{a_2}{2},$$

also auch

$$|\Psi_k'(t)| \leqq \frac{1}{a_1 a_2} \quad (k > 2). \tag{12}$$

Analoge Abschätzungen gelten für die höheren Ableitungen.

Wir schreiben noch eine allgemeine Faltungsregel für die Ψ an, die man unmittelbar durch Induktion gewinnt:

$$\Psi_{i+k}(a_1, a_2, \ldots a_{i+k}; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_i(a_1, \ldots a_i; t-\tau) \Psi_k(a_{i+1}, \ldots a_{i+k}; \tau)\, d\tau. \tag{13}$$

Wir untersuchen das Verhalten von

$$\Psi_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\sin a_i x}{a_i x} \cos 2xt\, dx$$

für $k \to \infty$. Wir zeigen:

Für $k \to \infty$ konvergieren die Funktionen $\Psi_k(t)$ stets, und zwar gleichmäßig für alle t

$$\Psi(t) = \lim_{k \to \infty} \Psi_k(t).$$

Ist dabei $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ divergent, so ist $\Psi(t) \equiv 0$.

Ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ konvergent, so ist $\Psi(t)$ eine nicht identisch verschwindende, unbeschränkt differenzierbare Funktion.

Der Beweis erfordert einige Fallunterscheidungen.

Sei $0 < \varepsilon < R$ und $k > 2$. Wir zerlegen das Integrationsintervall:

$$\int_0^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\sin a_i x}{a_i x} \cos 2xt\, dx = \int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R} + \int_{R}^{\infty}. \tag{14}$$

Das erste Integral ist absolut $\leqq \varepsilon$; das dritte ist absolut

$$\leqq \frac{1}{a_1 a_2} \int_R^{\infty} \frac{1}{x^2} \prod_{i=3}^{k} \frac{|\sin a_i x|}{a_i x}\, dx \leqq \frac{1}{a_1 a_2 R}.$$

Diese beiden Integrale sind also bei geeigneter Wahl von ε und R beliebig klein. Wir zeigen vom zweiten Integral, daß es für $k \to \infty$ konvergiert.

A. Wir betrachten den Fall, daß die a_i nicht gegen Null konvergieren, und zeigen, daß das zweite Integral in (14) für $k \to \infty$ gegen Null strebt.

Für $x > 0$ hat $\frac{\sin a_i x}{x}$ extreme Werte für die Stellen $x^{(i)}$ mit $a_i x^{(i)} = \operatorname{tg} a_i x^{(i)}$; es ist wegen $a_i > 0$ dann $x^{(i)} > \frac{\pi}{a_i}$. Für $x \geqq \varepsilon$ ist daher stets:

$$\left|\frac{\sin a_i x}{x}\right| \leqq \max\left(\frac{|\sin a_i \varepsilon|}{\varepsilon}, \frac{|\sin a_i x^{(i)}|}{x^{(i)}}\right) \leqq a_i \max\left(\frac{|\sin a_i \varepsilon|}{a_i \varepsilon}, \frac{1}{\pi}\right).$$

Es ist daher weiter:

$$\left|\int_{\varepsilon}^{R} \prod_{i=1}^{k} \frac{\sin a_i x}{a_i x} \cos 2xt\, dx\right| \leqq R \prod_{i=1}^{k} \max\left(\frac{|\sin a_i \varepsilon|}{a_i \varepsilon}, \frac{1}{\pi}\right).$$

Nach unserer Voraussetzung gibt es ein $\alpha > 0$, so daß unendlich viele $a_i \geqq \alpha$ sind. Wir bezeichnen die Anzahl der $a_1 \ldots a_k$ mit $a_i \geqq \alpha$ mit k'; mit $k \to \infty$ geht dann auch $k' \to \infty$. Weiter ist für alle $h \geqq \alpha\varepsilon$:

$$\left|\frac{\sin h}{h}\right| \leqq \max\left(\frac{|\sin \alpha\varepsilon|}{\alpha\varepsilon}, \frac{1}{\pi}\right)$$

und endlich:

$$\left|\int_{\varepsilon}^{R} \prod_{i=1}^{k} \frac{\sin a_i x}{a_i x} \cos 2xt\, dx\right| \leqq R\left[\max\left(\frac{|\sin \alpha\varepsilon|}{\alpha\varepsilon}, \frac{1}{\pi}\right)\right]^{k'};$$

die rechte Seite der Ungleichung strebt also für $k \to \infty$ gegen Null, q. e. d.

B. Sei nun $a_i \to 0$. Bei vorgegebenem η mit $0 < \eta < 1$ ist dann für fast alle i und $\varepsilon \leqq x \leqq R$

$$\frac{\sin a_i x}{a_i x} = 1 - \frac{(a_i x)^2}{3!} + \cdots = 1 - \vartheta(i, x)\frac{(a_i x)^2}{6}$$

mit

$$1 - \eta < \vartheta(i, x) < 1 + \eta.$$

a) Ist nun $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ divergent, so divergiert für $\varepsilon \leqq x \leqq R$ auch

$$\sum_{i=1}^{\infty} \vartheta(i, x) \frac{(a_i x)^2}{6}$$

gegen $+\infty$ und es strebt

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{\sin a_i x}{a_i x} = \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \vartheta(i x) \frac{(a_i x)^2}{6}\right) \to 0$$

für $k \to \infty$, und zwar gleichmäßig für alle x mit $\varepsilon \leqq x \leqq R$. Also strebt für divergente $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ jedenfalls $\Psi_k(t) \to 0$, und zwar gleichmäßig für alle t.

b) Sei nun $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ konvergent. Dann ist das unendliche Produkt $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{\sin a_i x}{a_i x}$ konvergent, und zwar gleichmäßig für $\varepsilon \leqq x \leqq R$. Es konvergiert daher auch das zweite Integral in (14) für $k \to \infty$ und es ist:

$$(15) \quad \Psi(t) = \Psi(a_1, a_2, \ldots; t) = \lim_{k \to \infty} \Psi_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\sin a_i x}{a_i x} \cos 2 x t \, dx.$$

Man sieht ferner ohne Schwierigkeit, daß auch die r-ten Ableitungen

$$\Psi_k^{(r)}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\sin a_i x}{a_i x} (2x)^r \cos\left(2 x t + r \frac{\pi}{2}\right) dx \qquad (k > r + 2)$$

für $k \to \infty$ konvergieren:

$$(16) \quad \lim_{k \to \infty} \Psi_k^{(r)}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\sin a_i x}{a_i x} (2x)^r \cos\left(2 x t + r \frac{\pi}{2}\right) dx,$$

also gegen die r-te Ableitung von $\Psi(t)$.

Wir haben nun noch zu zeigen, daß in diesem Fall $\Psi(t)$ nicht identisch verschwindet.

Aus (4) folgt auch für die Ψ

$$\Psi(a_1, a_2, \ldots; 0) = \max_t \Psi(a_1, a_2, \ldots; t).$$

Nun ist mit $a > 0$:

$$\Psi(a, a_1, a_2, \ldots; t) = \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Psi(a_1, a_2, \ldots; t - \tau) \, d\tau,$$

entsteht also durch Mittelbildung aus $\Psi(a_1, a_2, \ldots; t)$ und es ist:

$$\Psi(a, a_1, a_2, \ldots; 0) \leqq \Psi(a_1, a_2, \ldots; 0).$$

Iteriert man die Mittelbildung in der Weise, daß jede der Zahlen a_i zweimal auftritt, so ist (die Reihenfolge des a_i ist ersichtlich gleichgültig):

$$\Psi(a_1, a_1, a_2, a_2, \ldots; 0) \leqq \Psi(a_1, a_2, \ldots; 0).$$

Nun ist

$$\Psi(a_1, a_1, a_2, a_2, \ldots; 0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \prod_{i=1}^\infty \frac{\sin^2 a_i x}{a_i^2 x^2} dx > 0, \tag{17}$$

also ist auch $\Psi(a_1, a_2, \ldots; 0) > 0$ und $\Psi(a_1, a_2, \ldots; t)$ nicht identisch Null.

Wenn sogar schon $\sum_{i=1}^\infty a_i$ konvergiert, so folgt aus (6):

$$\Psi(a_1, a_2, \ldots; 0) \geqq \frac{1}{\sum_{i=1}^\infty a_i}.$$

Wir geben nun einige Anwendungen unserer Integrale.

Anzahl der Zerlegungen einer reellen Zahl in k beschränkte Summanden. Sei t eine reelle Zahl und k eine natürliche Zahl. Wir fragen nach der „Anzahl", wie oft t als Summe von k Summanden dargestellt werden kann:

$$t = \sum_{i=1}^k t_i,$$

wobei die $|t_i| \leqq \frac{a_i}{2}$ sein sollen ($a_1 \ldots a_k$ beliebig gegebene positive Zahlen). Solche Zerlegungen existieren natürlich nur für $|t| \leqq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k a_i$, und zwar unendlich viele, wenn hier das Ungleichheitszeichen steht. Der Anzahl dieser Zerlegungen können wir — so wie es in der Integralgeometrie üblich ist — als Maß oder Dichte eine Zahl zuordnen. Die Rekursionsformeln (1) legen nahe, als Maß dieser Anzahl die Zahl $\Phi_k(t)$ zu wählen[3]).

Zurückführung eines k-fachen Integrals auf ein einfaches. Sei $f(t)$ eine stetige Funktion; dann ist

$$\int_{-\frac{a_k}{2}}^{\frac{a_k}{2}} \ldots \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} f(t_1 + t_2 + \cdots + t_k)\, dt_1 \ldots dt_k = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \Phi_k(a_1, \ldots a_k; t)\, dt. \tag{18}$$

Für $k = 1$ ist die Formel sicher richtig; sei die Formel für $k - 1$ Variable gezeigt; so ist:

$$\int_{-\frac{a_{k-1}}{2}}^{\frac{a_{k-1}}{2}} \ldots \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} f(t_1 + t_2 + \cdots + t_k) dt_1 \ldots dt_{k-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t + t_k) \Phi_{k-1}(a_1, \ldots a_{k-1}; t) dt;$$

[3]) Vgl. H. Hadwiger, l. c.

integriert man nach t_k von $-\frac{a_k}{2}$ bis $\frac{a_k}{2}$, so liefert die rechte Seite:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+t_k)\,\Phi_{k-1}(a_1,\ldots a_{k-1};t)\,\Phi_1(a_k;t_k)\,dt\,dt_k$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,\Phi_{k-1}(a_1,\ldots a_{k-1};\tau-t_k)\,\Phi_1(a_k;t_k)\,dt_k\,d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,\Phi_k(\tau)$$

Aus (18) liest man unmittelbar die geometrische Deutung von $\Phi_k(t)$:

$\Phi_k(a_1,\ldots a_k;t)$ ist der $k-1$-dimensionale Inhalt desjenigen Stüc der Hyperebene $t_1+t_2+\cdots+t_k=t$ des $R_k(t_1\ldots t_k)$, welches innerh des Quaders $|t_i|\leqq\frac{a_i}{2}$ $(i=1\ldots k)$ liegt.

Iterierte Mittelbildung von Funktionen. Ist $f(t)$ eine stetige Funktic so bilden wir der Reihe nach die Mittelfunktionen ($a_1a_2\ldots$ positive Zahle

$$f_1(t)=\frac{1}{a_1}\int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} f(t+\tau)\,d\tau,$$

$$f_{i+1}(t)=\frac{1}{a_{i+1}}\int_{-\frac{a_{i+1}}{2}}^{\frac{a_{i+1}}{2}} f_i(t+\tau)\,d\tau \qquad (i=1,2,\ldots$$

Man sieht ohne weiteres nach (11)

$$f_k(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\tau)\,\Psi_k(\tau)\,d\tau.$$

Ist nun z. B. $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent, so strebt $\Psi_k(t)\to\Psi(t)$ und

$$f_k(t)\to F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\tau)\,\Psi(\tau)\,d\tau;$$

$F(t)$ hängt dabei nur von den Werten $f(t+\tau)$ mit $|\tau|\leqq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ab und eine unbeschränkt differenzierbare Funktion, die sich von den Werten f bei hinreichend kleiner $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ beliebig wenig unterscheidet. Für die A leitung von $F(t)$ gelten nach (12) ganz einfache Ungleichungen, die hi nicht weiter aufgeschrieben werden sollen.

Eine weitere Mitteilung folgt.

(Eingegangen am 1. Dezember 1942.)